

УДК 531.36 : 62-50

© 2006 г. Э. К. Лавровский, А. М. Формальский

ОБ УПРАВЛЕНИИ КАЧЕНИЕМ КОЛЕСА ПОСРЕДСТВОМ ИЗМЕНЕНИЯ ЕГО ДИСБАЛАНСА

Рассматривается движение колеса (качение без проскальзывания) в вертикальной (продольной) плоскости. Внутри колеса, в полости, расположенной вдоль его диаметра, может перемещаться груз, который моделируется материальной точкой. Перемещая с помощью привода груз из одного конца полости в другой определенным образом, можно организовать качение колеса. Составлены уравнения движения механизма. Построен алгоритм управления положением груза, при котором груз периодически перемещается из одного конца полости в противоположный, а колесо катится (неравномерно) по поверхности.

Организовать продольное движение одноколесного аппарата (моноцикла) можно путем перемещения относительно колеса так или иначе связанных с ним тел. Были описаны [1, 2]¹ моноциклы, которые приводятся в движение при помощи смонтированного на них маятникового механизма. Продольное движение таких устройств происходит при отклонении маятника (с помощью привода) от устойчивого нижнего положения равновесия или от неустойчивого верхнего. Подобный аппарат был известен еще в XIX веке.

Сконструированный в Институте механики МГУ моноцикл – "гироскелесо" [3] представляет собой колесо, оснащенное маятником, при помощи которого обеспечивается продольное движение моноцикла, и гироскопическим стабилизатором, поддерживающим его вертикальное положение. Гиростабилизатор дает также возможность менять направление движения аппарата. Был описан моноцикл [4, 5], управление движением которого и стабилизация также осуществляются при помощи маятника и гиростабилизатора. Рассматривались [6] некоторые задачи, касающиеся устойчивости и стабилизации движения одноколесного велосипеда.

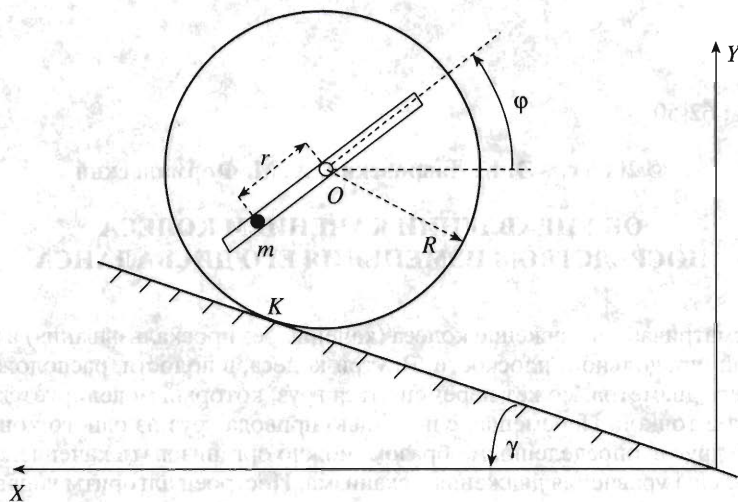
Ниже исследуется возможность управления качением колеса путем перемещения груза по диаметрально расположенной внутри колеса полости, другими словами, путем управления дисбалансом колеса. При этом рассматривается плоское движение колеса без проскальзывания и без потери контакта с опорой. При наличии дисбаланса колеса вертикальная составляющая реакции опоры может обратиться в нуль, что несовместимо с требованием безотрывного качения колеса. Это обстоятельство необходимо учитывать при синтезе управления, если требуется организовать качение колеса без потери контакта с опорой.

При движении аппарата по неровной поверхности ему приходится преодолевать возвышенности, впадины. Поднимаясь на возвышение или выезжая из впадины, аппарат должен преодолевать подъем. В связи с этой задачей здесь рассматривается движение аппарата вверх по наклонной плоскости.

Изучаемая в статье система моделирует, в частности, цирковой аттракцион, во время которого артист, находящийся внутри колеса, приводит его в движение путем перемещения своего центра масс в плоскости колеса.

1. Механическая модель аппарата. Для исследования движения изучаемого одноколесного аппарата в продольной плоскости рассмотрим механическую систему, состоящую из двух абсолютно твердых тел: колеса массы M и радиуса R , а также груза массы m ,

¹ См. также www.theriotwheel.com, www.jackiechabanas.com, www.americanroadshop.com, www.dself.dsl.pipex.com.



Фиг. 1

который будем моделировать материальной точкой (фиг. 1). Пусть масса колеса распределена по нему равномерно и следовательно, его центр масс находится в геометрическом центре O . Груз перемещается внутри колеса, в полости, расположенной вдоль диаметра, меняя дисбаланс колеса. Через r обозначим расстояние груза m от точки O . Полость симметрична относительно центра колеса O , ее длина равна $2r_0$. Таким образом, величина r может принимать значения от $-r_0$ до r_0 :

$$|r| \leq r_0 \quad (1.1)$$

где, естественно, $r_0 \leq R$.

Пусть в начале движения полость, в которой находится груз m , ориентирована горизонтально – вдоль оси X . Обозначим через ϕ угол поворота этой полости против часовой стрелки относительно горизонта, а через x – перемещение центра масс колеса O вдоль оси X , так что $\dot{x} = \phi R \cos \gamma$. Здесь γ – угол, который составляет наклонная плоскость с горизонтальной плоскостью (фиг. 1). Если $\phi > 0$, то при $\gamma > 0$ колесо катится вверх по наклонной плоскости.

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы, характеризуемые обобщенными координатами ϕ и r или x и r . Выражения для горизонтальной V_{Ox} и вертикальной V_{Oy} компонент вектора V_O скорости центра колеса O и компонент V_{mx} , V_{my} вектора V_m скорости материальной точки m имеют вид

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \phi R \cos \gamma, & V_{Oy} &= \phi R \sin \gamma \\ V_{mx} &= \phi (R \cos \gamma - r \sin \phi) + \dot{r} \cos \phi, & V_{my} &= \phi (R \sin \gamma - r \cos \phi) - \dot{r} \sin \phi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Учитывая соотношения (1.2), получаем следующее выражение для определения кинетической энергии T системы:

$$2T = \{J + m[R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\phi + \gamma)]\} \dot{\phi}^2 + m\dot{r}^2 + 2mR\dot{\phi}\dot{r} \cos(\phi + \gamma) \quad (1.3)$$

Здесь $J = 3MR^2/2$ – момент инерции колеса относительно точки на его ободе.

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = (M + m)gR\phi \sin \gamma - mgr \sin \phi \quad (1.4)$$

Здесь $(M + m)gR \sin \gamma$ – момент сил тяжести, "стремящийся" скатить колесо с наклонной плоскости, находящейся под углом γ к горизонту.

2. Уравнения движения системы. Используя метод Лагранжа второго рода, можно с помощью выражений (1.3), (1.4) составить уравнения движения системы. Уравнение движения, отвечающее обобщенной координате ϕ , имеет вид

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi} \{ J + m[R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\phi + \gamma)] \} + mR\dot{r} \cos(\phi + \gamma) = \\ & = m \{ r[R\dot{\phi}^2 \cos(\phi + \gamma) + g \cos \phi] + 2\dot{\phi}r[R \sin(\phi + \gamma) - r] \} - (M + m)gR \sin \gamma - \kappa \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\kappa = \text{const}$ – коэффициент сопротивления качению колеса; считается, что сопротивление пропорционально угловой скорости $\dot{\phi}$. Заметим, что уравнение (2.1) получается также [7] из уравнения изменения кинетического момента системы относительно мгновенного центра скоростей колеса K .

Второе уравнение движения, отвечающее обобщенной координате r , выписывать не будем. Дело в том, что в дальнейшем управляющим параметром в системе будем считать расстояние r , точнее говоря, ускорение \ddot{r} или скорость \dot{r} , тогда это второе уравнение служит лишь для определения силы, при помощи которой можно осуществить желаемое перемещение груза m внутри полости.

Введем безразмерные время τ и расстояние ρ по формулам

$$\tau = t\sqrt{g/R}, \quad \rho = r/R \quad (2.2)$$

Тогда уравнение можно записать в безразмерных переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} & \phi'' [j + 1 + \rho^2 - 2\rho \sin(\phi + \gamma)] + \rho'' \cos(\phi + \gamma) = \\ & = \rho [\phi'^2 \cos(\phi + \gamma) + \cos \phi] + 2\phi' \rho' [\sin(\phi + \gamma) - \rho] - (1 + \mu) \sin \gamma - \chi \phi' \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по безразмерному времени τ и введены безразмерные параметры системы

$$\mu = \frac{M}{m}, \quad j = \frac{J}{mR^2} = \frac{3\mu}{2}, \quad \chi = \frac{\kappa}{m\sqrt{gR}^{3/2}} \quad (2.4)$$

Неравенство (1.1) в безразмерных переменных выглядит так:

$$|\rho| \leq \rho_0 \quad (\rho_0 = r_0/R \leq 1) \quad (2.5)$$

Используя безразмерные переменные (2.2) и параметры (2.4), выпишем выражения для безразмерных горизонтальной R_x и вертикальной R_y компонент реакции опоры

$$R_x = (1 + \mu)\phi'' \cos \gamma - (\phi''\rho + 2\phi'\rho') \sin \phi - (\phi'^2\rho - \rho'') \cos \phi \quad (2.6)$$

$$R_y = (1 + \mu)(1 + \phi'' \sin \gamma) - (\phi''\rho + 2\phi'\rho') \cos \phi - (\rho'' - \phi'^2\rho) \sin \phi \quad (2.7)$$

Безразмерные составляющие реакции опоры R_x и R_y получаются делением размерных на вес груза mg .

3. Постановка задачи. Пусть колесо находится на горизонтальной поверхности ($\gamma = 0$) в таком положении, что полость с грузом отклонена от вертикали. Если при этом груз m расположен не в центре O , то сила тяжести, приложенная к нему, создает момент, вращающий колесо в ту или иную сторону. Благодаря этому, перемещая груз должным образом внутри полости, можно организовать движение колеса по горизонтальной поверхности в желаемом направлении и даже вверх по наклонной плоскости. Для организации такого движения нужно, по-видимому, в то время, когда груз оказывается внизу

(когда полость вертикальна или почти вертикальна), "быстро" переместить его (при помощи привода) в противоположный конец полости, который находится вверх. Груз нужно держать в этом конце полости до тех пор, пока он при качении колеса не опустится снова вниз. После этого груз нужно снова переместить в противоположный конец полости, где он находился ранее, и т.д.

В соответствии со сказанным выше, считая для начала, что подстилающая поверхность горизонтальна ($\gamma = 0$), рассмотрим следующий алгоритм управления движением груза – алгоритм изменения расстояния груза ρ от центра колеса O .

Пусть в начале движения, при $\tau = 0$, полость, в которой находится груз, горизонтальна, скорость колеса равна нулю и груз располагается (покоится) в левом краю полости, т.е.

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \rho'(0) = 0 \quad (3.1)$$

При этих начальных условиях колесо, очевидно, начнет при $\tau > 0$ катиться влево. Пусть груз остается в том же положении и далее, т.е. пусть $\rho'' = \rho' = 0$ и

$$\rho = \rho_0 \quad (3.2)$$

до тех пор, пока колесо не повернется на четверть оборота, т.е. пока

$$\varphi < \pi/2 \quad (3.3)$$

В некоторый момент времени τ_1 , когда колесо повернется на четверть оборота, т.е. при

$$\varphi = \pi/2 \quad (3.4)$$

груз оказывается в нижнем положении (ближе всего к опоре). В этот момент времени начинаем менять расстояние ρ , точнее говоря, ускорение ρ'' по следующему закону:

$$\rho'' = \begin{cases} -F_1 & \text{при } \rho_1 \leq \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{при } -\rho_2 < \rho < \rho_1 \\ F_2 & \text{при } -\rho_0 \leq \rho \leq -\rho_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

где $F_1 > 0$, $F_2 > 0$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ – постоянные величины. При $F_1 = F_2$, $\rho_1 = \rho_2$ график функции (3.5) становится симметричным относительно начала координат. В соответствии с выражением (3.5) при $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_0$ груз разгоняется, при $-\rho_2 < \rho < \rho_1$ движется вдоль полости с постоянной скоростью, а при $-\rho_0 \leq \rho \leq -\rho_2$ тормозится.

Допустим, что перемещение груза внутри полости происходит в течение времени, когда угол φ остается близким к величине $\pi/2$. Тогда, если постоянную F_2 выбрать слишком большой, то, как следует из рассмотрения выражений (2.3), (2.7), вертикальная составляющая R_y реакции опоры при $-\rho_0 < \rho < -\rho_2$ может обратиться в нуль, а затем стать отрицательной. При этом сохранить контакт колеса с опорой можно только при помощи какого-то специального устройства, удерживающего колесо от "подпрыгивания". Наоборот, если увеличивать постоянную F_1 (при $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_0$), то вертикальная компонента реакции опоры увеличивается, и потери контакта колеса с опорой не будет.

Соотношение (3.5) можно рассматривать как дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной ρ . Выписать решение этого уравнения не составляет труда. Скорость ρ' , будучи вначале (при $\rho = \rho_0$) равной нулю, на интервале $\rho_1 \leq \rho < \rho_0$ убывает линейно во времени; в конце этого интервала – при $\rho = \rho_1$

$$\rho' = -\beta = -\sqrt{2F_1(\rho_0 - \rho_1)} \quad (3.6)$$

Величина ρ , будучи вначале равной ρ_0 , при управлении (3.5) также уменьшается по квадратичному во времени закону. При $-\rho_2 < \rho < \rho_1$ ускорение ρ'' равно нулю и скорость ρ'

остается равной величине (3.6). При $-\rho_0 \leq \rho \leq -\rho_2$ скорость ρ' , оставаясь отрицательной, линейно во времени возрастает. Можно показать, что если постоянные F_1, F_2, ρ_1, ρ_2 удовлетворяют условию

$$F_1(\rho_0 - \rho_1) = F_2(\rho_0 - \rho_2) \tag{3.7}$$

то наступает момент времени τ_2 , когда выполняются сразу два равенства

$$\rho = -\rho_0, \quad \rho' = 0 \tag{3.8}$$

Условие (3.7) означает, что первый "импульс" в управлении (3.5) равен второму.

К моменту времени τ_2 угол φ превзойдет величину $\pi/2$, т.е. $\varphi(\tau_2) > \pi/2$, пусть также $\varphi(\tau_2) < 3\pi/2$. Тогда груз к этому моменту окажется ниже своего возможного высшего положения и выше низшего. Допустим, что $\varphi'(\tau_2) \geq 0$, тогда при $\tau > \tau_2$ положим $\rho'' = \rho' = 0$ и

$$\rho = -\rho_0 \tag{3.9}$$

При управлении (3.9) момент силы тяжести, приложенной к грузу, будет продолжать катить колесо влево (при $\gamma = 0$).

В какой-то момент времени τ_3 колесо повернется на три четверти оборота, т.е. будет иметь место равенство

$$\varphi = 3\pi/2 \tag{3.10}$$

В этот момент τ_3 груз окажется в своем низшем положении, как и при условии (3.4) в момент τ_1 . Начиная с момента τ_3 , снова меняем расстояние ρ , перемещая груз в противоположный конец полости. Закон изменения ускорения ρ'' при этом отличается от (3.5) только знаком, поскольку расстояние ρ теперь нужно *увеличивать* от $-\rho_0$ до ρ_0 .

Описанный выше цикл управления повторяем при достижении углом φ значений

$$\varphi = 5\pi/2, 7\pi/2, \dots, (2k + 1)\pi/2, \quad k = 4, 5, \dots \tag{3.11}$$

т.е. таких φ , что разность $\varphi - \pi/2$ кратна величине π .

Если $F_1 \rightarrow \infty, \rho_1 \rightarrow \rho_0$, а произведение $F_1(\rho_0 - \rho_1)$ остается постоянным, так что $F_1(\rho_0 - \rho_1) = \beta^2/2$, то первый из "импульсов" в управлении (3.5) "превращается" в дельта-функцию интенсивности $-\beta$ ($\beta = \text{const} > 0$). В этом случае ускорение ρ'' описывается формулой

$$\rho'' = \begin{cases} -\beta\delta(\tau - \tau_1) & \text{при } \rho = \rho_0 \\ 0 & \text{при } -\rho_2 < \rho < \rho_0 \\ F_2 & \text{при } -\rho_0 \leq \rho \leq -\rho_2 \end{cases} \tag{3.12}$$

Вертикальная компонента реакции опоры станет отрицательной при $-\rho_0 \leq \rho \leq -\rho_2$, если величина F_2 будет достаточно большой, поэтому величину F_2 не будем устремлять к бесконечности. Если величина F_2 не "слишком" велика, то можно рассчитывать на то, что вертикальная составляющая реакции опоры будет положительной в течение всего времени качения колеса.

При управлении (3.12) скорость ρ' , будучи равной нулю при $\rho = \rho_0$, затем скачкообразно уменьшается до значения $-\beta$, остается таковой на интервале

$$-\rho_2 < \rho < \rho_0 \tag{3.13}$$

а затем линейно во времени возрастает до нуля.

Итак, в момент времени τ_1 , когда выполняется условие (3.4), вместо управления (3.5) можно "включить" управление (3.12). Если $F_2(\rho_0 - \rho_2) = \beta^2/2$, то при управлении (3.12) в некоторый момент времени τ_2 выполняются два равенства (3.8). После этого момента

управление описывается выражением (3.9) до достижения равенства (3.10). При достижении этого равенства в некоторый момент времени τ_3 "включаем" закон управления, отличающийся от (3.12) знаком.

Из рассмотрения уравнения (2.3) следует, что при скачке $\rho'_+ - \rho'_- = -\beta$ скорости ρ' угловая скорость ϕ' также претерпевает скачок

$$\phi'_+ - \phi'_- = \frac{\beta \cos(\phi_* + \gamma)}{j + 1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \sin(\phi_* + \gamma)} \quad (3.14)$$

Формула (3.14) выписана для общего случая, когда скачок происходит при произвольном значении ϕ_* угла ϕ и произвольном угле наклона γ подстилающей поверхности. Если $\gamma = 0$ и $\phi_* = \pi/2$, то скачок (3.14) равен нулю.

Ниже, в разд. 6, при описанном выше алгоритме управления (3.12) численно найдено движение колеса, начинающееся из состояния покоя (3.1), и завершающееся неким периодическим режимом, полученным при $\rho = \text{const}$.

Пусть теперь в начальный момент времени колесо находится на наклонной плоскости в состоянии покоя (3.1). Из рассмотрения уравнения (2.3) следует, что для того чтобы колесо могло катиться вверх по склону, необходимо выполнение условия

$$\rho_0 - (1 + \mu) \sin \gamma > 0$$

Перепишем это условие в виде

$$\sin \gamma < \frac{\rho_0}{1 + \mu} \quad \left(\sin \gamma < \frac{m r_0}{(M + m) R} \right) \quad (3.15)$$

Неравенство (3.15) означает, что вертикаль, опущенная из центра масс системы, пересекает наклонную плоскость левее точки K контакта колеса с этой плоскостью (см. фиг. 1). Очевидно, что при нарушении условия (3.15) колесо не может все время катиться вверх по склону, какова бы ни была его начальная скорость. Неравенство (3.15) было получено в [1] для задачи управления качением колеса при помощи маятника. В той задаче неравенство (3.15) было как *необходимым*, так и *достаточным* условием возможности движения колеса вверх по наклонной плоскости. В рассматриваемой здесь задаче оно является только *необходимым* условием.

4. Фаза перемещения груза по полости. Рассмотрение выражения (2.7), а также численные исследования показывают, что при управлении (3.12) с большими значениями F_2 вертикальная составляющая R_y реакции опоры становится в определенные моменты времени отрицательной. Однако, стремясь получить какие-то аналитические соотношения для описания движения механизма и его свойств, пренебрежем этим обстоятельством и рассмотрим вместо (3.12) управление с двумя дельта-функциями: при $\rho = \rho_0$ (как в управлении (3.12)) и при $\rho = -\rho_0$. При таком управлении скорость ρ' изменяется в соответствии с формулой

$$\rho' = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho = \rho_0, \rho = -\rho_0 \\ -\beta & \text{при } -\rho_0 < \rho < \rho_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

В соответствии с выражением (4.1) при $\rho = \rho_0$ скорость ρ' меняется скачком от $\rho' = 0$ до $\rho' = -\beta$, далее при

$$-\rho_0 < \rho < \rho_0 \quad (4.2)$$

скорость $\rho' \equiv -\beta$, а при $\rho = -\rho_0$ меняется скачком в противоположном направлении: от $\rho' = -\beta$ до $\rho' = 0$. К моменту, когда расстояние ρ становится равным $-\rho_0$, угол ϕ изменяет-

ся и становится равным некоторой величине φ_{**} . Тогда при втором скачке скорости ρ' , который происходит при $\rho = -\rho_0$, вместо соотношения (3.14) получаем выражение

$$\varphi'_+ - \varphi'_- = \frac{-\beta \cos(\varphi_{**} + \gamma)}{j + 1 + \rho_0^2 + 2\rho_0 \sin(\varphi_{**} + \gamma)} \quad (4.3)$$

Поскольку при управлении (4.1) в интервале (4.2) $\rho' \equiv -\beta$ и $\rho'' \equiv 0$, то уравнение движения (2.3) в этом интервале несколько упрощается. Рассмотрим здесь в качестве независимой переменной вместо безразмерного времени τ расстояние ρ , которое строго монотонно убывает от значения ρ_0 до значения $-\rho_0$. Тогда

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{d\varphi}{d\rho}\beta, \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(-\frac{d\varphi}{d\rho}\beta\right) = \beta^2 \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} \quad (4.4)$$

и уравнение (2.3) (напомним, что теперь $\rho'' = 0$) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}[j + 1 + \rho^2 - 2\rho \sin(\varphi + \gamma)] = \\ & = \rho \left[\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 \cos(\varphi + \gamma) + \frac{1}{\beta^2} \cos \varphi \right] + 2\frac{d\varphi}{d\rho}[\sin(\varphi + \gamma) - \rho] - \frac{1 + \mu}{\beta^2} \sin \gamma + \frac{\chi}{\beta} \frac{d\varphi}{d\rho} \end{aligned} \quad (4.5)$$

В соответствии с условием (3.4) $\varphi(\rho_0) = \varphi(\tau_1) = \pi/2$. Используя формулу (3.14), выпишем начальные условия для уравнения (4.5)

$$\varphi(\rho_0) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\varphi}{d\rho}(\rho_0) = -\frac{1}{\beta} \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau_1) - \frac{1}{\beta}(\varphi'_+ - \varphi'_-) = -\frac{1}{\beta} \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau_1) - \frac{\sin \gamma}{j + 1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos \gamma} \quad (4.6)$$

Если $\gamma = 0$ (подстилающая поверхность горизонтальна), то уравнение (4.5) упрощается, а второе соотношение (4.6) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{d\rho}(\rho_0) = -\frac{1}{\beta} \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau_1) \quad (4.7)$$

При большом по модулю значении скорости β время перемещения груза из одного конца полости в другой мало. Рассматривая уравнение (4.5) при $\gamma = 0$ и соотношение (4.7), можно предположить, что при этом угол φ остается близким к $\pi/2$, а угловая скорость $d\varphi/d\rho$ изменяется на конечную величину. Для того чтобы более строго показать это, предположим, что функции, описывающие изменение угла φ и его производной по ρ , представимы в виде рядов по отрицательным степеням β

$$\varphi(\rho) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\beta}\varphi_1(\rho) + \frac{1}{\beta^2}\varphi_2(\rho) + \dots, \quad \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\beta} \frac{d\varphi_1}{d\rho} + \frac{1}{\beta^2} \frac{d\varphi_2}{d\rho} + \dots \quad (4.8)$$

Из выражений (4.7) и (4.8) получаем

$$\frac{d\varphi_1}{d\rho}(\rho_0) = -\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau_1) \quad (4.9)$$

Подставим ряды (4.8) в уравнение (4.5) при $\gamma = 0$. Собрав все члены при β^{-1} , получим, что функция $\varphi_1(\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\rho^2}[j + (1 - \rho)^2] = 2\frac{d\varphi_1}{d\rho}(1 - \rho)$$

решение которого при учете равенства (4.9) можно представить в виде

$$\frac{d\varphi_1(\rho)}{d\rho} = \frac{d\varphi_1(\rho_0)}{d\rho} \frac{j + (1 - \rho_0)^2}{1 + (1 - \rho)^2} = -\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau_1) \frac{j + (1 - \rho_0)^2}{j + (1 - \rho)^2} \quad (4.10)$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\varphi_1(-\rho_0)}{d\rho} = -\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau_1)\theta, \quad \theta = \frac{j + (1 - \rho_0)^2}{j + (1 + \rho_0)^2} \quad (4.11)$$

Заметим, что, поскольку $\theta < 1$, скорость колеса $\varphi'(\tau)$ к моменту τ_2 , когда груз достигает конца полости, оказывается меньше, чем скорость колеса в начальный момент перемещения груза τ_1 .

Интегрируя уравнение (4.10) и учитывая, что $\varphi_1(\rho_0) = 0$, получаем

$$\varphi_1(-\rho_0) = \varphi'(\tau_1) \frac{j + (1 - \rho_0)^2}{\sqrt{j}} \left(\operatorname{arctg} \frac{1 + \rho_0}{\sqrt{j}} - \operatorname{arctg} \frac{1 - \rho_0}{\sqrt{j}} \right) = \varphi'(\tau_1) [j + (1 - \rho_0)^2] \sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{j}} \operatorname{arctg} \frac{2\rho_0 \sqrt{j}}{j + 1 - \rho_0^2}$$

Отсюда, пользуясь первым из соотношений (4.8) и удерживая в нем величину порядка β^{-1} , имеем

$$\varphi_{**} = \varphi(-\rho_0) = \varphi(\tau_2) = \pi/2 + \beta^{-1} \varphi_1(-\rho_0) = \pi/2 + \beta^{-1} \varphi'(\tau_1) [j + (1 - \rho_0)^2] \sigma \quad (4.12)$$

Подставив значение (4.12) в выражение (4.3), получаем, что при $\gamma = 0$ "сразу" после момента, когда расстояние ρ становится равным $-\rho_0$, скорость φ' претерпевает скачок конечной величины. Для этого скачка, пренебрегая членами порядка β^{-1} и выше, имеем выражение

$$\varphi'_+ - \varphi'_- = \varphi'(\tau_1)\theta\sigma$$

Итак, получаем, что скорость φ' , будучи на правом конце отрезка $-\rho_0 \leq \rho \leq \rho_0$ равной величине $\varphi'(\tau_1)$, при "большом" значении β на левом конце этого отрезка (после второго скачка скорости ρ') становится равной величине

$$\varphi'(\tau_1)\theta + (\varphi'_+ - \varphi'_-) = \varphi'(\tau_1)\theta(1 + \sigma) \quad (4.13)$$

При $\rho_0 = 0$ имеем $\theta(1 + \sigma) = 1$, а при $\rho_0 > 0$, как нетрудно показать, $\theta(1 + \sigma) < 1$. Следовательно, при $\rho_0 > 0$ скорость колеса после перемещения груза из одного конца полости в другой и остановки его (мгновенной) оказывается меньше скорости колеса до начала перемещения груза.

Таким образом, получены приближенные выражения (4.12) и (4.13), которые описывают значения угла φ и угловой скорости φ' в момент времени τ_2 , когда выполняются условия (3.8).

5. Качение колеса при фиксированном положении груза. Теперь найдем скорость колеса в момент времени τ_3 , когда выполняется условие (3.10). На интервале времени

$$\tau_2 < \tau < \tau_3 \quad (5.1)$$

положение груза фиксировано: $\rho = -\rho_0$. Поэтому для вычисления скорости $\varphi'(\tau_3)$ можно воспользоваться интегралом энергии, который имеет место в отсутствие сопротивления качению, т.е. при $\chi = 0$.

В безразмерных переменных полная энергия системы имеет вид

$$\frac{T + \Pi}{mgR} = \frac{1}{2}[j + 1 + \rho^2 - 2\rho \sin(\varphi + \gamma)]\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\rho'^2 + \varphi'\rho' \cos(\varphi + \gamma) + (\mu + 1)\varphi \sin \gamma - \rho \sin \varphi \tag{5.2}$$

Положим в выражении (5.2) $\gamma = 0$, а также $\rho' = 0$ и $\rho = -\rho_0$. Тогда, пренебрегая членами порядка β^{-1} и выше, найдем выражение для постоянной интеграла энергии h , отвечающее состоянию (4.12), (4.13),

$$h = \frac{1}{2}[j + (1 + \rho_0)^2][\varphi'(\tau_1)]^2 \theta^2 (1 + \sigma)^2 + \rho_0 \tag{5.3}$$

Приравнивая величины (5.3) и (5.2) при условии (3.10), т.е. при $\tau = \tau_3$, получаем соотношение, которое связывает скорости $\varphi'(\tau_3)$ и $\varphi'(\tau_1)$:

$$[\varphi'(\tau_3)]^2 = [\varphi'(\tau_1)]^2 \theta (1 + \sigma)^2 + 4\eta \tag{5.4}$$

или

$$z_{n+1}^2 = \theta (1 + \sigma)^2 z_n^2 + 4\eta \tag{5.5}$$

Здесь введены обозначения

$$z_n = \varphi'(\tau_1), \quad z_{n+1} = \varphi'(\tau_3), \quad \eta = \rho_0/[j + (1 - \rho_0)^2]$$

Соотношение (5.4) или (5.5) описывает точечное отображение скорости z_n колеса в момент, когда груз находится в нижнем положении, в скорость колеса z_{n+1} в момент, когда груз оказывается в нижнем положении следующий раз, т.е. через пол-оборота колеса.

Если

$$\theta (1 + \sigma)^2 < 1 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{j}} \arctg \frac{2\rho_0 \sqrt{j}}{j + 1 - \rho_0^2} < \sqrt{\frac{j + (1 + \rho_0)^2}{j + (1 - \rho_0)^2} - 1} \right) \tag{5.6}$$

то уравнение (5.5) имеет решение

$$z_n = z_{n+1} = z; \quad z = 2\sqrt{\eta/[1 - \theta(1 + \sigma)^2]} \tag{5.7}$$

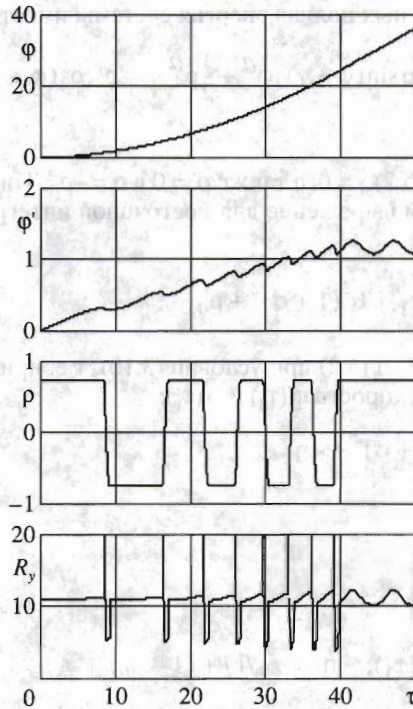
Доказать в общем виде, что неравенство (5.6) имеет место, не удастся. Однако при приближенных аналитических, а также численных исследованиях, не обнаружены значения j и ρ_0 , при которых это условие нарушалось бы.

Таким образом, управление (4.1) при достаточно большой скорости перемещения груза β обеспечивает периодический режим движения. Скорость качения колеса в этом стационарном режиме, отвечающем решению (5.7), не будет, конечно, постоянной.

График функции (5.5), построенный в плоскости z_n, z_{n+1} при значениях параметров

$$j = 15 \quad (M = 10 \text{ кг}, m = 1 \text{ кг}, R = 1 \text{ м}), \quad \rho_0 = 0.75 \quad (r_0 = 0.75 \text{ м}) \tag{5.8}$$

близок к биссектрисе первого квадранта и здесь не приводится. Пересечение с биссектрисой происходит в точке (5.7): $z = z_n = z_{n+1} = 7.15$ (в момент, когда груз находится внизу, угловая скорость $\dot{\varphi} = 22.4 \text{ с}^{-1}$). Из неравенства (5.6) следует, что угол наклона этого графика к оси абсцисс всюду, в том числе в точке (5.7), меньше $\pi/4$, что говорит об устойчивости стационарного режима движения (5.7). Однако, поскольку угол наклона графика функции (5.5) всюду близок к $\pi/4$, переходный процесс сходится к стационарному (пери-



Фиг. 2

одическому) медленно. Анализ равенства (5.7) показывает, что при $\rho_0 \rightarrow 0$ скорость $z \rightarrow \infty$. Численные исследования этого соотношения, проведенные при $j = 15$, говорят о том, что при $\rho_0 = 0.67$ скорость z достигает минимума.

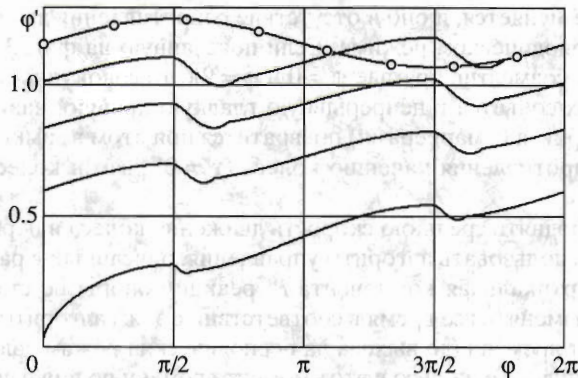
При численных исследованиях процесса качения колеса с законом управления (4.1) получаются результаты, близкие к тем, которые описываются приведенными выше аналитическими соотношениями. Эти исследования показывают, что существует периодический режим; скорость ϕ' колеса в момент, когда груз находится внизу, близка к вычисляемой при помощи формулы (5.7); периодический режим устойчив, но переходный процесс сходится к нему медленно. Описываемые ниже результаты численных исследований с законом управления (3.12) оказываются аналогичными, с качественной точки зрения, а с количественной – близкими.

6. Численные исследования. На фиг. 2 показан процесс разгона колеса (при $\gamma = 0$, $\chi = 0$) во времени (безразмерном), начинающийся из состояния покоя. Полость, в которой находится груз, в начальный момент времени горизонтальна, а груз располагается (покоится) в ее левом краю. Другими словами, начальные условия описываются равенствами (3.1). Параметры колеса приведены в соотношениях (5.8). Управление на участке изменения положения груза описывается формулой (3.12), в которой

$$\beta = 10/\sqrt{Rg} = 3.19, \quad \rho_0 = 0.75, \quad \rho_0 - \rho_2 = 0.9, \quad F_2 = \beta^2/2(\rho_0 - \rho_2) = 55.6$$

В остальное время в соответствии с алгоритмом, описанным в разд. 3, расстояние $\rho = \rho_0$ или $\rho = -\rho_0$.

Как видно из фиг. 2, скорость движения колеса ϕ' , будучи все время положительной, на промежутке времени $0 < \tau < 40$ возрастает, но не монотонно. Скорость возрастает мо-



Фиг. 3

нотонно тогда, когда груз находится в конце полости, и убывает в процессе перемещения груза из одного конца полости в другой, что соответствует теории, развитой в разд. 4. Начиная с момента времени $\tau = 40$ расстояние ρ , вопреки закону управления (3.12), "принудительно" принимается равным постоянной величине ρ_0 . Скорость ϕ' , начиная с этого момента времени, становится периодической функцией времени (см. фиг. 2). При этом средняя скорость движения колеса (в периодическом режиме) составляет примерно 3.6 м/с. (Если в некоторый момент времени переместить груз m в центр колеса O , то скорость его движения станет постоянной.)

В момент, когда скорость груза, расположенного внизу, мгновенно изменяется от нуля до значения $-\beta$ или β , вертикальная составляющая R_y реакции опоры принимает бесконечно большое положительное значение. Это значение, конечно, невозможно показать на графике. На фиг. 2 изменение реакции R_y показано (в безразмерных единицах) в пределах от 0 до 20. Значение реакции R_y , минимальное в процессе поворота колеса на угол π , достигается во время торможения груза, когда он близок к верхнему концу полости. Это значение, как следует из фиг. 2, убывает в процессе разгона колеса. Минимальное значение вертикальной компоненты R_y реакции опоры в процессе разгона колеса, показанного на фиг. 2, достигается на последнем участке торможения груза и составляет 34.7 Н при весе всего механизма, равном 107.9 Н. При $40 < \tau < 50$, когда $\rho = \rho_0$, значение реакции R_y колеблется около значения, равного весу механизма. Для графика изменения реакции R_y во времени характерно наличие направленных вверх "пиков", возникающих во время разгона груза, и "впадин", возникающих во время торможения груза; эти впадины становятся глубже с ростом скорости колеса; между пиками и впадинами значения реакции R_y близки к весу механизма.

Вычислив модуль отношения горизонтальной (2.6) и вертикальной (2.7) компонент реакции опоры, можно найти значение коэффициента трения колеса о поверхность, при котором оно может катиться без проскальзывания. Для режима движения, показанного на фиг. 2, это значение равно 0.63. Такой коэффициент трения требуется на том же последнем участке торможения груза.

На фиг. 3 показан тот же, что и на фиг. 2, процесс разгона колеса, но в плоскости переменных ϕ, ϕ' . Здесь приведен в диапазоне $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ряд расположенных одна над другой кривых. На первой кривой, самой нижней, угол ϕ действительно изменяется от 0 до 2π . Вторая кривая, расположенная над первой, на самом деле отвечает изменению угла ϕ от 2π до 4π . Следующая, третья, кривая отвечает изменению угла ϕ от 4π до 6π и т.д. На n -й кривой угол ϕ в действительности изменяется от $2\pi(n-1)$ до $2\pi n$. Самая верхняя на фиг. 3 кривая, с маркерами, соответствует управлению $\rho = \rho_0$. При этом управлении

дисбаланс колеса не меняется, и оно в отсутствие сопротивления движению катится без торможения – в периодическом режиме. Если показанную на фиг. 3 полосу $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ свернуть в цилиндр, совместив прямые $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, то совокупность приведенных на этой фигуре кривых сольется в непрерывную гладкую кривую, навивающуюся на цилиндр. Последняя кривая (с маркерами) превратится при этом в замкнутую кривую.

При наличии сопротивления качению колеса ($\chi \neq 0$) разгон колеса происходит, конечно, медленнее.

Для того чтобы поднять среднюю скорость движения колеса в периодическом режиме, нужно дольше использовать алгоритм управления, описанный в разд. 3, однако лишь до тех пор, пока вертикальная компонента R_y реакции опоры не станет равной нулю. Если расстояние ρ изменять все время в соответствии с этим алгоритмом управления, то в некоторый момент времени (до выхода на периодический режим движения) реакция R_y опоры обратится в нуль, т.е. колесо в этот момент времени подпрыгнет.

Если считать, что колесо каким-то образом все время удерживается на опоре, то при описанном в разд. 3 алгоритме управления движение медленно выходит на периодический режим, что соответствует полученным в разд. 4 и 5 результатам.

Построенный закон управления таков, что груз начинает перемещаться вверх по полости в момент, когда он находится внизу – при условиях (3.4), (3.10), (3.11). Если начинать перемещение груза несколько раньше, то, как показывают численные исследования, процесс существенно не меняется. Несколько увеличивается лишь минимальное значение вертикальной составляющей реакции опоры.

Численные исследования показывают, что максимальный (критический) угол γ , при котором колесо, стартуя из состояния покоя, может при построенном алгоритме управления подниматься вверх по наклонной плоскости, составляет примерно 2.1° . (Неравенство (3.15) при значениях (5.8) параметров принимает вид $\gamma < 3.91^\circ$.) Если же начальная скорость колеса не равна нулю, то, как показывают численные исследования, оно может преодолеть и более крутой подъем. С ростом угла наклона γ скорость колеса в стационарном режиме, естественно, уменьшается; при углах γ , близких к критическому, вертикальная составляющая реакции опоры остается положительной в течение всего процесса движения, в том числе и на периодическом режиме.

7. Заключение. Построен алгоритм управления положением груза, при котором колесо, будучи вначале в состоянии покоя, разгоняется и катится с постоянной в среднем скоростью. Если скорость качения колеса не ограничивать, то при этом алгоритме управления вертикальная составляющая реакции опоры в некоторый момент времени обращается в нуль и колесо подпрыгивает.

Движение колеса происходит неравномерно. Уменьшив диапазон перемещения груза внутри колеса, можно сделать это движение более равномерным. При этом, однако, увеличится время разгона колеса из состояния покоя. При наличии внутри колеса двух или более полостей с грузом в каждой можно также обеспечить более равномерное движение колеса, используя описанный выше алгоритм управления для каждого из грузов.

Построенный алгоритм управления позволяет организовать движение колеса вверх по наклонной плоскости.

Для того чтобы затормозить катящееся колесо, перемещение груза должно происходить противоположным образом по отношению к описанному выше способу его перемещения, когда требуется разогнать колесо. В момент времени, когда груз оказывается наверху (наиболее удален от опоры), его нужно начать перемещать в противоположный конец полости, который в этот момент находится внизу. Груз нужно держать в этом конце полости до тех пор, пока он при качении колеса не поднимется снова наверх, поскольку до подъема наверх груз создает момент, тормозящий колесо. После того как груз окажется наверху, его нужно снова переместить в противоположный конец полости, где он находился ранее, и т.д.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00105), в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (1835.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 4. С. 165–173.
2. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 569–583.
3. Мартыненко Ю.Г., Кобрин А.И., Ленский А.В. Декомпозиция задачи управления мобильным одноколесным роботом с невозмущаемой гиросtabilизированной платформой // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 6. С. 767–769.
4. Brown H.B., Xu Y. A single wheel gyroscopically stabilized robot // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. N.Y.: IEEE, 1996. V. 4. P. 3658–3663.
5. Yangsheng Xu, Samuel Kwok-Wai Au. Stabilization and path following of a single wheel robot // IEEE / ASME Trans. Mechatronics. 2004. V. 9. No. 2. P. 407–419.
6. Каленова В.И., Морозов В.М., Шевелева Е.Н. Устойчивость и стабилизация движения одноколесного велосипеда // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 4. С. 49–58.
7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.

Москва
e-mail: lavrov@imec.msu.ru
formal@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
15.IX.2005