

УДК 531.36:62-50

© 2006 г. Ю. Ф. Голубев

МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТА-СНЕЙКБОРДИСТА

Исследуется задача о построении движений робота-снейкбордиста, включающего снейкборд и установленный на нем маховик, способный совершать управляемое вращение относительно перекладины снейкборда. Указано программное управление осями колес для обеспечения заданной трассы движения произвольной точки перекладины. Построено управление угловым ускорением маховика снейкборда, обеспечивающее требуемый режим изменения скорости центра перекладины как на горизонтальной, так и на наклонной плоскости. Решена задача о максимальном разгоне снейкборда на траектории типа “восьмерка”.

Снейкборд был изобретен в 1989 г. Фишером и Маклеод-Смитом¹. Организующей частью снейкборда служит перекладина (crossbar), опирающаяся на две колесные пары по ее бокам (фиг. 1). Колесные пары могут вращаться относительно перекладины вокруг параллельных осей – осей колесных пар, жестко ориентированных относительно перекладины и перпендикулярных к осям вращения колес. На осях колесных пар монтируются платформы для постановки ног, параллельные колесным осям.

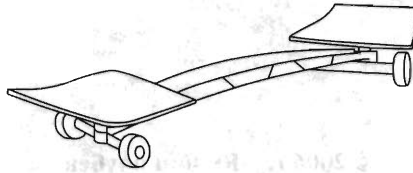
Благодаря своей конструкции и специальному согласованному действию ног и корпуса спортсмена снейкборд в отличие от скейтборда, совершая волнообразное движение около выбранного спортсменом направления, позволяет набирать скорость без отталкивания ногой от земли, даже если перемещение происходит вверх по склону. Со временем выработался агрессивный стиль катания на снейкборде, сопровождаемый разнообразными трюками, и снейкбординг превратился в экстремальный вид спорта. С 1994 г. ежегодно (за исключением 1998 г.) проводятся чемпионаты мира по снейкбордингу.

При отсутствии проскальзывания колес относительно опорной поверхности снейкборд представляет собой неголономную механическую систему с 9 степенями свободы и 4 неинтегрируемыми связями. Если возникает проскальзывание колес, то система усложняется, так как для замыкания математической модели движения необходимо иметь информацию об усилиях, возникающих в пятне контакта колеса с опорой. Когда спортсмен, стоя на снейкборде, совершает относительноные движения, система становится еще более сложной.

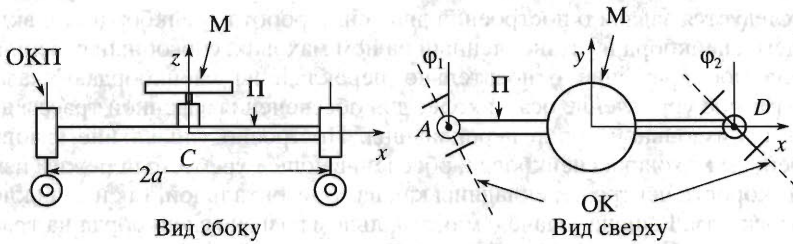
Представляется естественным исследование динамики снейкборда с помощью методов неголономной механики [1, 2]. Вместе с тем очевидно, что по существу все степени свободы системы испытывают жесткое сервоуправление [3, 4] со стороны спортсмена, а поле скоростей перекладины оказывается вращательным вокруг точки пересечения осей колес и подчиняется теореме о кинетическом моменте относительно этой точки. С механической точки зрения система перекладина – спортсмен аналогична системе тел, совершающей плоскопараллельное движение, причем перекладина способна вращаться под управляемым воздействием маховика (тела спортсмена) вокруг некоторого центра на опорной плоскости. Положение центра вращения, в свою очередь, также может волевым образом изменяться. В сходной задаче об управлении движением физического маятника с помощью маховика положение центра вращения было зафиксировано как на маятнике, так и в пространстве [5]. Был исследован [6] пример более сложной системы, управляемой с помощью маховика.

В предлагаемой работе сервосвязи, необходимые для управления снейкбордом, формируются с помощью основных теорем механики системы. Развиваемый подход дает возможность сознательно изменять как величину, так и направление скорости движения и конструировать

¹ www.snakeboarder.com



Фиг. 1



Фиг. 2

желаемую траекторию любой заданной точки перекладки, когда все четыре колеса скейборда касаются опоры. Свойства движения такой системы служат выразительной иллюстрацией понятия мгновенного центра скоростей, а также теоремы о кинетическом моменте относительно подвижной точки. Безопорные фазы движения не рассматриваются.

1. Постановка задачи. Исследуется механическая система, состоящая из скейборда (фиг. 2), дополненного маховиком (М), вращающимся вокруг оси, параллельной осям колесных пар (ОКП) и проходящей через середину перекладки (П). Предполагается наличие приводов, закрепленных на перекладке и предназначенных для управления вращением маховика и изменения направления осей колес (ОК) соответственно.

Пусть скейборд касается всеми четырьмя колесами опорной плоскости. С перекладкой скейборда жестко свяжем подвижную систему координат S_{xyz} . Начало S поместим в середину перекладки, ось Sx направим вдоль нее, ось Sz – перпендикулярно опорной плоскости в ту сторону от нее, где находится скейборд, ось Sy – перпендикулярно перекладке и оси Sz так, чтобы вся система координат была правой. Предположим, что перекладка имеет длину $2a$, левая ось колес прикреплена к ней в точке $A = (-a, 0, 0)$ и составляет с ней угол $\varphi_1 + \pi/2$, правая ось прикреплена к перекладке в точке $D = (a, 0, 0)$ и составляет с ней угол $\varphi_2 + \pi/2$. Примем, что колеса не могут проскальзывать в направлении, перпендикулярном плоскости колеса. Тогда скорости точек шарнирного соединения перекладки с осями колесных пар будут направлены вдоль опорной плоскости перпендикулярно осям колес. Требуется найти законы автономного управления осями колес и маховиком, обеспечивающие наперед заданное движение перекладки из состояния покоя.

2. Кинематика скейборда. Мгновенный центр скоростей перекладки лежит на пересечении осей колес и в осях S_{xyz} имеет координаты

$$x_v = -a \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad y_v = 2a \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (2.1)$$

При $\varphi_2 - \varphi_1 \rightarrow \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) мгновенный центр скоростей устремляется к бесконечности. Если координаты мгновенного центра скоростей заданы, то углы поворота осей колес могут быть найдены из равенств

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{a + x_v}{y_v}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a - x_v}{y_v} \quad (2.2)$$

Пусть $O\xi\eta\zeta$ – абсолютная правая система координат, для которой ось $O\xi$ сонаправлена с осью Cz . В ней (ξ_c, η_c, ζ_c) – координаты точки C . Ось Cx составляет с осью $O\xi$ угол ψ . Найдем абсолютные координаты мгновенного центра скоростей

$$\xi_v = \xi_c + x_v \cos \psi - y_v \sin \psi, \quad \eta_v = \eta_c + x_v \sin \psi + y_v \cos \psi \quad (2.3)$$

Поле скоростей твердого тела устроено так [7], что абсолютная скорость мгновенного центра скоростей как части перекладины равна нулю. Поэтому для скорости центра перекладины имеем

$$\dot{\xi}_c = \dot{\psi}(x_v \sin \psi + y_v \cos \psi), \quad \dot{\eta}_c = \dot{\psi}(-x_v \cos \psi + y_v \sin \psi) \quad (2.4)$$

а для произвольной точки (x, y, z) в осях $Cxyz$, жестко связанных с перекладиной, абсолютная скорость дается формулами

$$\dot{\xi} = -\dot{\psi}[(x - x_v) \sin \psi + (y - y_v) \cos \psi], \quad \dot{\eta} = \dot{\psi}[(x - x_v) \cos \psi - (y - y_v) \sin \psi] \quad (2.5)$$

При фиксированных углах φ_1 и φ_2 как относительное положение мгновенного центра скоростей в осях $Cxyz$, так и абсолютное его положение в осях $O\xi\eta\zeta$ сохраняются. Если же углы φ_1 и φ_2 зависят от времени, то мгновенный центр скоростей будет смещаться и опишет в осях $Cxyz$ подвижную, а в осях $O\xi\eta\zeta$ – неподвижную центроиды. При этом скорость движения мгновенного центра скоростей по подвижной центроиде выразится формулами

$$\dot{x}_v = \frac{a(\dot{\varphi}_2 \sin 2\varphi_1 - \dot{\varphi}_1 \sin 2\varphi_2)}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \dot{y}_v = \frac{2a(\dot{\varphi}_1 \cos^2 \varphi_2 - \dot{\varphi}_2 \cos^2 \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

а компоненты скорости движения мгновенного центра скоростей по неподвижной центроиде будут иметь вид

$$\dot{\xi}_v = \dot{x}_v \cos \psi - \dot{y}_v \sin \psi, \quad \dot{\eta}_v = \dot{x}_v \sin \psi + \dot{y}_v \cos \psi \quad (2.6)$$

Если известны скорости \dot{x}_v, \dot{y}_v , то угловые скорости поворота осей колес вычисляются по формулам

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{(a + x_v)\dot{y}_v - y_v\dot{x}_v}{(a + x_v)^2 + y_v^2}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{(a - x_v)\dot{y}_v + y_v\dot{x}_v}{(a - x_v)^2 + y_v^2} \quad (2.7)$$

Задавая центроиды, можно формировать требуемое движение какой-нибудь точки $B = (x, 0, 0)$ перекладины. При $x = 0$ точка B совпадает с точкой C , при $x = \pm a$ точка B совпадает с одним из концов перекладины.

2.1. Потребуем, например, чтобы точка B двигалась параллельно оси $O\xi$. В соответствии с формулами (2.5) это означает, что должно быть

$$\dot{\eta} = \dot{\psi}[(x - x_v) \cos \psi + y_v \sin \psi] = 0$$

Предположив, что $\dot{\psi} \neq 0$ (движение происходит), отсюда найдем

$$(x - x_v) \cos \psi + y_v \sin \psi = 0 \quad (2.8)$$

Это равенство еще не определяет однозначно неподвижную центроиду.

В частности, можно дополнительно потребовать, чтобы перекаладина двигалась поступательно. Обозначим

$$\rho_v^2 = x_v^2 + y_v^2 \quad (2.9)$$

квадрат расстояния от точки C до мгновенного центра скоростей. Поступательное движение перекаладины со скоростью v получается при $\rho_v \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow 0$, причем $\dot{\psi} \rho_v = v$. Тогда из равенств (2.8) и (2.2) следует

$$\lim \frac{x_v}{y_v} = \operatorname{tg} \psi, \quad \lim \operatorname{tg} \varphi_1 = \lim \operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{tg} \psi \quad \text{при} \quad \rho_v \rightarrow \infty$$

Иначе говоря, оси колес должны быть параллельны оси $O\eta$.

Другое дополнительное условие можно взять, задав, например, расстояние $\rho_v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$ от точки C до мгновенного центра скоростей. Тогда вместе с равенством (2.8) получим

$$x_v = \frac{x \pm \operatorname{tg} \psi \sqrt{\rho_v^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) - x^2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}, \quad y_v = \frac{-x \operatorname{tg} \psi \pm \sqrt{\rho_v^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) - x^2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} \quad (2.10)$$

Эти выражения имеют смысл при любом значении ψ , когда $\rho_v^2 \geq x^2$. Уравнение подвижной центроиды дается соотношением (2.9), и при постоянном ρ_v ему отвечает окружность. Неподвижная центроида определена равенствами

$$\xi_v = \xi_c + x \cos \psi, \quad \eta_v = \eta_c \pm \sqrt{\rho_v^2 - x^2 \cos^2 \psi}$$

При этом точка B будет двигаться прямолинейно вдоль оси $O\xi$ со скоростью

$$\dot{\xi}_b = -\dot{\psi}(x \sin \psi + \eta_c - \eta_v)$$

Приведенные формулы для прямолинейного движения точки B существенно упрощаются, когда $x = 0$, т.е. когда точка B совпадает с точкой C . Тогда при соответствующем выборе знаков получим

$$x_v = \pm \rho_v \sin \psi, \quad y_v = \pm \rho_v \cos \psi, \quad \xi_v = \xi_c, \quad \eta_v = \eta_c \pm \rho_v, \quad \dot{\xi}_c = \pm \dot{\psi} \rho_v \quad (2.11)$$

Выберем в правых частях формул (2.11) знак плюс. Тогда при постоянном ρ_v неподвижная центроида – прямая, параллельная оси $O\xi$. Точка C отстоит от нее на расстояние ρ_v ближе к началу координат, абсолютная ордината точки C остается постоянной, и при положительном значении ψ абсолютная абсцисса точки C возрастает.

Аналогично, если в правых частях формул (11) взять знак минус, то при постоянном ρ_v неподвижная центроида – по-прежнему прямая, параллельная оси $O\xi$. Однако в этом случае она отстоит от точки C ближе к началу координат O на расстояние ρ_v . Абсолютная ордината точки C остается постоянной, и при положительном значении ψ абсолютная абсцисса точки C убывает.

При постоянном ρ_v скорость точки C пропорциональна $\dot{\psi}$. Для того чтобы направление движения точки C не менялось при изменении знака $\dot{\psi}$, в правых частях формул (2.11) в моменты времени, когда $\dot{\psi} = 0$, следует менять знак на противоположный. Дви-

жение точки C будет происходить строго в одну сторону, если операцию смены знака выполнять почти мгновенно. Однако в любом случае движение точки C будет происходить с остановками при $\dot{\psi} = 0$.

Избежать остановок точки C при $\dot{\psi} = 0$ возможно. Для этого необходимо в соответствующие событию $\dot{\psi} = 0$ моменты времени устремлять мгновенный центр скоростей к бесконечности. Например, с учетом того, что $x = 0$, можно принять

$$\rho_v = 2a/(k\dot{\psi}) \tag{2.12}$$

где k – постоянный коэффициент, имеющий размерность времени. Таким образом, при любом законе $\psi = \psi(t)$, определяющем угловое движение перекладки, где t – время и существование производной $\dot{\psi}$ предполагается, точка C будет двигаться прямолинейно параллельно оси $O\xi$ с постоянной скоростью, направление которой зависит от знака коэффициента k , причем чем меньше $|k|$, тем больше скорость точки C .

2.2. Рассмотрим движение, при котором точка A перемещается строго вдоль оси $O\xi$, а точка D – строго вдоль оси $O\eta$. Тогда точка C будет вынуждена двигаться по дуге окружности радиуса a с центром в точке O . При этом

$$\varphi_1 = -\psi, \quad \varphi_2 = \pi/2 - \psi, \quad x_v = -a \cos 2\psi, \quad y_v = a \sin 2\psi$$

Как и следовало ожидать, подвижная центроида – окружность постоянного радиуса $\rho_v = a$ с центром в точке C . Далее

$$\xi_c = -a \cos \psi, \quad \eta_c = a \sin \psi, \quad \xi_v = -2a \cos \psi, \quad \eta_v = 2a \sin \psi$$

и неподвижная центроида – окружность постоянного радиуса $2a$ с центром в точке O . Скорость точки C выражается формулами

$$\dot{\xi}_c = \dot{\psi} a \sin \psi, \quad \dot{\eta}_c = \dot{\psi} a \cos \psi$$

При $\dot{\psi} > 0$ точка C движется по ходу часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси $O\xi$.

2.3. Исследуем вариант движения, при котором перекладка направлена по касательной к траектории произвольной ее точки. Снова возьмем на оси Sx некоторую точку $B = (x, 0, 0)$. Для простоты примем

$$(a + x) \operatorname{tg} \varphi_2 = (x - a) \operatorname{tg} \varphi_1 = (a^2 - x^2)/d \tag{2.13}$$

где d имеет размерность длины. Тогда из соотношений (2.1) и (2.5) получим

$$x_v = x, \quad y_v = d, \quad \rho_v = \sqrt{x^2 + d^2}, \quad \xi_b = \dot{\psi} d \cos \psi, \quad \eta_b = \dot{\psi} d \sin \psi \tag{2.14}$$

Другими словами, скорость $v_b = \sqrt{\dot{\xi}_b^2 + \dot{\eta}_b^2}$ точки B оказывается пропорциональной d , а угол наклона касательной к траектории точки B совпадает с наклоном перекладки к оси O :

$$v_b = |\dot{\psi} d|, \quad d\eta_b/d\xi_b = \operatorname{tg} \psi$$

Если величина d выбрана постоянной, то мгновенный центр скоростей – неподвижная точка в осях Sxy , а значит (см. формулы (2.6)), и в осях $O\xi\eta$. Имеем

$$\xi_b(t) - \xi_b(t_0) = d(\sin \psi - \sin \psi_0), \quad \eta_b(t) - \eta_b(t_0) = -d(\cos \psi - \cos \psi_0)$$

где ψ_0 – начальное значение угла ψ . Движение точки B происходит по окружности радиуса d с центром в точке с координатами

$$\xi = \xi_b(t_0) - d \sin \psi_0, \quad \eta = \eta_b(t_0) + d \cos \psi_0$$

которая совпадает с выбранным в данном случае мгновенным центром скоростей, а перекладина ориентирована по касательной к окружности в этой точке.

В случае, когда d меняется, подвижная centroида – прямая, проходящая через точку B перпендикулярно перекладине. Для движения точки B по произвольной кривой с постоянной скоростью примем

$$d = \frac{a}{\kappa \dot{\psi}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{a+x}{a} \kappa \dot{\psi}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a-x}{a} \kappa \dot{\psi} \quad (2.15)$$

Тогда неподвижная centroида совпадет с геометрическим местом центров кривизны заданной траектории движения точки B .

2.4. При использовании формул (2.15) обеспечить прямолинейное движение точки B невозможно. Однако, если в процессе движения будет выполнено неравенство $-\pi/2 < \psi < \pi/2$, то движение будет колебательным и в среднем будет происходить вдоль оси $O\xi$ (отсюда и название “snakeboard”). Требуемую траекторию движения точки B вдоль оси $O\xi$ можно задать посредством дважды непрерывно дифференцируемой функции $\eta_b = \eta_b(\xi_b)$. Тогда будем иметь $\cos \psi > 0$ и

$$\operatorname{tg} \psi = \eta'_b, \quad \frac{\dot{\psi}}{\cos^2 \psi} = \eta''_b \xi_b, \quad \dot{\psi} = \frac{a \eta''_b}{\kappa (1 + \eta_b'^2)^{3/2}}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ξ_b . Например, можно взять зависимость

$$\eta_b = \alpha \sin(\omega[\xi - \xi_b(t_0)]) + \eta_b(t_0)$$

При малых значениях коэффициентов α и ω такая траектория будет незначительно отличаться от прямой, параллельной оси $O\xi$.

Траекторию точки B достаточно произвольной формы на плоскости можно задать параметрически

$$\xi_b = \xi_b(p), \quad \eta_b = \eta_b(p) \quad (2.16)$$

где p – параметр траектории. Чтобы определить соответствующее такому движению значение $\dot{\psi}$, воспользуемся формулами (2.14), (2.15). Тогда

$$\xi'_b \dot{p} = \frac{a}{\kappa} \cos \psi, \quad \eta'_b \dot{p} = \frac{a}{\kappa} \sin \psi, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\eta'_b}{\xi'_b}, \quad \dot{p} = \frac{a}{\kappa \sqrt{\xi_b'^2 + \eta_b'^2}}, \quad \dot{\psi} = \frac{a(\eta_b'' \xi_b' - \eta_b' \xi_b'')}{\kappa(\xi_b'^2 + \eta_b'^2)^{3/2}}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по p . Для возможности выполнения требуемого движения выбранным способом (2.15) необходимо соответствие начальных условий, и в частности должно быть

$$\operatorname{tg} \psi(t_0) = \eta'_b(p(t_0)) / \xi'_b(p(t_0))$$

Пусть перекладина уже ориентирована по отношению к оси $O\xi$ и находится под углом ψ_0 к ней. Пусть также стандартные уравнения кривой точки B заданы в некоторой прямоугольной системе координат $O'\xi\tilde{\eta}$ уравнениями

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(p), \quad \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(p)$$

Преобразование координат

$$\xi = \xi_0 + \tilde{\xi} \cos \alpha - \tilde{\eta} \sin \alpha, \quad \eta = \eta_0 + \tilde{\xi} \sin \alpha + \tilde{\eta} \cos \alpha \quad (2.17)$$

для которого при $p = 0$ выполнены равенства

$$\xi_b(t_0) = \xi_0 + \tilde{\xi}(0) \cos \alpha - \tilde{\eta}(0) \sin \alpha, \quad \eta_b(t_0) = \eta_0 + \tilde{\xi}(0) \sin \alpha + \tilde{\eta}(0) \cos \alpha$$

$$\cos \psi_0 = \frac{\tilde{\xi}'(0) \cos \alpha - \tilde{\eta}'(0) \sin \alpha}{\sqrt{\tilde{\xi}'^2(0) + \tilde{\eta}'^2(0)}}, \quad \sin \psi_0 = \frac{\tilde{\xi}'(0) \sin \alpha + \tilde{\eta}'(0) \cos \alpha}{\sqrt{\tilde{\xi}'^2(0) + \tilde{\eta}'^2(0)}}$$

однозначно определяет зависимость (2.16), согласованную по начальным условиям с заданным положением перекладки. Например, можно взять

$$\text{астроиду } \tilde{\xi}_b = r \cos^3 p, \quad \tilde{\eta}_b = r \sin^3 p$$

$$\text{циклоиду } \tilde{\xi}_b = r(p - \sin p), \quad \tilde{\eta}_b = r(1 - \cos p)$$

$$\text{восьмерку } \tilde{\xi}_b = r \cos p, \quad \tilde{\eta}_b = r \sin 2p$$

$$n\text{-розу: } \tilde{\xi}_b = r \sin(6-n)p \cos p, \quad \tilde{\eta}_b = r \sin(6-n)p \sin p, \quad n = 3, 4$$

и другие красивые кривые.

3. Уравнение кинетического момента. Учтем, что снейкборд снабжен маховиком, ось которого проходит через точку C параллельно направлению осей вращения колесных пар (фиг. 2). Маховик приводится во вращение двигателем, установленным на перекладке. Угол поворота маховика относительно перекладки обозначим ϑ . Аналогично, колесные пары приводятся во вращение соответствующими двигателями, также расположенными на перекладке. Будем считать, что сопротивление качению колес по плоскости отсутствует, а система обладает свойством массовой симметрии относительно точки C . Это значит, что центры масс перекладки и маховика расположены в точке C , а массы и моменты инерции колесных пар одинаковы. Пусть ось $O\xi$ составляет с вертикалью угол ϑ , так что сила тяжести системы, приложенная к точке C , имеет в осях $O\xi\eta\zeta$ вид

$$\mathbf{P} = -Mg(0, \sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

где M – масса всей системы, g – ускорение силы тяжести. При отсутствии продольного сопротивления качению реакции, параллельные опорной плоскости, препятствуя смещению колес вдоль их осей, направлены точно в мгновенный центр скоростей перекладки. Поэтому учитывая соотношения (2.3), проекцию уравнения изменения кинетического момента снейкборда вместе с маховиком относительно мгновенного центра скоростей перекладки на ось $O\xi$ запишем в виде [7]

$$\frac{dK}{dt} - M\dot{\psi}(x_v \dot{x}_v + y_v \dot{y}_v) = (x_v \cos \psi - y_v \sin \psi) Mg \sin \vartheta \quad (3.1)$$

Здесь K – кинетический момент всей системы относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей параллельно оси $O\xi$, выражение в скобках в левой части равенства (3.1) есть проекция на ось $O\xi$ скорости мгновенного центра скоростей, векторно умноженной на скорость центра масс C . По теореме Кёнига [7] найдем

$$K = \dot{\psi}(M\rho_v^2 + b) + J_g \dot{\varphi} + J_w(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \quad (3.2)$$

где

$$M = m + m_g + 2m_w, \quad b = 2m_w a^2 + J + J_g + 2J_w$$

m – масса перекладки, m_g – масса маховика, m_w – масса колесной пары, J – момент инерции перекладки вместе с жестко закрепленными на ней частями колесных систем относительно оси $C\xi$, J_g – момент инерции маховика относительно той же оси, J_w – момент инерции колесной пары относительно ее оси. Нетрудно заметить, что

$$x_v \dot{x}_v + y_v \dot{y}_v = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_v^2}{2} \right)$$

Из формул (2.1) следует, что ρ_v^2 – функция от углов φ_1 и φ_2 , реализуемых соответствующими приводами. При выборе сервосвязей [3] в виде зависимостей величины ρ_v как функции от углов и угловых скоростей перекладки и маховика уравнение (3.1) определит взаимное влияние угловых ускорений маховика и перекладки. Задавая в этом случае требуемое движение перекладки, можно будет получить закон изменения углового ускорения маховика, реализующего это движение.

4. Программные управления. Отвлекаясь в этом разделе от влияния переходных процессов, возникающих при реализации сервосвязей [3], рассмотрим несколько примеров.

4.1. *Сервосвязь вида* $\rho_v = \rho_v(\psi)$. Положим² $\vartheta = 0$ (опорная плоскость горизонтальна). Уравнение (3.1) можно привести к виду

$$\frac{d}{dt} \left(K - \frac{M\dot{\psi}}{2} \rho_v^2 \right) + \frac{M\dot{\psi}}{2} \rho_v^2 = 0$$

Отсюда следует, что если величина ρ_v зависит только от ψ , то уравнение кинетического момента допускает первый интеграл

$$K - \frac{M\dot{\psi}}{2} \rho_v^2 + F(\psi) = \sigma, \quad F(\psi) = \frac{M}{2} \int \rho_v^2(\psi) d\psi \quad (4.1)$$

где σ – постоянная интегрирования.

4.1a. Пусть задан закон $\psi = \psi_s(t)$ требуемого углового движения перекладки и для него выполнены равенства (2.8) и (2.12), означающие, что точка C движется прямолинейно вдоль оси $O\xi$ с постоянной скоростью. Тогда

$$\rho_v^2 = \frac{4a^2}{\kappa^2 \dot{\psi}_s^2}, \quad F(\psi_s) = \frac{2Ma^2}{\kappa^2 \dot{\psi}_s} \quad (4.2)$$

Интеграл кинетического момента для $\psi \equiv \psi_s$ принимает вид

$$b\dot{\psi}_s + J_g \dot{\phi}_s + J_w(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) = \sigma \quad (4.3)$$

Этот интеграл получен в предположении, что, как следует из соотношений (2.2), (2.12), углы колесных пар удовлетворяют равенствам

$$\operatorname{tg} \phi_{js} = (-1)^j \frac{\kappa \dot{\psi}_s}{2a \cos \psi_s} - \operatorname{tg} \psi_s, \quad j = 1, 2 \quad (4.4)$$

² Голубев Ю.Ф. Построение движений робота-снейкбордиста. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 65. М.: Ин-т прикл. математики, 2004. 23 с.

Совокупность соотношений (4.3), (4.4) следует рассматривать как набор сервосвязей, обеспечивающих заданное с помощью программной функции $\psi = \psi_s(t)$ движение переключателя при условии, что в начальный момент времени сервосвязи удовлетворяются. Поскольку в реальности начальные условия могут оказаться произвольными, необходимо за счет управления движением маховика и колесных пар обеспечить соотношения [3]

$$\psi \rightarrow \psi_s, \quad \phi \rightarrow \phi_s, \quad \phi_j \rightarrow \phi_{js} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

Здесь и всюду далее $j = 1, 2$.

При учете того, что функция $\psi_s(t)$ считается заданной и известной, соотношения (4.5) определяют геометрические сервосвязи. Чтобы получить соответствующие им дифференциальные сервосвязи, требуется найти

$$\dot{\phi}_{js} = (-1)^j \frac{q_j \cos^2 \phi_{js}}{\cos^2 \psi_s}, \quad q_j = \frac{\kappa}{2a} (\ddot{\psi}_s \cos \psi_s + \dot{\psi}_s^2 \sin \psi_s) + (-1)^{j+1} \dot{\psi}_s \quad (4.6)$$

Для построения аккуратного переходного процесса требуются также вторые производные от функций (4.6):

$$\ddot{\phi}_{js} = -2\dot{\phi}_{js}^2 \operatorname{tg} \phi_{js} + (-1)^j \frac{\cos^2 \phi_{js}}{\cos^3 \psi_s} (\dot{q}_j \cos \psi_s + 2q_j \dot{\psi}_s \sin \psi_s) \quad (4.7)$$

$$\dot{q}_j = \frac{\kappa}{2a} [(\ddot{\psi}_s + \dot{\psi}_s^3) \cos \psi_s + \ddot{\psi}_s \dot{\psi}_s \sin \psi_s] + (-1)^{j+1} \ddot{\psi}_s$$

Кроме того, заметим, что вторую производную от связи (4.3) можно с учетом соотношений (4.2) представить в эквивалентном виде

$$\frac{d}{dt} [\dot{\psi}_s (M\rho_v^2 + b) + J_g \dot{\phi}_s + J_w (\dot{\phi}_{1s} + \dot{\phi}_{2s})] - \frac{M}{2} \dot{\psi}_s \frac{d\rho_v^2}{dt} = 0 \quad (4.8)$$

4.1б. Предположим, что задан закон $\psi = \psi_s(t)$ углового движения переключателя и для него выполнены равенства (2.15). В этом случае

$$\rho_v^2 = x^2 + \frac{a^2}{\kappa^2 \dot{\psi}_s^2}, \quad F(\dot{\psi}_s) = \frac{M}{2} \left(x^2 \dot{\psi}_s - \frac{a^2}{\kappa^2 \dot{\psi}_s} \right)$$

Интеграл кинетического момента (4.1) принимает вид

$$(Mx^2 + b) \dot{\psi}_s + J_g \dot{\phi}_s + J_w (\dot{\phi}_{1s} + \dot{\phi}_{2s}) = \sigma \quad (4.9)$$

а углы ϕ_{1s} и ϕ_{2s} определены формулами

$$\operatorname{tg} \phi_{js} = \kappa_j \dot{\psi}_s, \quad \kappa_j = \kappa [(-1)^j - x/a] \quad (4.10)$$

Дифференцирование сервосвязей (4.10) приводит к равенствам

$$\dot{\phi}_{js} = \kappa_j \dot{\psi}_s \cos^2 \phi_{js}, \quad \ddot{\phi}_{js} = \kappa_j (\ddot{\psi}_s \cos^2 \phi_{js} - \dot{\psi}_s \dot{\phi}_{js} \sin 2\phi_{js}) \quad (4.11)$$

Производную от уравнения сервосвязи (4.9) можно привести к виду (4.8).

Видим, что как в случае 4.1а, так и в случае 4.1б, для построения переходного процесса управлением колесных пар требуется существование не только вторых, но и третьих производных по времени от программной функции $\psi_s(t)$.

4.2. Сервосвязь вида $\rho_v = \rho_v(\varphi, \dot{\varphi})$. Пусть по-прежнему $\vartheta = 0$. Уравнение кинетического момента (3.1) можно привести к виду

$$\ddot{\psi}(M\rho_v^2 + b) + \frac{M}{2}\dot{\psi}\frac{d}{dt}\rho_v^2 = -J_g\ddot{\varphi} - J_w(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$$

Воспользуемся тем, что левая часть этого уравнения имеет интегрирующий множитель $(\pm\sqrt{M\rho_v^2 + b})^{-1}$. Учитывая возможность отрицательных значений ρ_v , перепишем уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\rho_v\mu) = \frac{J_g\ddot{\varphi} + J_w(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)}{\rho_v\mu}, \quad \mu = \sqrt{M + b\rho_v^{-2}} \quad (4.12)$$

Степним движения колесных пар связями (2.13), где для простоты положим $x = 0$. Тогда точка B совпадает с серединой C перекладкины, причем $\rho_v = d$, так что

$$\operatorname{tg}\varphi_{js} = (-1)^j a/\rho_v, \quad \varphi_{1s} + \varphi_{2s} \equiv 0 \quad (4.13)$$

и уравнение кинетического момента для программного движения примет вид

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\rho_v\mu) = \frac{J_g\ddot{\varphi}}{\rho_v\mu} \quad (4.14)$$

4.2а. При условии $\rho_v = \rho_v(\dot{\varphi})$ уравнение (4.14) допускает первый интеграл

$$\dot{\psi}\rho_v\mu + F_1(\dot{\varphi}) = \sigma_1; \quad F_1 = J_g \int \frac{d\dot{\varphi}}{\rho_v\mu} \quad (4.15)$$

Интеграл (4.15) означает, что если функция φ периодическая, то такой же будет и скорость $v_c = \dot{\psi}\rho_v$ середины C перекладкины. Другими словами, в данном случае не будет происходить векового роста скорости точки C . Например, пусть $\rho_v = \kappa\dot{\varphi}^{-1}$. Тогда

$$F_1 = 2J_g(\kappa b)^{-1}\sqrt{M + b\kappa^{-2}\dot{\varphi}^2}$$

а интеграл (4.15) принимает вид

$$v_c = -2J_g(\kappa b)^{-1} + \sigma_1(M + b\kappa^{-2}\dot{\varphi}^2)^{-1/2}, \quad \sigma_1 = 2J_g(\kappa b)^{-1}\sqrt{M}$$

4.2б. Зададим периодический закон изменения угла φ с помощью уравнения

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad (4.16)$$

Пусть, кроме того, $\rho_v = \kappa_1\varphi^{-1}$. Тогда уравнение (4.14) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\rho_v\sqrt{M + b\rho_v^{-2}}) = J_g\kappa_1^{-1}\omega^2\varphi^2(M + b\kappa_1^{-2}\varphi^2)^{-1/2} \quad (4.17)$$

Правая часть этого уравнения неотрицательна. Поэтому при $\varphi \neq 0$ скорость $v_c = \dot{\psi}\rho_v$ будет возрастать, и, например, при $\varphi = \alpha\cos\omega(t - t_0)$ ее можно сделать неограниченно большой. Чтобы проиллюстрировать сказанное, вместо точного уравнения (4.17) рассмотрим приближенное уравнение

$$\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\rho_v\sqrt{M}) = J_g\kappa_1^{-1}\omega^2\varphi^2M^{-1/2} \quad (4.18)$$

характеризующее разгон снейкборда при малых амплитудах α . Пусть $\tau = t - t_0$. Интегрируя, найдем

$$v_c = \frac{J_g \omega^2 \alpha^2}{2\kappa_1 \sqrt{M}} \left(\tau + \frac{\sin 2\omega\tau}{2\omega} \right), \quad \psi = \frac{J_g \omega \alpha^2}{2\kappa_1^2 M} \left(\tau \sin \omega\tau - \frac{3 \cos \omega\tau + \cos^3 \omega\tau - 4}{3\omega} \right)$$

Видим, что при выбранном режиме управления осями колес происходит линейное увеличение амплитуды колебаний по углу ψ со временем, аналогичное найденному ранее [2].

4.3. Рассмотрим возможность разгона перекладки в случае, когда задана траектория ее середины C . Предположим, что $\vartheta \neq 0$. Будем предполагать, что осевая линия перекладки направлена по касательной к траектории, а управление осями колес осуществляется в соответствии с формулами (2.13), в которых примем $x = 0$.

Пусть траектория задана параметрически в виде

$$\xi = \xi(p), \quad \eta = \eta(p), \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{\xi' \eta'' - \eta' \xi''}{(\xi'^2 + \eta'^2)^{3/2}} \tag{4.19}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по p . Уравнение (3.1) при учете интегрирующего множителя (см. разд. 4.2) принимает вид

$$\frac{d(\mu v_c)}{dt} = \frac{J_g \ddot{\phi} (\xi' \eta'' - \eta' \xi'') + M g \eta' (\xi'^2 + \eta'^2) \sin \vartheta}{\mu (\xi'^2 + \eta'^2)^{3/2}} \tag{4.20}$$

Величина $\mu > 0$ ни в одной точке траектории не обращается в нуль, а для траекторий, не имеющих особенностей, она будет также и ограничена. Отсюда видно, что увеличение скорости движения на траектории достигается при

$$J_g \ddot{\phi} (\xi' \eta'' - \eta' \xi'') < -M g \eta' (\xi'^2 + \eta'^2) \sin \vartheta \tag{4.21}$$

а уменьшение скорости происходит при смене знака неравенства на противоположный. Другими словами, если $\eta' < 0$, то при $\sin \vartheta > 0$ сила тяжести разгоняет снейкборд, и для того чтобы придать ему дополнительное ускорение в случае, когда траектория поворачивает налево относительно направления касательной, угловое ускорение маховика должно быть неположительным, а когда траектория поворачивает направо – неотрицательным. Очевидно, что по абсолютной величине угловое ускорение определяется требуемой величиной прироста скорости.

Наоборот, если $\eta' > 0$, то сила тяжести тормозит снейкборд. Поэтому в соответствии с неравенством (4.21) приращение скорости будет достигаться при строго отрицательных (строго положительных) значениях углового ускорения маховика, если траектория поворачивает налево (направо).

При $\ddot{\phi} \equiv 0$ скорость движения, вообще говоря, не будет постоянной как из-за действия силы тяжести, так и из-за изменения радиуса кривизны траектории: $v = \sigma/\mu$, где σ – постоянная интеграла кинетического момента при $\ddot{\phi} \equiv 0$ и $\sin \vartheta = 0$.

В соответствии с равенствами (4.13) углы осей колес определены формулами

$$\text{tg } \varphi_{2s} = -\text{tg } \varphi_{1s} = \frac{a(\xi' \eta'' - \eta' \xi'')}{(\xi'^2 + \eta'^2)^{3/2}} \tag{4.22}$$

Изменение параметра p задается уравнением

$$\dot{p} = \frac{v}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} \tag{4.23}$$

Таким образом, система уравнений (4.20), (4.19), (4.23) замкнута.

Для того чтобы начать движение, достаточно привязать траекторию к положению точки C на плоскости, установить углы осей колес в соответствии с требуемым радиусом кривизны и придать маховику угловое ускорение в соответствии с неравенством (4.21). Неизбежные ошибки в управлении осями колес приведут к искажению заданной траектории движения. Однако, если не предъявлять сверхвысоких требований к качеству реализации программных движений, траектория точки C будет иметь определенное сходство с заданной даже при отсутствии точной навигационной привязки к местности. Отметим также, что при выполнении сложных траекторий постоянное увеличение скорости не требуется, так как может возникнуть проскальзывание колес относительно опорной поверхности.

4.3а. Назначим траекторию движения точки C в виде

$$\eta = \eta(p), \quad \xi = p, \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{\eta''}{(1 + \eta'^2)^{3/2}}$$

Уравнение (4.20) можно тогда представить в виде

$$\frac{d(\mu v_c)}{dt} = \frac{J_g \ddot{\phi} \eta'' + Mg \eta' (1 + \eta'^2) \sin \vartheta}{\mu (1 + \eta'^2)^{3/2}} \quad (4.24)$$

Величина μ нигде не обращается в нуль и ограничена по величине при ограниченных значениях η' и η'' . Следовательно, для обеспечения роста скорости точки C достаточно управлять движением маховика так, чтобы почти на всей заданной траектории разгона было выполнено неравенство

$$J_g \ddot{\phi} \eta'' < -Mg \eta' (1 + \eta'^2) \sin \vartheta \quad (4.25)$$

Наоборот, чтобы погасить скорость движения, достаточно за счет управления маховиком добиться выполнения противоположного неравенства. Углы осей колес определяются положением точки C на траектории

$$\operatorname{tg} \varphi_{2s} = -\operatorname{tg} \varphi_{1s} = \frac{a \eta''}{(1 + \eta'^2)^{3/2}}$$

Пусть, например, траектория точки C задана в виде

$$\eta = \eta_0 \sin[v(\xi - \xi_0)], \quad \eta' = \eta_0 v \cos[v(\xi - \xi_0)], \quad \eta'' = -v^2 \eta \quad (4.26)$$

В этом случае при $\sin \vartheta > 0$ увеличение скорости точки C будет обеспечено, если, например, в соответствии с неравенством (4.25) при $\eta < 0$ и $\eta' < 0$ (при $\eta > 0$ и $\eta' < 0$) угловое ускорение $\ddot{\phi}$ сделать неположительным (неотрицательным), так как здесь сила тяжести помогает разгонять снежкборд. На участках, где $\eta' > 0$, значения $\ddot{\phi}$ не могут обращаться в нуль в соответствии с неравенством (4.25), так как здесь сила тяжести препятствует разгону. Заметим, что особенности, связанные со знаком η' , исчезают при $\vartheta = 0$.

Далее пусть $\eta_0 v \ll 1$. Это означает, что длина волны $\lambda = 2\pi/v$ траектории значительно превосходит амплитуду ее колебаний (движение происходит почти по прямой). Тогда

$$\varphi_{2s} = -\varphi_{1s} \approx -av^2 \eta$$

Другими словами, углы, составляемые осями колес с осью Cy , должны быть малыми и пропорциональными отклонению траектории от оси $O\xi$. При $\eta > 0$ они будут, как и следовало ожидать, удовлетворять неравенству $\varphi_{2s} = -\varphi_{1s} < 0$, которое меняется на противоположное при $\eta < 0$.

Описанный метод разгона снейкборда вдоль траектории (4.26) не дает возможности начать движение с точки, где $\eta = 0$, так как в этой точке оси колес оказываются перпендикулярными перекладине, и $\dot{\varphi} = 0$. Избежать этого затруднения можно, немного сместив начало координат, а тем самым и всю программную траекторию параллельно самой себе так, чтобы в начальный момент времени движения оказалось $\eta \neq 0$. Другой способ состоит в том, чтобы в малой окрестности особой точки принять $\eta \approx (\xi - \xi_0)\eta'$. Тогда неравенство (4.25) примет вид

$$-J_g v^2 \ddot{\varphi} (\xi - \xi_0) \eta' < -Mg \eta' (1 + \eta'^2) \sin \vartheta$$

откуда можно найти требуемый знак начального углового ускорения маховика.

4.3б. Рассмотрим траекторию вида

$$\xi = \xi(p), \quad \eta = p, \quad \eta' = 1, \quad \frac{1}{\rho_v} = -\frac{\xi''}{(1 + \xi'^2)^{2/3}} \quad (4.27)$$

Такой тип траекторий может использоваться при $\sin \vartheta > 0$ для движения вверх по склону, что соответствует увеличению параметра p . Уравнение (4.20) примет вид

$$\frac{d(\mu v_c)}{dt} = \frac{J_g \dot{\varphi} \xi'' - Mg(1 + \xi'^2) \sin \vartheta}{\mu(\xi'^2 + \eta'^2)^{3/2}} \quad (4.28)$$

Таким образом, при $\sin \vartheta > 0$ для разгона снейкборда вверх требуется удовлетворить неравенству

$$J_g \dot{\varphi} \xi'' > Mg(1 + \xi'^2) \sin \vartheta \quad (4.29)$$

а для создания отрицательного ускорения снейкборда маховик можно вообще отключить и воспользоваться действием только силы тяжести.

Пусть, в частности, $\xi = \xi_0 \sin(vp)$. Тогда $\xi'' = -v^2 \xi$. Поэтому если $\xi > 0$, то для движения вверх по склону требуется отрицательное угловое ускорение маховика, удовлетворяющее неравенству (4.29), а если $\xi < 0$, то – положительное. Вместе с тем, если $\xi = 0$, то выполнить неравенство (4.29) не представляется возможным. Более того, и в малой окрестности точки, где $\xi = 0$, это неравенство нельзя будет выполнить. Поэтому снейкборд, не имея начальной скорости в окрестности такой точки, будет сползать вниз под действием силы тяжести, несмотря на действие максимально допустимого по модулю углового ускорения маховика, до тех пор, пока $|\xi|$ не достигнет достаточно большого значения, чтобы появилась возможность удовлетворить неравенство (4.29). После этого через какое-то время снейкборд начнет движение вверх, снова попадет в окрестность точки, где $\xi = 0$, под влиянием силы тяжести получит отрицательное ускорение, через какое-то время вновь начнет спускаться вниз и т.д. Другими словами, рассмотренный пример показывает, что в окрестности точки, для которой $\xi'' = 0$, возникает опасность возникновения автоколебаний снейкборда. Избежать этой неприятности можно двумя способами. Например, можно преодолевать такие точки “с разбега”, набрав достаточную скорость на участке, где $|\xi''|$ принимает большое значение. Другой способ состоит в том, чтобы составлять траекторию подъема из кривых, имеющих достаточно большое значение $|\xi''|$ с практически мгновенной переменной знака ξ'' при прохождении через точку, где $\xi = 0$. Например, это могут быть дуги окружностей с достаточно малым радиусом кривизны, согласованным с максимально допустимой абсолютной величиной углового ускорения маховика.

4.3в. В связи с отмеченной в разд. 4.3б возможностью возникновения автоколебаний снейкборда на наклонной плоскости сложные фигуры, задаваемые для выписывания

центром перекладки, удобнее выполнять на горизонтальной плоскости. В качестве примера получим расчетные формулы для движения точки C при $\vartheta = 0$ по восьмерке, заданной уравнениями

$$\xi = r \cos p, \quad \eta = r \sin 2p, \quad r = \text{const}; \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{2 \cos p (1 + 2 \sin^2 p)}{r (\sin^2 p + 4 \cos^2 2p)^{3/2}}$$

Предположим, что в начальный момент движения $p = 0$, точка C имеет координаты $\xi_c = r, \eta_c = 0$, а перекладка ориентирована перпендикулярно оси $O\xi$, так что $\psi(0) = \pi/2 + 0$. Тогда в случае разгона угловое ускорение маховика должно быть отрицательным при $\xi > 0$ и положительным при $\xi < 0$. Углы поворота осей колес определены формулами

$$\text{tg } \varphi_{2s} = -\text{tg } \varphi_{1s} = \frac{a}{\rho_v}$$

Они обращаются в нуль только в точке $\xi = \eta = 0$. Видим, что формулы для расчета управления осями колес оказываются непростыми. Проблема расчета управления осложнена еще и тем, что текущее значение параметра p может быть определено лишь численным интегрированием дифференциального уравнения (4.23).

5. Достижение максимальной скорости. Более простой вариант расчета управления можно получить, если составить восьмерку из двух окружностей одинакового радиуса r . Пусть одна из окружностей имеет центр в точке с координатами $\xi = r, \eta = 0$, а другая – в точке с координатами $\xi = -r, \eta = 0$. Эти окружности касаются в точке $\xi = \eta = 0$. Параметрические уравнения кривой в целом имеют вид

$$\xi = \begin{cases} r(1 + \cos p), & 0 \leq p \leq \pi \\ -r(1 + \cos p), & \pi < p \leq 3\pi \\ r(1 + \cos p), & 3\pi < p \leq 4\pi \end{cases}, \quad \eta = r \sin p; \quad \frac{1}{\rho_v} = \begin{cases} 1/r, & 0 \leq p \leq \pi \\ -1/r, & \pi < p \leq 3\pi \\ 1/r, & 3\pi < p \leq 4\pi \end{cases} \quad (5.1)$$

Задача управления. Точка C перекладки должна двигаться по траектории (5.1) на горизонтальной плоскости ($\vartheta = 0$). В начальный момент времени $t = t_0$ точка C имеет координаты $\xi_0 = 2r, \eta = 0$. Ось Sx ориентирована в направлении оси $O\eta$, а ось Sy направлена в сторону, противоположную оси $O\xi$. Линейная скорость точки C в начальный момент имеет величину $v_c = v_0$ и направлена вдоль оси Sx . Требуется, чтобы скорость точки C достигла максимального значения к моменту времени $t = t_f$ завершения движения по восьмерке, когда робот вновь придет в исходную позицию. При этом в момент t_f угловая скорость маховика должна быть равна нулю. Полученное к моменту t_f угловое положение маховика не имеет значения.

Решение. Ограничим допустимые значения углового ускорения маховика

$$-\varepsilon \leq \ddot{\varphi} \leq \varepsilon$$

Из-за того, что управление входит линейно [7], максимальное приращение скорости достигается в режиме релейного управления маховиком: $\ddot{\varphi} = \pm \varepsilon$. Следовательно, требование равенства нулю угловой скорости маховика в конце маневра разгона перекладки означает, что сумма интервалов времени, когда $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, должна быть равна сумме интервалов времени, когда $\ddot{\varphi} = -\varepsilon$.

Уравнения (4.20) вместе с (4.22) и (4.23), описывающие процесс управления в режиме увеличения скорости, принимают вид

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{J_g \varepsilon}{r \mu^2}, \quad \text{tg } \varphi_{2s} = -\text{tg } \varphi_{1s} = \frac{a}{\rho_v}, \quad \dot{p} = \frac{v_c}{r}, \quad \mu^2 = M + \frac{b}{r^2} \quad (5.2)$$

Таким образом, углы осей колес оказываются кусочно-постоянными и задают радиус $\rho_v = \pm r$ кривизны траектории. Центр кривизны совпадает с точками, имеющими координаты $\xi = r, \eta = 0$ и $\xi = -r, \eta = 0$ соответственно. Обозначим τ время действия ненулевого ускорения маховика на участке траектории при $0 \leq p \leq \pi$, а $\tau_1 > 0$ разность времени действия ненулевого ускорения при $\pi < p \leq 3\pi$ и времени τ . Кроме того, пусть

$$\tau^* = \frac{2v_0 r \mu^2}{J_g \varepsilon}, \quad T^2 = \frac{2\pi r^2 \mu^2}{J_g \varepsilon}$$

Время τ_1 дополнительной работы маховика при $\pi < p \leq 3\pi$ должно быть скомпенсировано при $3\pi < p \leq 4\pi$. Поскольку действие ненулевого ускорения маховика того или иного знака ограничено соответствующим участком постоянства знака радиуса кривизны траектории, значения τ и τ_1 стеснены системой неравенств

$$\tau^* \tau + \tau^2 \leq T^2, \quad (\tau^* + 2\tau)(\tau + \tau_1) + (\tau + \tau_1)^2 \leq 2T^2, \quad (\tau^* + 4\tau)\tau_1 + 3\tau_1^2 \leq T^2$$

Эту систему с учетом того, что по смыслу задачи должно быть $\tau \geq 0, \tau_1 \geq 0$, можно представить в эквивалентном виде

$$0 \leq \tau \leq \gamma_1, \quad 0 \leq \tau + \tau_1 \leq \gamma_2, \quad 0 \leq \tau_1 \leq \gamma_3 \tag{5.3}$$

где

$$\gamma_m = \frac{-[\tau^* + 2(m-1)\tau] + \sqrt{[\tau^* + 2(m-1)\tau]^2 + 4mT^2}}{2[m^2 - 3(m-1)]}, \quad m = 1, 2, 3$$

Величина $\tau + 2\tau_1$ пропорциональна величине скорости, приобретенной за время прохождения восьмерки. Нетрудно убедиться, что функции $\gamma_2(\tau)$ и $\gamma_3(\tau)$ монотонно убывают с ростом τ . Поэтому оптимальным в смысле максимума полученной скорости будет значение $\tau = 0$. Кроме того, справедливо неравенство $\gamma_2(0) > \gamma_3(0)$. Следовательно, оптимальным будет значение

$$\tau_1 = \bar{\tau}_1 = \frac{-\tau^* + \sqrt{\tau^{*2} + 12T^2}}{6} \tag{5.4}$$

Найдем максимальное значение скорости точки C в конце маневра

$$v = v_0 + \frac{2J_g \varepsilon \bar{\tau}_1}{r \mu^2}$$

Величина $\bar{\tau}_1$ определена формулой (5.4). Суммируя результат решения задачи, представим синтез оптимального закона управления маховиком

$$\ddot{\phi} = \begin{cases} 0, & 0 \leq p < \pi \\ \varepsilon, & \pi \leq p < p_1, \quad p_1 = \pi + \frac{v_0 \bar{\tau}_1}{r} + \frac{J_g \varepsilon \bar{\tau}_1^2}{2r^2 \mu^2} < 3\pi \\ 0, & p_1 \leq p < 3\pi \\ -\varepsilon, & 3\pi \leq p \leq 4\pi \end{cases} \tag{5.5}$$

Выражение (5.5) вместе с формулами (5.2) составляет оптимальный закон управления снейкбордом в целом на выбранной траектории (5.1).

Может показаться удивительным, что на первом участке траектории при $0 \leq p < \pi$ управление маховиком вообще отсутствует. Особенно это кажется странным при $v_0 = 0$. Тогда точка C вообще не может сдвинуться с места. В случае $v_0 = 0$ закон управления (5.5) следует рассматривать как предельный при $\tau \rightarrow 0$. Практически это означает, что при $v_0 = 0$ следует дать маховику угловое ускорение на очень коротком интервале времени, а затем подождать, когда точка C попадет на участок траектории с отрицательным значением кривизны. Отмеченная особенность оптимального управления связана с тем, что при увеличении скорости входа на участок с отрицательной кривизной время для управления маховиком на этом участке уменьшается. При этом суммарные времена пребывания точки C на участках с положительной и отрицательной кривизнами должны совпадать. Обсуждаемая особенность оптимального управления будет отсутствовать, если начальное положение точки C совместить с началом координат.

Обозначим k номер прохождения одного цикла движения по "восьмерке". Тогда последовательность значений величины τ_k^* , соответствующих начальным скоростям вхождения в цикл, можно представить в рекуррентном виде

$$\tau_{k+1}^* = \tau_k^* + 2\bar{\tau}_1 = \frac{2\tau_k^* + \sqrt{\tau_k^{*2} + 12T^2}}{3}$$

Полученная последовательность расходится при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что, используя полученный закон управления на последовательности прохождения циклов движения по восьмерке, можно получить любую заданную скорость движения. Препятствовать этому может лишь опасность возникновения проскальзывания колес на опорной плоскости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00065, 04-01-00105) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-1835.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lewis A.D., Ostrowski J.P., Murray R.M., Burdick J.W. Nonholonomic mechanics and locomotion: the snakeboard example // Proc. Intern. Conf. Robotic and Automation, San Diego: IEEE, 1994. P. 2391–2400.
2. Кулешов А.С. Элементарное изложение динамики снейкборда // Мобильные роботы и мехатронные системы: Материалы научной школы-конференции (Москва, 2003). М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 159–166.
3. Голубев Ю.Ф. Механические системы с сервосвязями // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 211–224.
4. Голубев Ю.Ф. Движение с постоянным модулем скорости в центральном поле тяготения // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 1052–1065.
5. Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Панин Д.А., Формальский А.М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 5. С. 14–24.
6. Голубев Ю.Ф. Робот-эквилибрист на цилиндре // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 603–619.
7. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ. 2000. 719 с.