УДК 539.374+539.214

© 2006 г. И. А. Кийко

АНИЗОТРОПИЯ В ПРОЦЕССАХ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Теория течения тонкого слоя пластического материала по поверхностям, развитая А.А. Ильюшиным, обобщается на случай анизотропного идеально пластического материала и анизотропного трения на поверхности. Основное внимание уделяется определению контактного давления; для решения этой задачи предложены два метода: вариационный и сведение к задаче Коши. Эффект анизотропии выявляется на конкретных примерах.

Теория течения тонких слоев пластического материала по поверхностям тел инструмента предложена А.А. Ильюшиным [1, 2]; в дальнейшем теория получила существенное развитие и многочисленные приложения. Все эти исследования относятся к случаю изотропного материала и изотропного трения на поверхностях контакта. Между тем в современной технологии обработки давлением проявляется заметный интерес к процессам с учетом анизотропии как свойств материала, так и контактного трения [3–6]. В предлагаемой работе теория А.А. Ильюшина обобщается на оба случая анизотропии; показано, что давление в слое в обоих случаях определяется математически тождественными уравнениями, поля скоростей, наоборот, принципиально различаются. В случае анизотропного материала степень деформации слоя полагаем малой, так что тип и величину анизотропии можно считать неизменными; в случае анизотропного трения такое ограничение не накладывается.

1. Сжатие полосы жесткими параллельными плитами. Основанием для формулировки гипотез теории [1, 2] послужил анализ циклоидального решения Прандтля [7]; приведем обобщение этого решения на случай материала, свойства которого описываются (в главных осях анизотропии) квадратичной формой Мизеса–Хилла [8]

$$F(\sigma_y-\sigma_z)^2+G(\sigma_z-\sigma_x)^2+H(\sigma_x-\sigma_y)^2+2L\tau_{yz}^2+2M\tau_{zx}^2+2N\tau_{xy}^2 = 1 \qquad (1.1)$$

Коэффициенты формы связаны известными соотношениями с пределами текучести на растяжение и сдвиг вдоль главных направлений.

Рассмотрим слой, который занимает область

$$S\colon \{|x|\le l,\ |y|\le h,\ |z|<\infty\}$$

Жесткие плоскости $x=\pm h$ движутся со скоростью $\mp v_0$ соответственно. В условиях плоской деформации

$$\sigma_z = (G\sigma_x+F\sigma_y)/(G+F),\quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

а напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} находятся из двух уравнений равновесия и условия пластичности (1.1), которое принимает вид

$$\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4(1-c)}+\tau_{xy}^2 = \tau_s^2,\quad \frac{1}{\tau_s^2} = \frac{1}{T^2} = 2N$$
$$c = 1-\frac{N(F+G)}{2(FG+GH+HF)},\quad -\infty<c<1 \qquad (1.2)$$

где τ_s – предел текучести на сдвиг в направлении оси x.

Если принять, что при условии $(h/l) \ll 1$ разность $\sigma_x - \sigma_y$ и напряжение τ_{xy} не зависят от x, то, следуя известному подходу [8], получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\tau_s \frac{l-x}{h} + 2\tau_s\sqrt{1-c}\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{h^2}} - \frac{\pi}{4}\right) \\
\sigma_y &= -\tau_s \frac{l-x}{h} - 2\tau_s\sqrt{1-c}\,\frac{\pi}{4}, \quad \tau_{xy} = -\tau_s \frac{y}{h}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Это решение вследствие симметрии записано для первого квадранта, граничное условие на краю $x = l$ выполнено интегрально.

Поле скоростей находится из условия несжимаемости и закона пластического течения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0, \quad 2(1-c)\tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right) = (\sigma_x - \sigma_y)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)$$

В предположении $\upsilon = \upsilon(y)$ при учете соотношений (1.3) отсюда получаем

$$\upsilon = -\upsilon_0 \frac{y}{h}, \quad u = \frac{\upsilon_0 x}{h} + 2\upsilon_0\sqrt{1-c}\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{h^2}} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{1.4}$$

Решение (1.3), (1.4) обладает всеми свойствами решения Прандтля; его анализ приводит к тем же известным выводам [1]. Все это дает основание принять гипотезы [1, 2] при постановке задачи о течении тонкого плоского слоя по жестким поверхностям.

2. Постановка задачи для случая анизотропного материала. Рассмотрим тонкий слой пластического материала со свойствами (1.1); в плоскости x, y он занимает область S_0, ограниченную кусочно-гладким контуром Г. Слой ограничен поверхностями $z = f_1(x, y, t)$ и $z = f_2(x, y, t)$, так что разность $h(x, y, z) = f_2 - f_1$ задает толщину слоя как известную функцию координат и времени; существенно, что h – мáло и плавно меняющаяся функция координат. Рассматриваем квазистатические процессы, поэтому время t как аргумент в дальнейшем будем опускать.

Обозначим $\boldsymbol{\upsilon}$ – вектор скорости относительного скольжения материала слоя и поверхностей f_2, f_1 (полагаем, что так называемые внутренние движения [1] поверхностей отсутствуют); $\upsilon = |\boldsymbol{\upsilon}| \cdot \mathbf{n}^\circ$, $\mathbf{n}^\circ = \{\cos\theta, \sin\theta\}$. Будем считать, что условия трения на обеих поверхностях одинаковы; обозначим величину силы трения τ_m. Обобщая гипотезу Прандтля и результаты работ [1, 2], примем, что сила трения τ_m равна пределу текучести материала на сдвиг в направлении $\mathbf{n}^\circ$; если оси координат совместить с главными направлениями анизотропии, то из соотношения (1.1) следует

$$\tau_{s\theta}^2 = \left(\frac{\sin^2\theta}{R^2} + \frac{\cos^2\theta}{S^2}\right)^{-1} \tag{2.1}$$

Здесь $S = (2M)^{-1/2}$, $R = (2L)^{-1/2}$ – пределы текучести на сдвиг в направлении x и y соответственно. Будем считать для определенности, что $S > R$, тогда

$$S^2/R^2 = \beta^2 = 1 + \delta, \quad \delta > 0$$

обозначив $S = \tau_s$, из соотношения (2.1) получим

$$\tau_{s\theta} = \frac{\tau_s}{(1 + \delta\sin^2\theta)^{1/2}} \tag{2.2}$$

Давление со стороны слоя на поверхности обозначим $p = -\sigma_z$; напряжения σ_x, σ_y различаются на величину порядка $\max h/l$, l – характерный размер S_0, поэтому из условия (1.1) получим

$$P + \sigma_x \cong p + \sigma_y = (F + G)^{-1} = \frac{1}{Z} \equiv \sigma_s \tag{2.3}$$

Напряжения контактного трения направлены противоположно $\mathbf{n}°$, отсюда следуют уравнения равновесия

$$\operatorname{grad} p = -\frac{2\tau_s}{h(x, y)(1 + \delta\sin^2\theta)^{1/2}} n° \tag{2.4}$$

Граничные условия на контуре Γ с точностью до слагаемых порядка $\max(h/l)$ имеют вид $\sigma_x = \sigma_y = 0$, поэтому на основании соотношения (2.3) получаем

$$x, y \in \Gamma, \quad p = \sigma_s \tag{2.5}$$

Отнесем координаты к l, оставив за ними прежние обозначения; примем

$$h = h_0 g(x, y), \quad (p - \sigma_s)h_0/(2\tau_s l) = z$$

Из соотношений (2.4),(2.5) следует

$$\operatorname{grad} z = -\frac{\mathbf{n}°}{g(x, y)(1 + \delta\sin^2\theta)^{1/2}} \tag{2.6}$$

$$x, y \in \Gamma, \quad z = 0 \tag{2.7}$$

Поскольку $\cos\theta = u/|\mathbf{v}|$, $\sin\theta = v/|\mathbf{v}|$, систему (2.6), (2.7) необходимо дополнить уравнением несжимаемости, которое в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial(gu)}{\partial x} + \frac{\partial(gv)}{\partial y} = \frac{l v_0}{h_0 g} \tag{2.8}$$

Здесь v_0 – скорость сближения поверхностей.

Система (2.6), (2.7), (2.8) разделяется. Действительно, из уравнения (2.6) получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{g^2(x, y)} \tag{2.9}$$

Если отсюда при условии (2.7) функция $z(x, y)$ найдена, то для u, v имеем систему из уравнения (2.8) и соотношения

$$u\frac{\partial z}{\partial y} = v\frac{\partial z}{\partial x} \tag{2.10}$$

Основное внимание уделим задаче (2.9), (2.7).

3. Общее решение и некоторые примеры. Сделаем в уравнении (2.9) замену переменной $y = \beta\eta$, получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{1}{g^2(x, \beta\eta)} \equiv \frac{1}{\psi^2(x, \eta)} \tag{3.1}$$

Если $y = \varphi(x)$ – явное уравнение контура Γ, то в новых переменных будет

$$\Gamma \Rightarrow \Gamma'\colon \eta = \varphi(x)/\beta$$

Пусть $z(x, \eta) = c = \mathrm{const}$ – семейство линий уровня; тогда, по крайней мере в окрестности контура и в области его гладкости, можно построить семейство γ ортогональных траекторий. Обозначим через $\eta = f_0(x, x_0, \eta_0)$ одну из линий этого семейства, проходящую через точку x_0, η_0 контура; в качестве параметра на γ выберем длину дуги и будем отсчитывать ее от контура. Из уравнения (3.1) тогда последует $dz/ds = 1/\psi(x, \eta)$, откуда

$$z = \int\limits_{\gamma} \frac{ds}{\psi(x, \eta)} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{(1+\eta'^2)^{1/2} dx}{\psi(x, \eta)} \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \eta, \eta')dx \tag{3.2}$$

Таким образом, если семейство γ известно, давление находится простой квадратурой.

Покажем, что линии γ совпадают с экстремалями вариационной задачи для функционала (3.2). Доказательство основано на замене уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dx}F'_{\eta'} - F'_{\eta} = 0 \tag{3.3}$$

системой канонических уравнений с помощью преобразования Лежандра $F'_{\eta'} = q$:

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{\partial L}{\partial \eta}, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial L}{\partial q}; \quad L(x, \eta, q) = q\eta' - F(x, \eta, q) \tag{3.4}$$

Уравнения (3.4) – это характеристическая система для уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + L\left(x, \eta, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{3.5}$$

В рассматриваемом случае

$$q = F'_{\eta'} = \eta'(1+\eta'^2)^{-1/2}/\psi'$$

откуда

$$\eta'^2 = \psi^2 q^2 (1 - \psi^2 q^2)^{-1}, \quad L = -(1 - \psi^2 q^2)^{1/2}/\psi$$

Подставив полученное выражение для L с заменой q на $\partial z/\partial\eta$ в соотношение (3.5), получим уравнение (3.1). Условие трансверсальности для функционала (3.2) означает ортогональность; тем самым доказательство завершено.

Уравнение (3.3) – это дифференциальное уравнение второго порядка

$$\psi\eta'' + (1+\eta'^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\eta'\right) = 0 \tag{3.6}$$

решение которого зависит от двух параметров: $\eta = f(x, a, b)$; следующие четыре условия позволяют найти эти параметры и точку x_0, η_0, если задана точка x, η, через которую проходит траектория семейства γ:

$$f(x, a, b) = \eta, \quad \varphi(x_0) = \beta\eta_0, \quad \varphi(x_0) = \beta f(x_0, a, b), \quad \varphi'(x_0)f'(x_0, a, b) = -\beta$$

Пример 1. В случае $\psi = 1$ имеем задачу о сжатии слоя параллельными плоскостями; из уравнения (3.6) находим семейство γ как двухпараметрическое семейство прямых, ортогональных контуру (аналогия с песчаной насыпью, А.А. Ильюшин, 1954). Нетрудно записать аналитическое решение задачи. Если $x_0 = x_0(t)$, $\eta_0 = \eta_0(t)$ – параметрические уравнения конура, то уравнение нормали к нему имеет вид

$$\eta_0 - \eta = -(x_0'/\eta_0')(x_0 - x) \tag{3.7}$$

Давление определится как расстояние вдоль нормали (3.7) от контура до текущей точки x, η:

$$z = (x_0 - x)[1 + x_0'^2/\eta_0']^{1/2} \tag{3.8}$$

Чтобы получить z как явную функцию x, η, надо из равенства (3.7) выразить t как функцию x, η и подставить в выражение (3.8).

Первое элементарное решение получается для круговой области

$$x_0^2 + \eta_0^2 = 1, \quad x_0 = \cos t, \quad \eta_0 = \sin t$$

Из равенства (3.7) находим $\operatorname{tg} t = \eta/x$, а из выражения (3.8) – $z = 1 - \sqrt{x^2 + \eta^2}$. В исходной постановке – это течение в эллиптической области $x_0^2 + y_0^2/\beta^2 = 1$; для давления получаем $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2/\beta^2}$, эпюра давления – эллиптический конус

$$(1 - z)^2 = x^2 + y^2/\beta^2$$

линии уровня – эллипсы

$$x^2/(1 - c)^2 + y^2/(\beta^2(1 - c)^2) = 1$$

Как видно из уравнения (2.6), линии тока – это ортогональные траектории по отношению к линиям уровня; в рассматриваемом примере вычисления приводят к результату: линиями тока, проходящими через точку x_0, y_0 контура, оказываются параболы $y = y_0(x/x_0)^{1/\beta^2}$.

Второе простое решение для прямоугольной области $|x| \le a$, $|y| \le b$ приводим лишь для того, чтобы показать, что это единственный случай, когда линии уровня и тока представляют собой сетку прямых, параллельных осям координат, а решение исходной задачи дается в рамках песчаной аналогии.

Пример 2. Уравнения (2.9), (2.7) составляют задачу Коши: найти интегральную поверхность $z(x, y)$, проходящую через контур Γ на плоскости x, y. Положим $g = 1$ и построим решение, основываясь на том, что известен полный интеграл (2.9)

$$z + \sqrt{1 - \beta^2 a^2}\,x + ay - b = 0 \tag{3.9}$$

Условия Коши зададим в параметрическом виде: $z = 0$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; подставив это в равенство (3.9), получим

$$\sqrt{1 - \beta^2 a^2}\,\varphi(t) + a\psi(t) - b = 0$$

Дополнительное уравнение для определения параметров a, b находится из соотношения

$$\sqrt{1 - \beta^2 a^2}\,\varphi'(t) + a\psi'(t) = 0$$

Окончательно равенство (3.9) примет вид

$$z = (-\psi' x + \varphi' y + \varphi\psi' - \varphi'\psi)(\psi'^2 + \beta^2\varphi'^2)^{-1/2} \tag{3.10}$$

Параметр t как функция x, y исключается из уравнения $z_i' = 0$.

Рассмотрим течение в круге $\varphi = \cos t$, $\psi = \sin t$; из соотношения (3.10) следует

$$z = (1 - x\cos t - y\sin t)(1 + \delta\sin^2 t)^{-1/2} \tag{3.11}$$

Условие $z'_t = 0$ приводит к уравнению

$$\beta^2 x\sin t - y\cos t = \delta\sin t\cos t \tag{3.12}$$

которое сводится к полному алгебраическому уравнению четвертого порядка относительно $\sin t$, мало пригодному для аналитического исследования. Уравнение (3.12) в секторе

$$x^2 + y^2 \le 1, \quad 0 \le t \le \pi/2$$

имеет единственное решение; найти его численными методами труда не представляет.

Если степень анизотропии невелика, так что $\delta^2 \ll 1$, решение уравнения (3.12) может быть найдено разложением по малому параметру; в первом приближении получим

$$\mathrm{tg}\, t \cong (y/x)(1 + \delta\alpha), \quad \alpha = 1/r - 1, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

После подстановки в выражении (3.11) будем иметь

$$z \cong \left[1 - \frac{x^2 + (1 + \delta\alpha)y^2}{(r^2 + 2\delta\alpha y^2)^{1/2}}\right]\left(1 + \frac{\delta y^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Некоторые другие примеры решения уравнения (3.1) можно найти в [9], там же указаны аналогии рассматриваемой задачи с различными задачами геометрии и физики.

4. Анизотропное трение. Предположение о том, что напряжение контактного трения противоположно вектору относительной скорости скольжения, традиционно используется в математических моделях процессов обработки давлением. Вместе с тем в целях управления процессом контактные поверхности могут быть выполнены с определенной текстурой, либо могут быть применены тонкие смазочные слои с анизотропными свойствами. В обоих случаях для вектора касательных напряжений $\boldsymbol{\tau}_m$ можно принять [6]

$$\boldsymbol{\tau}^\circ = \frac{\boldsymbol{\tau}_m}{|\boldsymbol{\tau}_m|} = -A\mathbf{n}^\circ$$

В рассматриваемом случае поверхности f_1, f_2 характеризуются матрицами

$$A_1 = \{\alpha'_{ik}\}, \quad A_2 = \{\beta'_{ik}\}; \quad i, k = 1, 2$$

Без ущерба для общности матрицы A_1, A_2 можно принять диагональными:

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik}\delta_{ik}, \quad \beta'_{ik} = \beta_{ik}\delta_{ik}$$

а главные направления анизотропии на обеих поверхностях – совпадающими. Тогда в соответствии с известными результатами [2] уравнения равновесия слоя примут вид (при условии $|\boldsymbol{\tau}_m| = \tau_s$)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{(\alpha_{11} + \beta_{11})\tau_s}{h(x, y)}\cos\theta, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{(\alpha_{22} + \beta_{22})\tau_s}{h(x, y)}\sin\theta \tag{4.1}$$

Положим

$$\alpha_{11} + \beta_{11} = \alpha, \quad \alpha_{22} + \beta_{22} = \mu\alpha$$

Введем, как и выше, безразмерные координаты и толщину слоя, обозначим

$$(p - \sigma_s)h_0/(\alpha\tau_s l) = z$$

Из уравнений (4.1) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos\theta}{g(x, y)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\mu\sin\theta}{g(x, y)} \tag{4.2}$$

Будем считать для определенности $\mu < 1$ и обозначим $\mu^2 = 1/\beta^2$; из уравнений (4.2) тогда получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{g^2(x, y)}$$

Это уравнение совпадает с (2.9). Вместе с условием $z|_\Gamma = 0$ получаем для определения z задачу, тождественную рассмотренной в предыдущем разделе. Однако отметим, что поле скоростей в данном случае существенно отличается от рассмотренного выше: линии тока и уровня не ортогональны, для определения υ имеем уравнение неразрывности (2.8) и соотношение

$$u\frac{\partial z}{\partial y} = \mu\upsilon\frac{\partial z}{\partial x} \tag{4.3}$$

которое отличается от (2.10).

5. Общий случай анизотропии. Если главные направления анизотропии свойств материала и матриц A_1, A_2 совпадают, предыдущие результаты очевидным образом обобщаются: для определения давления получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos\theta}{g(1 + \delta\sin^2\theta)^{1/2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\mu\sin\theta}{g(1 + \delta\sin^2\theta)^{1/2}}$$

откуда

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\beta^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{g^2(x, y)}$$

Поле скоростей определится из соотношений (2.8) и (4.3).

Отметим вырожденный вариант $\beta = \mu$, когда задача для определения величины z обращается в хорошо изученную:

$$|\mathrm{grad} z|^2 = g^{-2}, \quad z|_\Gamma = 0$$

Замечание. Все изложенное относится к случаю фиксированной области; между тем существенный интерес, особенно при анизотропном трении, представляет задача о растекании, т.е. об определении формы области, которую займет слой после заданного сжатия (первоначальная форма известна). Постановка этой задачи связана с серьезными математическими трудностями и ждет своего разрешения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А.А.* Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям // ПММ. Т. 18. 1954. Вып. 3. С. 265–288.

2. *Ильюшин А.А.* Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. Т. 19. 1955. Вып. 6. С. 693–713.
3. *Яковлев С.П., Яковлев С.С., Андрейченко В.А.* Обработка давлением анизотропных материлов. Кишинев: Квант, 1997. 332 с.
4. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханические модели необратимого конечного деформирования анизотропных тел // Проблемы прочности. 2002. № 6. С. 5–13.
5. *Матченко И.Н.* Модификация квадратичного условия предельного состояния ортотропной среды // Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. Тула: Тульск. гос. ун-т, 2002. Ч. 1. С. 27–31.
6. *Кийко И.А.* Технология обработки давлением и новые постановки задач в теории пластичности // Тр. 9-й конф. по прочности и пластичности. М., 1996. Т. 3. С. 145–149.
7. *Prandtl L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht // Z. Angew. Math. Mech. Bd. 3, S. 401–407, 1923 = Теория пластичности / Под ред. Работнова Ю.Н. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 102–113.
8. *Hull R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950 = *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
9. *Кийко И.А.* Теория пластического течения (Учебное пособие). М.: Изд-во МГУ, 1978. 75 с.

Москва
e-mail: a.v.muravlev@mail.ru

Поступила в редакцию
19.III.2004