УДК 539.3

© 2006 г. Л. М. Зубов

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА О КРУЧЕНИИ, РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ ЕСТЕСТВЕННО СКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

С точки зрения трехмерной нелинейной теории упругости рассматриваются задачи о больших деформациях растяжения, кручения и изгиба естественно скрученного стержня, нагруженного концевыми силами и моментами. Найдены частные решения уравнений эластостатики, представляющие собой двупараметрические семейства конечных деформаций и обладающие тем свойством, что на этих деформациях исходная система трехмерных нелинейных уравнений равновесия редуцируется в систему уравнений с двумя независимыми переменными. Использование этих решений позволяет свести некоторые задачи Сен-Венана для естественно скрученного бруса к двумерным нелинейным краевым задачам для плоской области в форме поперечного сечения стержня. Предложены различные формулировки двумерной краевой задачи на сечении, отличающиеся выбором неизвестных функций. В качестве частного случая рассмотрена нелинейная задача о кручении и растяжении кругового цилиндра с винтовой анизотропией, которая сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В рамках линейной теории упругости задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня рассматривались рядом авторов [1–4].

1. Переход к двумерной краевой задаче. Рассмотрим упругое тело, имеющее в отсчетной конфигурации форму естественно закрученного стержня с прямолинейной осью. Тело образовано винтовым движением вдоль оси x_3 плоской фигуры σ, которая расположена в плоскости, ортогональной этой оси. При описании деформации упругой среды в качестве лагранжевых координат будем использовать неортогональные криволинейные координаты [1] y_1, y_2, y_3, связанные с декартовыми координатами отсчетной конфигурации x_1, x_2, x_3, соотношениями

$$x_1 = y_1\cos\alpha x_3 - y_2\sin\alpha x_3, \quad x_2 = y_1\sin\alpha x_3 + y_2\cos\alpha x_3, \quad x_3 = y_3; \quad \alpha = \text{const} \tag{1.1}$$

Здесь α – угол естественной крутки, y_1, y_2 – декартовы координаты в плоской области σ. Уравнение кусочно-гладкого контура $\partial\sigma$, ограничивающего область σ, запишем в параметрической форме: $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$. Винтовую поверхность, образованную винтовым движением кривой $\partial\sigma$ вдоль оси x_3, будем называть боковой поверхностью стержня. Считая параметры t, y_3 гауссовыми координатами, уравнение боковой поверхности тела запишем в виде

$$\mathbf{r}(t, y_3) = y_1(t)\mathbf{d}_1 + y_2(t)\mathbf{d}_2 + y_3\mathbf{i}_3 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}_1\cos\alpha y_3 + \mathbf{i}_2\sin\alpha y_3, \quad \mathbf{d}_2 = -\mathbf{i}_1\sin\alpha y_3 + \mathbf{i}_2\cos\alpha y_3 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{r} = x_m \mathbf{i}_m$ – радиус-вектор точки поверхности, $\mathbf{i}_m$ ($m = 1, 2, 3$) – постоянные орты декартовых координат. При помощи соотношений (1.2) находится единичный вектор нормали к боковой поверхности

$$\mathbf{n} = \frac{\dot{y}_2 \mathbf{d}_1 - \dot{y}_1 \mathbf{d}_2 + \alpha(y_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{y}_2)\mathbf{i}_3}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \alpha^2 (y_1 \dot{y}_1 + y_2 \dot{y}_2)^2}} = n_s \mathbf{d}_s, \quad s = 1, 2, 3; \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{i}_3 \tag{1.4}$$

Точкой обозначена производная по переменной t. Из выражения (1.4) вытекает равенство

$$n_3 = \alpha(y_2 n_1 - y_1 n_2) \tag{1.5}$$

а вектор $n_1 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2$ представляет собой нормаль к плоской кривой $\partial\sigma$. Обозначим через X_k ($k = 1, 2, 3$) декартовы координаты точек деформированного тела (эйлеровы координаты) и рассмотрим следующее двупараметрическое семейство деформаций естественно закрученного бруса:

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1(y_1, y_2)\cos\psi y_3 - u_2(y_1, y_2)\sin\psi y_3 \\ X_2 &= u_1(y_1, y_2)\sin\psi y_3 + u_2(y_1, y_2)\cos\psi y_3 \\ X_3 &= \lambda y_3 + u_3(y_1, y_2); \quad \lambda, \psi = \text{const} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Радиус-вектор точки деформированного тела $\mathbf{R} = X_k \mathbf{i}_k$ представляется в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}(y_1, y_2, y_3) = u_k \mathbf{h}_k + \lambda y_3 \mathbf{h}_3 \\ &\mathbf{h}_1 = \mathbf{i}_1 \cos\psi y_3 + \mathbf{i}_2 \sin\psi y_3, \quad \mathbf{h}_2 = -\mathbf{i}_1 \sin\psi y_3 + \mathbf{i}_2 \cos\psi y_3, \quad \mathbf{h}_3 = \mathbf{i}_3 \end{aligned} \tag{1.7}$$

При помощи представления (1.7) для градиента деформации $\mathbf{C} = \operatorname{grad}\mathbf{R}$, где grad – оператор градиента в лагранжевых координатах, получим ($u_{k,p} = \partial u_k / \partial y_p$)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(y_1, y_2, y_3) &= (\mathbf{d}_1 + \alpha y_2 \mathbf{i}_3) \otimes \partial\mathbf{R}/\partial y_1 + (\mathbf{d}_2 - \alpha y_1 \mathbf{i}_3) \otimes \partial\mathbf{R}/\partial y_2 + \\ &+ \mathbf{i}_3 \otimes \partial\mathbf{R}/\partial y_3 = C_{sk}(y_1, y_2)\mathbf{d}_s \otimes \mathbf{h}_k \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} &C_{pk} = u_{k,p}, \quad C_{31} = \tilde{C}_{31} - \psi u_2, \quad C_{32} = \tilde{C}_{32} + \psi u_1, \quad C_{33} = \tilde{C}_{33} + \lambda \\ &\tilde{C}_{3k} \equiv -\alpha y_1 u_{k,2} + \alpha y_2 u_{k,1}; \quad p = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Из соотношений (1.9) определяется мера деформации Коши

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = G_{sk}(y_1, y_2)\mathbf{d}_s \otimes \mathbf{d}_k; \quad G_{sk} = C_{sm} C_{km} \tag{1.10}$$

т.е. компоненты тензора $\mathbf{G}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{d}_s$ не зависят от координаты y_3.

Геометрический смысл представлений (1.6) состоит в том, что поперечное сечение стержня, отстоящее от начала координат на расстояние y_3, испытывает некоторую плоскую деформацию, задаваемую функциями u_1, u_2, конечный поворот вокруг оси x_3 на угол $(\psi - \alpha)y_3$, поступательное перемещение вдоль оси на величину $(\lambda - 1)y_3$ и депланацию, описываемую функцией u_3. Случай $\psi = 0$ соответствует деформации выпрямления естественно скрученного стержня, при которой последний превращается в призматический брус.

Уравнения статики упругого тела в пренебрежении массовыми силами запишем при помощи несимметричного тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ [5]

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \tag{1.11}$$

$$\mathbf{D} = dW/d\mathbf{C} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = 2dW/d\mathbf{G} \tag{1.12}$$

Здесь div – оператор дивергенции в лагранжевых координатах, $\mathbf{P}$ – симметричный тензор напряжений Кирхгофа, $W(\mathbf{G})$ – удельная потенциальная энергия деформации.

В дальнейшем предполагается, что удельная энергия упругого материала W, рассматриваемая как функция компонент G_{sk} меры деформации Коши в базисе $\mathbf{d}_s$, не зависит явно от координаты $y_3 = x_3$, но может зависеть от координат y_1, y_2: $W = W(G_{sk}, y_1, y_2)$. Такие материалы будем называть однородными по координате y_3. Указанный класс материалов включает в себя изотропные упругие среды с произвольной неоднородностью по координатам y_1, y_2, отсчитываемым в плоскости поперечного сечения σ, а также некоторые виды анизотропных сред.

Поскольку величины G_{sk} не зависят от координаты y_3, из соотношений (1.12) следует, что для материала, однородного по координате y_3, компоненты $P_{sk} = \mathbf{d}_s\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{d}_k$ тензора напряжений Кирхгофа будут функциями только координат y_1, y_2. Поэтому тензор напряжений Пиолы при деформации вида (1.6) на основании соотношений (1.8), (1.12) будет иметь представление

$$\mathbf{D}(y_1, y_2, y_3) = D_{sk}(y_1, y_2)\mathbf{d}_s\otimes\mathbf{h}_k \tag{1.13}$$

Подставляя выражение (1.13) в равенство (1.11), получим скалярную форму уравнений равновесия для напряжений Пиолы

$$\begin{gathered}\tilde{D}_1 - \psi D_{32} = 0, \quad \tilde{D}_2 + \psi D_{31} = 0, \quad \tilde{D}_3 = 0\\ \tilde{D}_k \equiv D_{1k,1} + D_{2k,2} - \alpha y_1 D_{3k,2} + \alpha y_2 D_{3k,1}, \quad k = 1, 2, 3\end{gathered} \tag{1.14}$$

Учитывая уравнения состояния (1.12) и соотношения (1.8)–(1.10), (1.13), видим, что уравнения (1.14) представляют собой систему трех скалярных уравнений относительно трех функций двух переменных $u_k(y_1, y_2)$ ($k = 1, 2, 3$).

Скалярная форма граничных условий $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D} = 0$ на боковой поверхности стержня, которая предполагается свободной от нагрузки, в соответствии с соотношениями (1.4), (1.5), (1.13) имеет вид

$$n_1(D_{1k} + \alpha y_2 D_{3k}) + n_2(D_{2k} - \alpha y_1 D_{3k}) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \tag{1.15}$$

Так как согласно выражению (1.4) составляющие вектора нормали n_1, n_2 не зависят от координаты y_3, краевые условия (1.15) не содержат переменной y_3 и вместе с уравнениями равновесия (1.14) образуют двумерную краевую задачу для плоской области σ с неизвестными функциями $u_k(y_1, y_2)$. Постоянные ψ и λ считаются заданными параметрами.

Таким образом, предположения (1.6) о характере деформации упругой среды приводят исходную трехмерную нелинейную задачу для естественно скрученного стержня к двумерной краевой задаче для плоской области σ в форме поперечного сечения стержня.

Пусть $u_k(y_1, y_2)$ – некоторое решение краевой задачи (1.14), (1.15). При помощи соотношений (1.8)–(1.10), (1.12), (1.13) можно проверить, что функции

$$u_1^* = u_1\cos\kappa - u_2\sin\kappa, \quad u_2^* = u_1\sin\kappa + u_2\cos\kappa, \quad u_3^* = u_3 + \gamma \tag{1.16}$$

где κ и γ – произвольные действительные постоянные, также удовлетворяют уравнениям (1.14) и условиям (1.15).

Нечувствительность краевой задачи на сечении к замене (1.16) означает, что положение упругого тела после деформации определяется с точностью до поворота вокруг оси X_3 и поступательного смещения вдоль этой же оси. Этой неоднозначности решения можно избежать, подчинив неизвестные функции дополнительным условиям. Одним из вариантов таких условий являются следующие интегральные соотношения:

$$\iint u_3 d\sigma = 0, \quad \iint (\cos\beta - 1) d\sigma = 0 \tag{1.17}$$

где

$$\cos\beta = \frac{u_{1,1} + u_{2,2}}{\sqrt{(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + (u_{2,1} - u_{1,2})^2}} \tag{1.18}$$

Здесь и в дальнейшем двойной интеграл берется по области σ.

Величина β, определяемая формулой (1.18), представляет собой, как известно ([6], с. 91), угол поворота материальных волокон при плоской конечной деформации. Поэтому второе ограничение (1.17) означает отсутствие в среднем по сечению $y_3 = 0$ поворота частиц стержня вокруг его оси. Первое ограничение (1.17) означает, что осевое перемещение частиц бруса при $y_3 = 0$ равно нулю в среднем по сечению.

При учете ограничений (1.17) следует ожидать единственности решения задачи (1.14), (1.15). В самом деле, неединственность решения означала бы существование таких форм потери устойчивости стержня, при которых деформация одинакова во всех поперечных сечениях. Такой тип бифуркации равновесия если и возможен, то при весьма больших значениях параметров $|\psi|$ и $|\lambda - 1|$.

Теперь рассмотрим другое двупараметрическое семейство деформаций естественно закрученного бруса, которое аналогично деформации пространственного изгиба призматического тела [7],

$$\begin{aligned} X_1 &= v_1(y_1, y_2) + l y_3 \\ X_2 &= v_2(y_1, y_2)\cos\omega y_3 - v_3(y_1, y_2)\sin\omega y_3 \\ X_3 &= v_2(y_1, y_2)\sin\omega y_3 + v_3(y_1, y_2)\cos\omega y_3; \quad l, \omega = \text{const} \end{aligned} \tag{1.19}$$

В данном случае винтовые линии $y_1 = \text{const}$, $y_2 = \text{const}$, оси которых параллельны орту $\mathbf{i}_3$, после деформации превращаются в винтовые линии, ось которых параллельна орту $\mathbf{i}_1$, а боковая поверхность бруса переходит в винтовую поверхность, ось которой совпадает с осью X_1. При $l = 0$ винтовая боковая поверхность бруса переходит после деформации в сектор поверхности вращения, т.е. естественно закрученный стержень превращается в кривой брус с круговой осью, расположенной в плоскости X_2X_3. Радиус-вектор точки деформированного тела согласно равенствам (1.19) имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{R} = v_k(y_1, y_2)\mathbf{g}_k + l y_3 \mathbf{g}_1, \quad k = 1, 2, 3 \\ &\mathbf{g}_1 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{i}_2\cos\omega y_3 + \mathbf{i}_3\sin\omega y_3, \quad \mathbf{g}_3 = -\mathbf{i}_2\sin\omega y_3 + \mathbf{i}_3\cos\omega y_3 \end{aligned} \tag{1.20}$$

и для градиента деформации и меры деформации Коши получим

$$\mathbf{C} = C_{mn}(y_1, y_2)\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{g}_n, \quad m, n = 1, 2, 3 \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} &C_{pn} = v_{n,p}, \quad C_{31} = \tilde{C}_{31} + l, \quad C_{32} = \tilde{C}_{32} - \omega v_3, \quad C_{33} = \tilde{C}_{33} + \omega v_2; \quad p = 1, 2 \\ &\tilde{C}_{3n} \equiv \alpha y_2 v_{n,1} - \alpha y_1 v_{n,2} \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\mathbf{G} = C_{ml}C_{nl}\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{d}_n \tag{1.23}$$

Отсюда для упругой среды, однородной по координате y_3, следует представление тензора напряжений Пиолы

$$\mathbf{D}(y_1, y_2, y_3) = D_{mn}(y_1, y_2)\mathbf{d}_m \otimes \mathbf{g}_n \tag{1.24}$$

Уравнения равновесия относительно напряжений в задаче пространственного изгиба в силу соотношений (1.11), (1.20), (1.24) и последнего равенства (1.14) записываются в виде

$$\tilde{D}_1 = 0, \quad \tilde{D}_2 - \omega D_{33} = 0, \quad \tilde{D}_3 - \omega D_{32} = 0 \tag{1.25}$$

Граничные условия для напряжений на боковой поверхности стержня в случае изгиба по форме не отличаются от условий (1.15). Двумерная краевая задача относительно функций $\upsilon_n(y_1, y_2, y_3)$ $(n = 1, 2, 3)$ нечувствительна к замене

$$\upsilon_1^* = \upsilon_1 + \eta, \quad \upsilon_2^* = \upsilon_2\cos\theta - \upsilon_3\sin\theta, \quad \upsilon_3^* = \upsilon_2\sin\theta + \upsilon_3\cos\theta \tag{1.26}$$

где η и θ – произвольные действительные постоянные. Неоднозначность решения вида (1.26), связанная с возможностью произвольного поворота тела вокруг оси X_1 и произвольного поступательного смещения вдоль этой оси, устраняется после наложения условий, аналогичных (1.17), (1.18),

$$\iint(\upsilon_1 - y_1)d\sigma = 0, \quad \iint\left(\frac{\upsilon_{2,1} + \upsilon_{3,2}}{\sqrt{(\upsilon_{2,1} + \upsilon_{3,2})^2 + (\upsilon_{3,1} - \upsilon_{2,2})^2}} - 1\right)d\sigma = 0 \tag{1.27}$$

2. Силы и моменты, действующие на торцах бруса. Семейства конечных деформаций (1.6) и (1.19) представляют собой подстановку в уравнениях нелинейной эластостатики, которая приводит к теории кручения и изгиба естественно скрученного стержня, имеющей такую же точность, какая присуща классической задаче Сен-Венана [6] об изгибе и кручении призматического линейно упругого тела. А именно, уравнения равновесия в объеме тела и граничные условия на боковой поверхности удовлетворяются точно, а краевые условия на торцах бруса выполняются приближенно, в интегральном смысле Сен-Венана.

Главный вектор сил, действующих в произвольном сечении стержня $y_3 = \text{const}$ при деформации (1.6) согласно соотношению (1.13) имеет вид

$$\mathbf{F}(x_3) = \iint\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{D}d\sigma = F_1\mathbf{h}_1 + F_2\mathbf{h}_2 + F_3\mathbf{i}_3; \quad F_k = \iint D_{3k}d\sigma = \text{const} \tag{2.1}$$

Поскольку векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ зависят от y_3, из выражения (2.1) и условия равновесия части стержня, заключенной между двумя плоскостями $y_3 = a$ и $y_3 = b$, где a, b – произвольные числа, вытекает, что $F_1 = F_2 = 0$. Следовательно, главный вектор сил в сечении бруса при деформации кручения и растяжения–сжатия (1.6) одинаков для всех поперечных сечений и имеет направление орта $\mathbf{i}_3$.

Главный момент $\mathbf{M}$ сил в сечении $y_3 = \text{const}$ будем вычислять относительно некоторой точки на прямой $X_1 = X_2 = 0$. Согласно выражениям (1.6) эта прямая – ось винтовой поверхности, в которую превращается после деформации боковая поверхность стержня. Так как главный вектор параллелен указанной прямой, момент не зависит от точки приведения на оси X_3, что позволяет вычислять момент относительно точки $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Учитывая, что $F_1 = F_2 = 0$, при помощи соотношений (1.7), (1.13) находим

$$\mathbf{M}(x_3) = -\iint\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{D} \times \mathbf{R}d\sigma = M_k\mathbf{h}_k \tag{2.2}$$

$$M_1 = \iint(D_{33}u_2 - D_{32}u_3)d\sigma, \; M_2 = \iint(D_{31}u_3 - D_{33}u_1)d\sigma, \; M_3 = \iint(D_{32}u_1 - D_{31}u_2)d\sigma \tag{2.3}$$

Из этих соотношений и условия баланса моментов всех сил, приложенных к участку стержня $a \le y_3 \le b$, вытекает, что $M_1 = M_2 = 0$.

Итак, доказано, что реализация деформации (1.6) требует приложения к торцам естественно скрученного бруса системы сил, статически эквивалентной продольной силе F_3, действующей в точке оси X_3, и крутящему моменту M_3.

В дальнейшем, рассматривая задачу растяжения и кручения, будем предполагать, что поперечное сечение бруса σ обладает центральной симметрией, т.е. совмещается с собой при повороте на 180° вокруг оси стержня. Примером может служить сечение, имеющее форму буквы Z. Сечения, имеющие две оси симметрии, очевидно, тоже принадлежат этому классу. Если ось y_3 проходит через центры сечений, имеющих центральную симметрию, то преобразование координат, оставляющее область σ неизменной, имеет вид

$$y_1' = -y_1, \quad y_2' = -y_2, \quad y_3' = y_3$$

Рассмотрим двумерную краевую задачу, описывающую кручение и растяжение–сжатие естественно скрученного стержня и состоящую из уравнений (1.14), (1.17), (1.18) и граничных условий (1.15). Сделаем следующую замену независимых переменных и неизвестных функций

$$y_1' = -y_1, \quad y_2' = -y_2, \quad y_3' = y_3; \quad u_1' = -u_1, \quad u_2' = -u_2, \quad u_3' = u_3 \tag{2.4}$$

Теорема. Для однородного изотропного упругого тела краевая задача (1.14), (1.15), (1.17), (1.18) в области σ, обладающей центральной симметрией, инвариантна относительно преобразования (2.4).

Доказательство. Согласно соотношениям (1.9), (1.10) преобразование (2.4) порождает следующее преобразование компонент градиента деформации и меры деформации Коши:

$$\begin{gathered} C'_{pq} = C_{pq}, \quad C'_{p3} = -C_{p3}, \quad C'_{3p} = -C_{3p}, \quad C'_{33} = C_{33} \\ G'_{pq} = G_{pq}, \quad G'_{p3} = -G_{p3}, \quad G'_{33} = G_{33}; \quad p, q = 1, 2 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Инварианты меры деформации Коши

$$I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\mathbf{G} - \mathrm{tr}\mathbf{G}^2), \quad I_3 = \det\mathbf{G}$$

на основании формул (2.5) преобразуются так:

$$I_k' = I_k, \quad k = 1, 2, 3 \tag{2.6}$$

В случае изотропного упругого материала тензор напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}$, будучи изотропной функцией тензора $\mathbf{G}$, может быть представлен в виде [5] ($\mathbf{E}$ – единичный тензор)

$$\mathbf{P} = a_0(I_1, I_2, I_3)\mathbf{E} + a_1(I_1, I_2, I_3)\mathbf{G} + a_2(I_1, I_2, I_3)\mathbf{G}^2 \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.5)–(2.7) следует правило преобразования компонент тензора напряжений Пиолы в разложении (1.13)

$$D'_{pq} = D_{pq}, \quad D'_{p3} = -D_{p3}, \quad D'_{3p} = -D_{3p}, \quad D'_{33} = D_{33}, \quad p, q = 1, 2 \tag{2.8}$$

Инвариантность уравнений (1.14), граничных условий (1.15) и соотношений (1.17)–(1.19) относительно замен (2.4), (2.5) и (2.8) теперь видна непосредственно, что и доказывает теорему.

Замечание. Теорема остается в силе также и для ортотропного материала, если одна из осей ортотропии параллельна оси стержня y_3. Кроме того, допустима неоднородность материала по координатам y_1, y_2 при условии, что явная зависимость упругого потенциала от этих координат подчиняется требованию

$$W(G_{sk}, y_1, y_2) = W(G_{sk}, -y_1, -y_2)$$

Пусть $u_k = f_k(y_1, y_2)$ $(k = 1, 2, 3)$ – решение краевой задачи (1.14), (1.15), (1.17), (1.18). В силу теоремы функции

$$u_1 = -f_1(-y_1, -y_2), \quad u_2 = -f_2(-y_1, -y_2), \quad u_3 = f_3(-y_1, -y_2)$$

удовлетворяют той же краевой задаче. Из единственности решения получаем

$$f_p(-y_1, -y_2) = -f_p(y_1, y_2), \quad f_3(-y_1, -y_2) = f_3(y_1, y_2), \quad p = 1, 2$$

Итак, если поперечное сечение обладает центральной симметрией, то решение двумерной краевой задачи обладает свойством

$$u_p(-y_1, -y_2) = -u_p(y_1, y_2), \quad u_3(-y_1, -y_2) = u_3(y_1, y_2) \tag{2.9}$$

Из соотношений (1.6) и (2.9) имеем равенства

$$X_p(-y_1, -y_2, y_3) = -X_p(y_1, y_2, y_3), \quad p = 1, 2 \tag{2.10}$$

означающие, что сечение горизонтальной плоскостью деформированного бруса также обладает центральной симметрией, причем ось X_3, т.е. прямая $X_1 = X_2 = 0$ проходит через центры всех сечений. В частном случае, когда точка $y_1 = y_2 = 0$ принадлежит области σ, т.е. естественно закрученный брус не имеет полости в центральной части, из равенств (2.10) следует, что X_p $(0, 0, y_3) = 0$ $(p = 1, 2)$. Это означает, что материальная прямая, проходящая через центры сечений недеформированного стержня, остается после растяжения–сжатия и кручения стержня прямой линией и также пересекает горизонтальные плоскости в точке $y_1 = y_2 = 0$.

Таким образом, продольная сила F_3, являющаяся равнодействующей сил, которые необходимо приложить к торцу бруса для реализации деформации (1.6), в случае бруса с центрально симметричным сечением проходит через центр сечения.

После решения двумерной краевой задачи на сечении σ продольная сила F_3 и крутящий момент M_3 будут известными функциями параметров ψ и λ. Обращая эти функции, определим значения угла закручивания $\psi - \alpha$ и осевого удлинения $\lambda - 1$ по заданным значениям продольной силы и крутящего момента. Методом работы [7] доказываются энергетические соотношения нелинейной теории кручения и растяжения естественно скрученных стержней

$$\begin{gathered} F_3(\psi, \lambda) = \frac{\partial \Pi(\psi, \lambda)}{\partial \lambda}, \quad M_3(\psi, \lambda) = \frac{\partial \Pi(\psi, \lambda)}{\partial \psi} \\ \Pi(\psi, \lambda) = \iint W[u_k(y_1, y_2, \psi, \lambda); \psi, \lambda] d\sigma \end{gathered} \tag{2.11}$$

Здесь Π – функционал погонной потенциальной энергии упругого бруса, вычисленный на решении u_k $(y_1, y_2, \psi, \lambda)$ двумерной краевой задачи (1.14), (1.15), (1.17), (1.18). Согласно соотношениям (2.11) функция $\Pi(\psi, \lambda)$ полностью определяет деформационные свойства стержня при растяжении–сжатии и кручении и, в частности, описывает нелинейное взаимодействие продольных и крутильных деформаций.

В задаче пространственного изгиба естественно скрученного бруса аналогично изложенному ранее [7] доказывается, что реализация деформации (1.19) требует приложения к торцам бруса системы сил, статически эквивалентной равнодействующей $\mathbf{F}$ =

$= F_1\mathbf{i}_1$ и моменту $\mathbf{M} = M_1\mathbf{i}_1$. Сила $\mathbf{F}$ приложена в точке оси X_1, т.е. оси винтовой поверхности, в которую превращается после деформации (1.19) боковая поверхность бруса. Для величины силы F_1 и величины момента M_1 справедливы энергетические соотношения, подобные (2.11),

$$F_1(\omega, l) = \frac{\partial\Pi(\omega, l)}{\partial l}, \quad M_1(\omega, l) = \frac{\partial\Pi(\omega, l)}{\partial\omega}$$

где $\Pi(\omega, l)$ – погонная потенциальная энергия стержня, вычисленная на решении двумерной краевой задачи (1.25), (1.27), (1.15).

3. Уравнения совместности и функции напряжений. Выше предполагалось, что основными неизвестными в двумерных краевых задачах (1.14), (1.15), (1.17), (1.18) и (1.25), (1.27) являются соответственно функции $u_k(y_1, y_2)$ и $\upsilon_k(y_1, y_2)$ ($k = 1, 2, 3$). Возможны постановки задачи на сечении бруса с другим выбором неизвестных. За основные неизвестные можно принять, например, компоненты градиента деформации C_{sk}, а функции $u_k(\upsilon_k)$ исключить из системы уравнений. Для этого следует рассмотреть задачу определения в области σ функций $u_k(\upsilon_k)$ из системы уравнений (1.9), ((1.22)), считая заданными функции C_{sk}. Необходимые и достаточные условия разрешимости этих систем, которые можно назвать уравнениями совместности, имеют вид:

в задаче растяжения и кручения бруса

$$\begin{aligned}
&\psi C_{p2} + (-1)^{p+1}\alpha C_{(3-p)1} + \alpha y_1 C_{21,p} - \alpha y_2 C_{11,p} + C_{31,p} = 0\\
&\psi C_{p1} - (-1)^{p+1}\alpha C_{(3-p)2} - \alpha y_1 C_{22,p} + \alpha y_2 C_{12,p} - C_{32,p} = 0; \quad p = 1, 2\\
&C_{13,2} - C_{23,1} = 0, \quad C_{33} + \alpha y_1 C_{23} - \alpha y_2 C_{13} - \lambda = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

в задаче изгиба бруса

$$\begin{aligned}
&\omega C_{p2} - (-1)^{p+1}\alpha C_{(3-p)3} + \alpha y_2 C_{13,p} - \alpha y_1 C_{23,p} - C_{33,p} = 0\\
&\omega C_{p3} + (-1)^{p+1}\alpha C_{(3-p)2} - \alpha y_2 C_{12,p} + \alpha y_1 C_{22,p} + C_{32,p} = 0; \quad p = 1, 2\\
&C_{11,2} - C_{21,1} = 0, \quad C_{31} - \alpha y_2 C_{11} + \alpha y_1 C_{21} - l = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

При выполнении условий (3.1) функции u_1, u_2 определяются из соотношений (1.9) по заданным в односвязной области σ функциям C_{sk} однозначно, а функция u_3 – с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Если область σ многосвязна, функция u_3 будет, вообще говоря, многозначной.

Выполнение условий (3.2) гарантирует существование функций $\upsilon_k (k = 1, 2, 3)$, определяемых из соотношений (1.22). В случае многосвязной области σ функции υ_2, υ_3 находятся однозначно, а функция υ_1 может быть многозначной.

Уравнения совместности (3.1) вместе с уравнениями равновесия (1.14), в которых напряжения D_{sk} предполагаются выраженными через величины C_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) посредством определяющих соотношений (1.12), и граничными условиями (1.15) составляют формулировку краевой задачи для области σ с неизвестными функциями $C_{ij}(y_1, y_2)$. Эта краевая задача описывает кручение и растяжение–сжатие естественно закрученного стержня. Из двух необходимых условий единственности решения (1.17) теперь остается только последнее, в котором $\cos\beta$ следует выразить при помощи соотношений (1.9), (1.18) через компоненты тензора $\mathbf{C}$.

Система уравнений относительно компонент градиента деформации в задаче пространственного изгиба бруса состоит из уравнений совместности (3.2), уравнений равновесия (1.25), а также второго интегрального соотношения (1.27), в котором в соответствии с соотношениями (1.22) вместо производных $\upsilon_{n,p}$ должны фигурировать величины C_{pn}.

Указанные постановки краевой задачи на сечении бруса с величинами C_{sk} в качестве неизвестных функций не имеют вариационной формулировки. Данный недостаток можно устранить, приняв за неизвестные функции компоненты тензора напряжений Пиолы D_{rt}. Для этого необходимо выразить величины C_{sk} через напряжения D_{rt} следуя способу, указанному ранее [7]. В результате уравнения совместности (3.1) и (3.2) будут записаны через напряжения D_{rt}.

Нетрудно проверить, что уравнения равновесия (1.14) тождественно удовлетворяются следующей подстановкой:

$$\begin{gathered}D_{11} = \alpha y_2 H_2 + \psi\Phi_{11}, \quad D_{12} = -\alpha y_2 H_1 + \psi\Phi_{12}\ (1 \leftrightarrow 2)\\ D_{13} = \Phi_{0,2} - \alpha y_2 \Phi_{33}, \quad D_{23} = -\Phi_{0,1} + \alpha y_1 \Phi_{33}, \quad D_{33} = \Phi_{33}\\ D_{31} = -H_2, \quad D_{32} = H_1; \quad H_p \equiv \Phi_{1p,1} + \Phi_{2p,2}, \quad p = 1, 2\end{gathered} \tag{3.3}$$

а уравнения равновесия (1.25) – подстановкой

$$\begin{gathered}D_{11} = \chi_{0,2} - \alpha y_2 \chi_{31}, \quad D_{21} = \alpha y_1 \chi_{31} - \chi_{0,1}, \quad D_{31} = \chi_{31}\\ D_{1p} = \omega\chi_{1p} + (-1)^p \alpha y_2 K_{5-p}, \quad D_{2p} = \omega\chi_{2p} - (-1)^p \alpha y_1 K_{5-p}\\ D_{32} = -K_3, \quad D_{33} = K_2; \quad K_p \equiv \chi_{1p,1} + \chi_{2p,2}, \quad p = 2, 3\end{gathered} \tag{3.4}$$

Шесть функций Φ_0, Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{21}, Φ_{22}, Φ_{33}, относящихся к задаче растяжения и кручения бруса, и шесть функций χ_0, χ_{12}, χ_{22}, χ_{13}, χ_{23}, χ_{31}, относящихся к задаче пространственного изгиба, будем называть функциями напряжений. Их следует подчинить соответственно уравнениям совместности (3.1), (3.2) и граничным условиям на контуре $\partial\sigma$ поперечного сечения σ. Эти граничные условия выводятся из соотношений (1.15), (3.3), (3.4) и имеют вид:

в задаче кручения

$$n_1\Phi_{11} + n_2\Phi_{21} = 0, \quad n_1\Phi_{12} + n_2\Phi_{22} = 0, \quad \partial\Phi_0/\partial s = 0 \tag{3.5}$$

в задаче изгиба

$$\partial\chi_0/\partial s = 0, \quad n_1\chi_{12} + n_2\chi_{22} = 0, \quad n_1\chi_{13} + n_2\chi_{23} = 0 \tag{3.6}$$

Здесь s – текущая длина дуги граничного контура. Если область σ односвязна, то краевые условия для функций Φ_0 и χ_0 в условиях (3.5) и (3.6) без ограничения общности можно заменить условиями

$$\Phi_0|_{\partial\sigma} = 0, \quad \chi_0|_{\partial\sigma} = 0$$

Замену неизвестных $u_k(y_1, y_2)$, $v_k(y_1, y_2)$ на функции напряжений в двумерных краевых задачах для области σ можно охарактеризовать как преобразование задачи типа Неймана с нелинейными граничными условиями в задачу типа Дирихле с линейными граничными условиями.

Использование функций напряжений позволяет дать вариационные постановки двумерных задач на сечении бруса. В частности, функционал вариационного принципа типа Кастильяно (принципа дополнительной энергии) в задаче растяжения и кручения запишется в виде

$$\Pi[\Phi_0, \Phi_{pq}, \Phi_{33}] = \iint V(\Phi_0, \Phi_{pq}, \Phi_{33})d\sigma, \quad p, q = 1, 2 \tag{3.7}$$

Здесь V – удельная дополнительная энергия [5, 8] упругого материала, являющаяся функцией тензора напряжений Пиолы и связанная с удельной потенциальной энергией деформации $W(\mathbf{C})$ преобразованием Лежандра. В равенстве (3.7) предполагается, что компоненты тензора Пиолы выражены через функции напряжений по формулам (3.3). Варьируемые функции напряжений должны быть дифференцируемыми и подчинены граничным условиям (3.5). Из стационарности функционала П вытекают уравнения совместности (3.1).

Другие вариационные принципы нелинейной теории кручения и изгиба естественно скрученного бруса формулируются аналогично доказанному ранее [7].

4. Кручение и растяжение кругового цилиндра с винтовой анизотропией. При определенном типе криволинейной анизотропии и неоднородности материала стержень кругового сечения по своим механическим свойствам можно отнести к естественно скрученным телам. Примером может служить цилиндр с винтовой (спиральной) анизотропией. В рамках линейной теории упругости задачи о деформации стержня с этим типом анизотропии рассматривались ранее [4, 9].

Рассмотрим упругое тело в форме полого кругового цилиндра. Цилиндрические координаты точек тела в отсчетной конфигурации обозначим r, φ, z, а единичные векторы, касательные к координатным линиям – $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$. Упругий материал будем считать ортотропным. Направления главных осей ортотропии в каждой точке тела задаются ортонормированным базисом $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$. Ориентация этого базиса относительно координатных ортов $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ определяется формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{e}_\varphi\cos\tau(r) + \mathbf{e}_z\sin\tau(r) \\ \mathbf{q}_3 &= -\mathbf{e}_\varphi\sin\tau(r) + \mathbf{e}_z\cos\tau(r) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Согласно формулам (4.1) векторы $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$ в каждой точке тела с координатами r, φ, z имеют направление касательных к винтовым линиям, расположенным на цилиндре радиуса r и образующим углы τ и $\pi/2 - \tau$ с плоскостью $z = \text{const}$. Угол τ в общем случае считается дифференцируемой функцией радиальной координаты r.

Удельная потенциальная энергия деформации нелинейно упругого ортотропного материала W может быть представлена [10] как функция следующего вида:

$$W = W(a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_0;\ r) \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \mathbf{q}_k\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{q}_k, \quad a_{km} = (\mathbf{q}_k\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{q}_m)^2, \quad k, m = 1, 2, 3, \quad m > k \\ a_0 &= \det\mathbf{G} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Явная зависимость упругого потенциала от радиальной координаты в (4.2) имеет место при радиальной неоднородности материала. Из соотношений (1.12), (4.2), (4.3) находим выражение тензора напряжений Кирхгофа

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{P} = &\sum_{\substack{k, m = 1 \\ m > k}}^{3} \frac{\partial W}{\partial a_{km}}\mathbf{q}_k\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{q}_m(\mathbf{q}_k\otimes\mathbf{q}_m + \mathbf{q}_m\otimes\mathbf{q}_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial W}{\partial a_k}\mathbf{q}_k\otimes\mathbf{q}_k + \frac{\partial W}{\partial a_0}a_0\mathbf{G}^{-1} \end{aligned} \tag{4.4}$$

В случае несжимаемого материала, когда $a_0 = 1$, последнее слагаемое в равенстве (4.4) заменяется выражением $-p\mathbf{G}^{-1}$, где p – давление, которое не определяется через деформацию и является неизвестной функцией координат.

Обозначим через R, Φ, Z цилиндрические координаты точек тела после деформации и будем искать решение задачи кручения и растяжения кругового цилиндра в виде частного случая семейства (1.6)

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \lambda z \tag{4.5}$$

Из соотношений (4.5) находим представление градиента деформации и меры деформации Коши

$$\mathbf{C} = \frac{dR}{dr}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \frac{R}{r}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \psi R\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \lambda\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{G} = \left(\frac{dR}{dr}\right)^2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{R^2}{r^2}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \frac{\psi R^2}{r}(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi) + (\psi^2 R^2 + \lambda^2)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \left(\frac{dR}{dr}\right)^{-2}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{\psi^2 r^2}{\lambda^2}\right)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{\psi r}{\lambda^2}(\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi) + \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \qquad (4.6)$$

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_r\cos(\Phi - \varphi) + \mathbf{e}_\varphi\sin(\Phi - \varphi)$$

$$\mathbf{e}_\Phi = -\mathbf{e}_r\sin(\Phi - \varphi) + \mathbf{e}_\varphi\cos(\Phi - \varphi)$$

Из соотношений (4.1) и (4.6) следуют равенства

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{q}_1 = 0$$

откуда и из формул (4.4), (4.6) получаем

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}_1 = 0 \qquad (4.7)$$

Учитывая, что $\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}$, и соотношения (4.1), (4.6), (4.7), находим представление тензора напряжений Пиолы в задаче кручения кругового цилиндра из сжимаемого материала с винтовой ортотропией

$$\mathbf{D} = D_{rR}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + D_{\varphi\Phi}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + D_{\varphi z}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z +$$
$$+ D_{z\varphi}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{zz}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \qquad (4.8)$$

Поскольку компоненты тензора $\mathbf{D}$ в равенстве (4.8) выражаются при помощи определяющих соотношений (4.4) через функцию $R(r)$, подстановка выражения (4.8) в уравнения равновесия (1.11) приводит к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно этой функции

$$\frac{dD_{rR}}{dr} + \frac{D_{rR} - D_{\varphi\Phi}}{r} - \psi D_{z\Phi} = 0 \qquad (4.9)$$

В случае несжимаемого материала тензор напряжений Пиолы выражается не только через функцию $R(r)$, но и через неизвестное давление $p(r, \varphi, z)$:

$$\mathbf{D} = dW/d\mathbf{C} - p\mathbf{C}^{-T}$$

Два из трех уравнений равновесия (1.11) теперь приводятся к виду

$$\partial p/\partial\varphi = 0, \quad \partial p/\partial z = 0$$

Радиальная координата деформированного цилиндра определяется из условия несжимаемости

$$\det\mathbf{G} = \left(\frac{dR}{dr}\right)^2\frac{\lambda^2 R^2}{r^2} = 1$$

и имеет вид

$$R = \sqrt{R_1^2 + \lambda^{-1}(r^2 - r_1^2)}, \quad R_1 = R(r_1) \tag{4.10}$$

где r_1 и R_1 – внутренний радиус цилиндра соответственно до и после деформации. Уравнение (4.9) в случае несжимаемого материала служит для определения функции давления $p(r)$, которая находится с точностью до одной произвольной постоянной. Эта постоянная, а также постоянная R_1 определяются из граничных условий на внутренней $r = r_1$ и внешней $r = r_0$ поверхностях цилиндра

$$D_{rR}\big|_{r=r_1} = D_{rR}\big|_{r=r_0} = 0 \tag{4.11}$$

В случае сжимаемого материала ограничения (4.11) служат краевыми условиями для уравнения второго порядка относительно $R(r)$.

В силу представления (4.8) система напряжений, действующих в сечении z = const, приводится к продольной силе F_3 и крутящему моменту M_3, которые выражаются формулами

$$F_3(\lambda, \psi) = 2\pi\int_{r_1}^{r_0} D_{zz} r dr, \quad M_3(\lambda, \psi) = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} D_{z\varphi} R r dr$$

Таким образом, задача Сен-Венана о кручении и растяжении нелинейно упругого кругового цилиндра с винтовой анизотропией сведена к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00638).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А.И., Джанелидзе Г.Ю.* Задача Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР. 1939. Т. 24. № 1. С. 23–26; № 3. С. 226–228; № 4. С. 325–326.
2. *Шорр Б.Ф.* К теории закрученных неравномерно нагретых стержней // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 1. С. 141–151.
3. *Бердичевский В.Л., Старосельский Л.А.* Изгиб, растяжение и кручение естественно закрученных стержней // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 978–991.
4. *Устинов Ю.А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Физматлит, 2003. 125 с.
5. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. *Зубов Л.М.* О больших деформациях пространственного изгиба призматических тел // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 507–515.
8. *Зубов Л.М.* Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 241–245.
9. *Мусалимов В.М., Мокряк С.Я.* О некоторых задачах для спирально-анизотропной среды // Механика сплошной среды. Томск, 1983. С. 88–96.
10. *Green A.E., Adkins J.E.* Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: Clarendon Press, 1960. = *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.

Ростов-на-Дону
e-mail: zubov@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
22.III.2005