ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 70. Вып. 2, 2006

УДК 539.3

© 2006 г. М. А. Ильгамов

УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

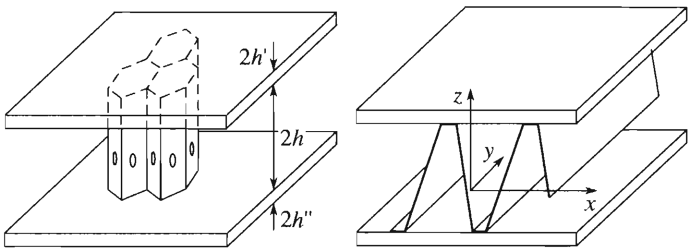
Предлагается приближенная модель линейного изгиба трехслойной ортотропной пластины с учетом избыточного давления в полости заполнителя и разности площадей поверхностей упруго изогнутых несущих слоев, причем постулируется зависимость модуля сдвига заполнителя от давления. Даны также уравнения изгиба пластины с учетом избыточного внешнего давления. Получено значение поперечной распределенной силы, действующей на пластину, обусловленной избыточным давлением в полости среднего слоя и кривизной упругой линии. Показано, что это давление приводит к увеличению прогиба. Если полость заполнителя замкнута, так что на граничные срезы ее действуют растягивающие силы за счет давления, то изгиб не зависит от перепада давления. Приводится зависимость распределенной поперечной силы от внешнего давления. Рассматривается также изменение модуля сдвига заполнителя в зависимости от внешнего перепада давления.

Трехслойные пластины и оболочки, наружные несущие слои которых разнесены за счет среднего слоя (заполнителя), обладают большой жесткостью при относительно малом весе и нашли широкое применение. При анализе изгиба таких пластин и оболочек учитывались несимметричность строения (разные толщины и материалы несущих слоев), анизотропия и реологические свойства материалов, различные структуры заполнителя, нелинейные, динамические эффекты и т.д. (см. [1–4] и многочисленные последующие публикации). Однако до сих пор не рассматривалось влияние на общий изгиб предварительного напряжения, которое создается избыточным давлением среды в среднем слое. Это может быть, например, давление газа в замкнутой полости заполнителя, повышающееся при нагреве конструкции, давление охлаждающей жидкости, протекающей между элементами заполнителя (фиг. 1). Такие узлы встречаются в конструкциях многих аппаратов и машин.

Впервые задача об устойчивости однородной полосы и пластины под всесторонним давлением рассмотрена в [5, 6]. Обзор исследований по влиянию внутреннего и внешнего гидростатического давления на упругие тела содержится в [7].

1. Формулировка задачи и исходные допущения. Рассматривается статический упругий изгиб трехслойной пластины несимметричного строения по толщине. Слои ортотропны, толщины их не меняются при изгибе, в среднем слое возникают только деформации поперечного сдвига. Учитывается влияние избыточного внутреннего и внешнего давления на изгиб пластины. Принимаются следующие допущения, часть которых использовалась и в предыдущих работах. Внешние слои жестко скреплены с заполнителем по всем поверхностям контакта. Отношения общей толщины пластины к ее другим размерам L_1 и L_2, а также отношения толщин несущих слоев $2h'$ и $2h''$ к толщине среднего слоя $2h$ малы по сравнению с единицей. Изгиб происходит в упругой области, прогиб $w(x, y)$ мал по сравнению с общей толщиной (x, y – ортогональные координатные линии в плоскости пластины). Для несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа – Лява.

Заполнитель рассматривается как анизотропная сплошная среда ввиду малых размеров его структуры (ячеек на фиг. 1) по сравнению с изменяемостью при общем изгибе пластины. Специальная анизотропия состоит в том, что толщина $2h$ не изменяется при



Фиг. 1

изгибе, так что прогиб $w(x, y)$ принимается одинаковым для точек одной нормали. Перемещения $u(x, y, z)$, $\upsilon(x, y, z)$ в плоскости заполнителя изменяются по толщине z линейно. Заполнитель не оказывает сопротивления растяжению–сжатию в плоскости пластины ($\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{12} = 0$), а также моментам, воспринимает только перерезывающие силы. Оси ортотропии всех трех слоев совпадают. Координатные линии направлены по этим осям.

В силу указанных допущений для продольных перемещений на уровне z в верхнем, среднем и нижнем слоях принимаются выражения

$$h \le z \le h + 2h': u = u' + (z - z')w_x, \quad \upsilon = \upsilon' + (z - z')w_y \; (z' = h + h')$$

$$\begin{gathered} -h \le z \le h: u = \frac{1}{2}u^+ - \frac{1}{2}h^- w_x + \frac{z}{2h}(u^- - h^+ w_x) \\ \upsilon = \frac{1}{2}\upsilon^+ - \frac{1}{2}h^- w_y + \frac{z}{2h}(\upsilon^- - h^+ w_y) \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$-h - 2h'' \le z \le -h: u = u'' + (z - z'')w_x, \quad \upsilon = \upsilon'' + (z - z'')w_y \; (-z'' = h + h'')$$

Здесь

$$u^{\pm} = u' \pm u'', \quad \upsilon^{\pm} = \upsilon' \pm \upsilon'', \quad h^{\pm} = h' \pm h'' \tag{1.2}$$

u', υ', u'', υ'' – продольные перемещения точек срединных поверхностей верхнего и нижнего слоев, индексами x и y обозначены частные производные по переменным x и y.

Выражения для напряжений сдвига в заполнителе имеют вид

$$\tau_{13} = G_1(u_z - w_x), \quad \tau_{23} = G_2(\upsilon_z - w_y) \; (-h < z < h) \tag{1.3}$$

где G_1 и G_2 – модули поперечного сдвига, зависимость которых от давления в полости среднего слоя будет обсуждаться далее.

В результате действия избыточного давления в полости среднего слоя происходит локальный изгиб тонких несущих слоев, определяемый размерами и структурой ячеек заполнителя. Однако ввиду малых размеров ячеек по сравнению с общими размерами пластины L_1, L_2 эти локальные изгибы не учитываются. При рассмотрении глобального изгиба в соответствии с принятыми допущениями считаются одинаковыми прогибы всех трех слоев, лежащих на одной нормали к срединной поверхности.

2. Уравнения изгиба. При принятых выражениях (1.1), (1.2) общие усилия и моменты выражаются через компоненты перемещения формулами [1–4]

$$N_j = N_j^+, \quad T = T' + T'', \quad M_j = M_j^+, \quad H = H' + H''; \quad j = 1, 2$$

$$\begin{gathered} N_1' = B_1'(u_x' + \nu_{21}'\upsilon_y'), \quad M_1' = -D_1'(w_{xx} + \nu_{21}'w_{yy}) - B_1'z'(u_x' + \nu_{21}'\upsilon_y') \\ (1 \leftrightarrow 2, u \leftrightarrow \upsilon, x \leftrightarrow y) \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$T' = B'_3(\upsilon'_x + u'_y), \quad H' = -2D'_3 w_{xy} - B'_3 z'(\upsilon'_x + u'_y)$$

Здесь

$$B'_j = \frac{2E'_j h'}{1 - \nu'_{21}\nu'_{12}}, \quad j = 1, 2, \quad B'_3 = 2G'h'; \quad D'_k = B'_k \frac{h'^2}{3}, \quad k = 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

E'_1, E'_2, G', ν'_{12}, ν'_{21} – модули упругости и коэффициенты Пуассона верхнего несущего слоя, использованы обозначения, аналогичные (1.2).

Выражения для N''_j, T'', M''_j, H'' получаются из приведенных путем замены одного штриха у соответствующих величин двумя штрихами. Для ортотропных материалов имеют место равенства

$$D'_1\nu'_{21} = D'_2\nu'_{12}, \quad D''_1\nu''_{21} = D''_2\nu''_{12}$$

Перерезывающие силы в заполнителе в соответствии с формулами (1.3) и (1.1) имеют вид

$$Q_1 = G_1(u^- - cw_x), \quad Q_2 = G_2(\upsilon^- - cw_y) \ (c = 2h + h^+) \tag{2.3}$$

В компонентах перемещения система уравнений равновесия трехслойной пластины несимметричного строения по толщине имеет вид [1–4]

$$B'_1(u'_x + \nu'_{21}\upsilon'_y)_x + B'_3(u'_y + \upsilon'_x)_y - \frac{G_1}{2h}(u^- - cw_x) = 0$$

$$B''_1(u''_x + \nu''_{21}\upsilon''_y)_x + B''_3(u''_y + \upsilon''_x)_y + \frac{G_1}{2h}(u^- - cw_x) = 0$$

$$(1 \leftrightarrow 2, u \leftrightarrow \upsilon, x \leftrightarrow y) \tag{2.4}$$

$$D_1^+ w_{xxxx} + 2(D_1\upsilon_{21} + 2D_3)^+ w_{xxyy} + D_2^+ w_{yyyy} + \frac{G_1 c}{2h}(u^- - cw_x)_x + \frac{G_2 c}{2h}(\upsilon^- - cw_y)_y = q$$

Предполагается, что распределенная сила q, направленная по нормали к срединной поверхности пластины, состоит из заданной части q_0 и части q_i, зависящей от внутреннего перепада давления:

$$q = q_0 + q_i \tag{2.5}$$

Силы веса и инерции, а также силы воздействия на пластину со стороны других тел (в том числе сосредоточенные силы) включаются в состав q_0.

3. Зависимость распределенной силы и модулей сдвига заполнителя от избыточного давления в полости среднего слоя. В отсутствие изгиба пластины на равные площади $dxdy$ поверхностей контакта заполнителя с обоими несущими слоями ($z = h$ и $z = -h$) действует избыточное давление p_i в полости среднего слоя, что дает растягивающую по оси z силу $p_i dxdy$. При этом, очевидно, не возникает неуравновешенной поперечной силы, действующей на трехслойную пластину ($q_i = 0$). Однако при изгибе пластины образуется разность площадей поверхностей контакта $z = h$ и $z = -h$, на которые действует давление p_i. Предполагается, что p_i значительно превосходит наружное давление ($p_i \gg p_e$) и при изгибе пластины остается неизменным.

Распределение перемещений $u(x, y, z)$, $\upsilon(x, y, z)$ по толщине пластины дается формулами (1.1). Начальная длина dx рассматриваемого элемента после деформации становится равной

$$[(1 + u_x)^2 + w_x^2]^{1/2} dx \approx \left(1 + u_x + \frac{1}{2} w_x^2\right) dx$$

С учетом аналогичного изменения стороны dy можно записать выражение для деформированной площади

$$(1 + u_x + 1/2 w_x^2)\left(1 + \upsilon_y + \frac{1}{2} w_y^2\right) dx dy$$

Соответственно указанная разность площадей контакта двух несущих слоев с заполнителем (при $z = h$ и $z = -h$) равна

$$[u_x(x, y, h) - u_x(x, y, -h) + \upsilon_y(x, y, h) - \upsilon_y(x, y, -h)] dx dy$$

Здесь учтено, что в соответствии с принятым допущением при изгибе перемещения по нормали обоих несущих слоев одинаковы ($w(h) = w(-h)$). Подставляя сюда значения u и υ из соотношений (1.1), заключаем, что распределенная поперечная сила q_i, действующая на единичную площадку срединной поверхности трехслойной пластины за счет наличия избыточного давления p_i в полости заполнителя, равна

$$q_i = p_i(n_1(u^- - h^+ w_x)_x + n_2(\upsilon^- - h^+ w_y)_y) \tag{3.1}$$

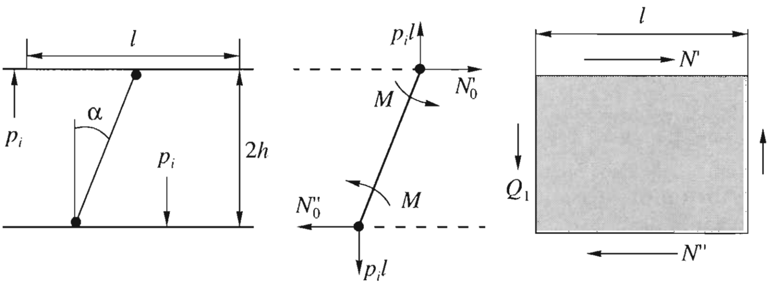
где коэффициент n_1 представляет собой отношение длины полосы в направлении оси x, на которую действует давление p_i (т.е. за вычетом площади контакта элементов заполнителя с несущим слоем), к общей длине этой полосы на внутренней поверхности несущего слоя. Коэффициент n_2 – то же самое в направлении оси y. Для реальных трехслойных пластин $0.95 \le n_j \le 1$. Для одной и той же структуры заполнителя n_1 и n_2 одновременно не могут быть равны единице. Для первого примера на фиг. 1 можно принять $n_1 = n_2 < 1$, для второго примера $n_1 < 1$, $n_2 = 1$. Сила q_i направлена по нормали в сторону выпуклости пластины.

Численные значения модулей поперечного сдвига G_1 и G_2 зависят не только от свойств материала, но и от структуры и размеров ячеек заполнителя [8]. Они могут быть на несколько порядков меньше, чем для сплошного материала, из которого изготовлен заполнитель. Кроме того, значения G_1 и G_2 будут несколько больше, если ячейки растянуты в поперечном направлении пластины, что имеет место при внутреннем перепаде давления. В простейшем виде эту зависимость можно записать так:

$$G_j = G_j^0(1 + m_j p_i), \quad j = 1, 2 \tag{3.2}$$

Коэффициенты m_1 и m_2 определяются из эксперимента на сдвиг заполнителя при взаимном продольном перемещении несущих слоев в направлениях x и y (без изгиба). Модули G_1^0, G_2^0 определяются из того же эксперимента при нулевом перепаде давления.

В качестве простейшего примера определения расчетным путем зависимости $G_1(p_i)$ рассмотрим изменение жесткости на взаимный сдвиг двух абсолютно жестких слоев ($w \equiv 0$), соединенных с помощью абсолютно жестких, но упруго поворачивающихся элементов (фиг. 2). Продольные силы, приложенные к наружным слоям, равны $(L/l) N_0'$ и $(L/l) N_0''$ ($N_0' = -N_0''$), где L – общая длина пластины, l – длина пластины, приходящаяся на один элемент заполнителя, N_0', N_0'' – силы, воспринимаемые этим элементом. Взаимное продольное перемещение слоев приводит к перекашиванию соединяющих элемен-



Фиг. 2

тов, при этом в местах соединения образуются моменты сил $M = C\alpha$, где C – жесткость, α – угол поворота.

Так как

$$\alpha \approx (u^-)/(2h), \quad N_0' = t\sin\alpha \approx t\alpha, \quad p_i l = t\cos\alpha \approx t, \quad 2M + p_i l u^- - N_0' 2h = 0$$

(t – сила растяжения элемента), то имеем

$$N_0' = \frac{1}{2h^2}(C + p_i l h)u^- \tag{3.3}$$

Из модели сплошного заполнителя следует $N' = Q_1$, величина Q_1 определяется первым выражением (2.3). В рассматриваемом случае деформации в этом выражении необходимо положить $w_x \equiv 0$. Поэтому

$$N' = G_1 u^- \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) находим значение модуля сдвига заполнителя

$$G_1 = \frac{C}{2h^2 l}\left(1 + \frac{p_i h l}{C}\right) \tag{3.5}$$

Таким образом, в данном примере имеем следующие коэффициенты в формулах (3.2):

$$G_1^0 = \frac{C}{2h^2 l}, \quad m_1 = \frac{hl}{C} \tag{3.6}$$

В предельном случае $C \to 0$ формула (3.5) дает $G_1 = p_i/(2h)$. Модуль сдвига такой конструкции прямо пропорционален внутреннему перепаду давления.

Таким образом, уравнения (2.4) с выражениями (2.5), (3.1), (3.2) представляют собой систему линейных уравнений изгиба трехслойной пластины с избыточным давлением в полости заполнителя.

4. Зависимость распределенной силы и модулей сдвига заполнителя от избыточного внешнего давления. Аналогично предыдущему случаю определим поперечную распределенную силу, действующую на пластину за счет давлений p' и p'', приложенных к наружным поверхностям несущих слоев. Вместо равенства (2.5) запишем

$$q = q_0 + q_e \tag{4.1}$$

Элемент $dxdy$ наружной поверхности верхнего слоя после деформации имеет площадь

$$[1 + u_x(x, y, h + 2h') + \upsilon_y(x, y, h + 2h')]dxdy$$

Для наружной поверхности нижнего слоя соответствующее изменение площади определяется этим же выражением, где вместо $z = h + 2h'$ нужно подставить $z = -h - 2h''$. Поэтому распределенная сила q_e, действующая на трехслойную пластину, равна

$$\begin{aligned} q_e &= p^- - (p' - p_i)[(u' + h'w_x)_x + (\upsilon' + h'w_y)_y] + \\ &+ (p'' - p_i)[(u'' - h''w_x)_x + (\upsilon'' - h''w_y)_y] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь принято $n_1 \approx 1, n_2 \approx 1$.

Если разность $p^- = p' - p''$ – конечная величина, то другие члены в соотношении (4.2) могут быть отброшены. В обычной теории изгиба они не учитываются. В случае $p' - p_i = p'' - p_i = p_e$ выражение (4.2) приобретает вид

$$q_e = -p_e((u^- - h^+w_x)_x + (\upsilon^- - h^+w_y)_y) \tag{4.3}$$

Распределенная сила, определяемая по формуле (4.3), направлена в сторону вогнутости трехслойной пластины.

В случае внешнего перепада давления заполнитель испытывает сжатие по толщине. Изменение модулей поперечного сдвига сжатого по толщине заполнителя в зависимости от внешнего перепада давления может быть представлено в виде

$$G_j = G_j^0(1 - m_j p_e), \quad j = 1, 2 \tag{4.4}$$

Коэффициенты m_1, m_2, входящие сюда, могут отличаться от тех же коэффициентов в формуле (3.2). Однако в рассмотренном выше примере структуры заполнителя они имеют те же значения (3.6).

Уравнения (2.4) вместе с соотношениями (4.1)–(4.4) представляют собой систему линейных уравнений изгиба трехслойной пластины, находящейся под действием внешнего перепада давления.

5. Влияние давления, приложенного к граничным срезам пластины, на ее изгиб. В дальнейшем для простоты соотношений рассмотрим случай пластины симметричного строения, когда толщины и модули упругости несущих слоев одинаковы ($h' = h''$, $E_1' = E_1''$, $E_2' = E_2''$, $\nu_{12}' = \nu_{12}''$, $\nu_{21}' = \nu_{21}''$). Примем также $n_1 \approx 1, n_2 \approx 1$.

Если на кромки пластины $x = 0$, $x = L_1$ действуют растягивающие силы N_1 по оси x, а на кромки $y = 0$, $y = L_2$ – растягивающие силы N_2 по оси y, то выражение (3.1) может быть представлено в виде

$$q_i = \left(p_i - \frac{N_1}{2h}\right)(u^- - 2h'w_x)_x + \left(p_i - \frac{N_2}{2h}\right)(\upsilon^- - 2h'w_y)_y \tag{5.1}$$

Пусть полость заполнителя замкнута, т.е. на граничные срезы $x = 0$, $x = L_1$, $y = 0$, $y = L_2$ действует внутреннее избыточное давление p_i. Тогда $N_1 = N_2 = 2hp_i$ и в соответствии с формулой (5.1) $q_i = 0$. Следовательно, в данном случае в уравнении изгиба трехслойной пластины перепад давления входит только через соотношение (3.2). В силу увеличения жесткости заполнителя прогибы будут меньше, чем в случае нулевого перепада давления.

Отсутствие сил $N_1(p_i)$, $N_2(p_i)$ реализуется, если, например, полость заполнителя по всей высоте $2h$ сообщается с емкостью с давлением p_i. То же самое имеем в предыдущем случае замкнутой полости, но к граничным срезам пластины приложены внешние сжимающие силы, равные $-2hp_i$. Тогда справедливо выражение (3.1) или (5.1), когда в последнем полагаем $N_1 = N_2 = 0$.

Граничные условия относительно осевых сил в данной задаче играют важную роль. Рассмотрим, например, цилиндрический изгиб протяженной пластины $L_2 \gg L_1$, когда левый срез ($x = 0$) закрыт, а правый ($x = L_1$) сообщается с полостью с избыточным давлением p_i. Примем условия закрепления кромок $w = M = 0$ ($x = 0$, $x = L_1$). Если левая опора неподвижна в осевом направлении и воспринимает силу $N_1 = 2hp_i$, действующую на закрытый срез, а правая опора – свободно скользящая, то пластина не растягивается силой N_1. Тогда приходим к выражению для боковой силы

$$q_i = p_i(u^- - 2h'w_x)_x$$

Если поменять местами указанные условия относительно продольной силы при $x = 0$ и $x = L_1$ (все остальное остается без изменения), то пластина испытывает растяжение силой $N_1 = 2hp_i$, и согласно выражению (5.1) $q_i = 0$. Тогда влияние избыточного давления на изгиб трехслойной пластины связано только с изменением модуля сдвига заполнителя.

Во всех рассмотренных случаях зависимости (3.2) остаются справедливыми, так как они обусловлены увеличением жесткости конструкции заполнителя на сдвиг при ее растяжении по толщине.

Учет внешних растягивающих сил N_1 и N_2, действующих по всей высоте кромок трехслойной пластины $2h + 4h'$, дает вместо (4.3) следующее выражение для боковой распределенной силы:

$$q_e = -\left(p_e + \frac{N_1}{2h + 4h'}\right)(u^- - 2h'w_x)_x - \left(p_e + \frac{N_2}{2h + 4h'}\right)(\upsilon^- - 2h'w_y)_y \tag{5.2}$$

Если на закрытые срезы пластины действует внешнее давление p_e, то

$$N_1 = N_2 = -p_e(2h + 4h')$$

При этом из выражения (5.2) следует, что $q_e = 0$, а зависимости (4.4) остаются без изменения. Для трехслойных пластин имеет место тот же вывод об устойчивости однородных полос и пластин под действием равномерного давления по всей поверхности и граничным срезам [5, 6].

6. Цилиндрический изгиб пластины, удлиненной в одном направлении. Для оценки боковой распределенной силы (3.1) и изменения модулей сдвига (3.2), зависящих от внутреннего давления p_i, рассмотрим цилиндрический изгиб пластины симметричного строения ($h' = h''$, $B' = B''$). Примем, что условия закрепления граничных срезов $x = 0$, $x = L$ ($L = L_1$) имеют вид $w = M = N = 0$ (далее нижние индексы у величин опущены). Согласно формулам (2.1) этим условиям удовлетворяют функции

$$u' = U'\cos(\pi x/L), \quad u'' = U''\cos(\pi x/L), \quad w = W\sin(\pi x/L) \tag{6.1}$$

Распределенную силу (2.5) с учетом выражения (3.1) примем в виде

$$q = q_0\sin(\pi x/L) + np_i(u^- - 2h'w_x)_x \tag{6.2}$$

а выражение для модуля сдвига заполнителя (3.2) – в виде

$$G = G_0(1 + mp_i) \tag{6.3}$$

Отметим, что такая задача без учета изменения модуля сдвига (6.3) была рассмотрена ранее [9].

Подставив в систему (2.4) для случая цилиндрического изгиба выражения (6.1)–(6.3), находим

$$U' = -U'' = \frac{\pi(h-h')}{L(1+b)}W, \quad W = \frac{q_0}{2D}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4, \quad b = \frac{B'h}{G^0(1+mp_i)}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$
$$D = D' + \frac{B'(h+h')^2}{1+b} - np_i\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\frac{h-h'b}{1+b} \tag{6.4}$$

Из выражений для D и b видно, что избыточное давление в полости заполнителя может приводить как к увеличению приведенной изгибной жесткости пластины (за счет увеличения модуля сдвига заполнителя), так и к ее уменьшению (за счет возникающей при изгибе разности площадей внутренних поверхностей несущих слоев) в зависимости от входных параметров задачи.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00100).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прусаков А.П.* Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 1. С. 82–91.
2. *Григолюк Э.И.* Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №1. С. 26–34.
3. *Муштари Х.М.* К общей теории пологих оболочек с заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 2. С. 24–29.
4. *Ильгамов М.А.* Вынужденные и параметрические колебания трехслойных пластин // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 3. С.114–119.
5. *Ишлинский А.Ю.* Исследование устойчивости упругих систем с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
6. *Kerr A.D., Tang S.* The effect of lateral hydrostatic pressure on instability of elastic solids, particularly beams and plates // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1966. V. 33. P. 617–622.
7. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Nauka, Fizmatlit. 1998 = *Ильгамов М.А.* Статические задачи гидроупругости. Казань: ИММ РАН, 1994. 208 с.
8. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник, Т. 2. / Под. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 464 с.
9. *Ильгамов М.А.* Теория изгиба трехслойной пластины с предварительно напряженным заполнителем // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 4. С. 481–484.

Уфа
e-mail:ilgamov@anrb.ru

Поступила в редакцию
12.XII.2004