

УДК 539.3: 534.1

© 2006 г. К. В. Аврамов

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОГО ГИБКОГО СТЕРЖНЯ

Получена неавтономная нелинейная динамическая система с малым параметром, описывающая параметрические колебания гибкого стержня с тремя положениями статического равновесия. Динамическая система на плоскости с петлей сепаратрисы есть порождающее уравнение этой модели. Представленный качественный анализ включает исследование устойчивости и бифуркаций субгармонических движений, находящихся на резонансных энергетических уровнях.

Остановимся на результатах исследований неавтономных динамических систем, содержащих малый параметр и полученных для неавтономных уравнений, близких к двумерным системам с петлей сепаратрисы. Если к автономной системе с петлей сепаратрисы прибавить возмущение, то эта петля может расщепиться. Относительное расстояние между сепаратрисными многообразиями, которые расщепились, определяется функцией В.К. Мельникова [1]. Если в диссипативной системе с малым параметром наблюдается пересечение сепаратрисных многообразий, то установившиеся колебания хаотические [2, 3]. Для предсказания бифуркаций, приводящих к хаосу, исследуются субгармонические колебания; для их анализа неконсервативная система, близкая к двумерной с петлей сепаратрисы, записывается относительно переменных действие – угол [4, 5].

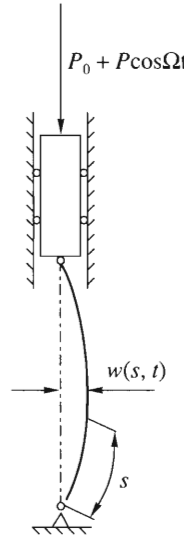
Параметрические колебания гибких стержней с учетом нелинейной инерционности рассматривались ранее [6]. Исследовались [7, 8] вынужденные нелинейные колебания гибкого стержня, которые описывались дискретной моделью с двумя степенями свободы. Исследовались [9] только седло-узловые бифуркации гибкого стержня.

Ниже асимптотический метод В.К. Мельникова впервые применяется для анализа субгармонических колебаний параметрически возбуждаемого гибкого стержня с тремя положениями статического равновесия. Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение параметрических колебаний стержня существенно сложнее осциллятора Дуффинга или нелинейного уравнения Матье, исследованных методом В.К. Мельникова ранее [1–5]. Для описания параметрических колебаний гибкого стержня используется модель, учитывающая нелинейное соотношение для кривизны изогнутой нейтральной оси и нелинейную инерционность. Благодаря переходу к переменным действие – угол удается детально исследовать бифуркационное поведение системы, что не было сделано в [9].

1. Постановка задачи. Рассмотрим гибкий стержень с грузом массы M , прикрепленным к одному из его концов (фиг. 1). Прямолинейное движение груза происходит под действием периодически изменяющейся внешней силы $P_0 + P \cos \bar{\Omega} t$. Перемещение груза при поперечных колебаниях стержня обозначим

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \int_0^l w^2 ds$$

где $w = w(s, t)$ – функция, описывающая поперечные колебания, l – длина стержня. Штрихом обозначается производная по координате s вдоль деформируемой нейтральной



Фиг. 1

ной оси стержня, точкой – производная по времени t . Учет силу вязкого сопротивления $R_L = c_L \dot{\eta}$, приложенную к грузу. Кривизна нейтральной линии стержня связана с ее поперечным перемещением в квадратичном приближении следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = w'' + \frac{1}{2} w'' w'^2$$

Учет нелинейную инерционность стержня при его движении.

Интегродифференциальное уравнение поперечных колебаний в кубическом приближении по смещениям и их производным принимает вид

$$EJw'''' + \frac{EJ}{2}(w''w'^2)'' + \left\{ P_0 + P \cos \bar{\Omega}t - \frac{M}{2} \int_0^l (w'^2)'' ds - \frac{c_1}{2} \int_0^l (w'^2) \dot{} ds \right\} w'' + c w' + \mu w'' - (Nw')' = 0, \quad N = \frac{\mu}{2} \int_0^{s_1} ds_1 \int_0^{s_1} (w'^2)'' ds_2 \quad (1.1)$$

Здесь EJ – жесткость стержня при изгибе, μ – масса единицы длины стержня, $c w'$ – распределенная вдоль стержня сила сопротивления поперечным смещениям, N – продольная сила в сечениях стержня. Левый конец стержня закреплен шарнирно, а правый конец шарнирно связан с грузом, поэтому граничные условия имеют вид

$$w|_{s=0} = w''|_{s=0} = w|_{s=l} = w''|_{s=l} = 0$$

Рассмотрим колебания стержня при потере статической устойчивости: $P_0 > P_*$, где P_* – значение эйлеровой критической силы. Как известно, стержень имеет три положения статического равновесия.

Введем безразмерные параметры и переменные

$$\begin{aligned} \varepsilon\delta &= \frac{cl^2}{\sqrt{EJ\mu}}, & \varepsilon\delta_1 &= \frac{c_1w_*^2}{2l\sqrt{EJ\mu}}, & \varepsilon\Gamma &= \frac{l^2P}{EJ}, & \Gamma_0 &= \frac{P_0l^2}{EJ}, & \varepsilon\gamma &= \frac{w_*^2}{2l^2} \\ m_1 &= \frac{M}{l\mu}, & u &= \frac{w}{w_*}, & \tau &= \sqrt{\frac{EJ}{l^4\mu}}t, & \xi &= \frac{s}{l}, & \Omega &= \frac{\bar{\Omega}l^2\sqrt{\mu}}{\sqrt{EJ}}; & w_* &= \frac{2\sqrt{2}l}{\pi}\sqrt{\frac{P_0}{P_*}} - 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\varepsilon \ll 1$, w_* – величина статического прогиба в центре стержня, которая вводится для приведения динамической задачи к безразмерному виду.

Безразмерные частоты линейной системы (1.1) при $P_0 < P_*$ имеют вид

$$p_\nu = \nu^2\pi^2, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Исследуется следующий диапазон изменения частоты возмущающей силы: $\Omega \in [0.5, 4]$. Колебания стержня представим в виде $u = q(t)\sin\pi\xi$, где $\sin\pi\xi$ – первая форма колебаний линейной системы. Применив метод Бубнова к уравнению (1.1) при учете выражений (1.2), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} q'' + \lambda(q^3 - q) + \varepsilon[-\gamma\rho\lambda\pi^4(q^5 - q^3) + \gamma\rho\pi^4qq' + \delta q' - \Gamma\pi^2q\cos\Omega\tau + \delta_1\pi^4q'q^2] &= 0 \\ \lambda = \Gamma_0\pi^2 - \pi^4, \quad \rho = m_1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{8\pi^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Так как критическое значение безразмерной продольной нагрузки Γ_0 равно $\Gamma_* = \pi^2$, то $\lambda > 0$. Подчеркнем, что динамическая система (1.3) приближенно описывает параметрические колебания гибкого стержня. В статье исследуется существенно упрощенная система (1.3), порожденная задачей о параметрических колебаниях гибкого стержня.

Для упрощения дальнейшего изложения систему (1.3) запишем так:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t); \quad x = (u, v) = (q, q'), \quad g = (g_1, g_2)$$

Порождающая система (1.3) – нелинейная, консервативная и в фазовой плоскости – содержит три неподвижные точки: два центра $(q, q') = (\pm 1, 0)$ и седло $(q, q') = (0, 0)$, показанные на фиг. 2. Инвариантные многообразия седла – гомоклинические траектории Γ_1 и Γ_2 . Внутри гомоклинических орбит фазовая плоскость порождающей системы заполнена периодическими движениями. Каждой траектории поставим в соответствие значение эллиптического модуля k ($0 < k < 1$). Отметим, что для периодических движений около гомоклинических орбит значения k близки к единице, а гомоклинической траектории отвечает $k = 1$. Период движений определяется соотношением

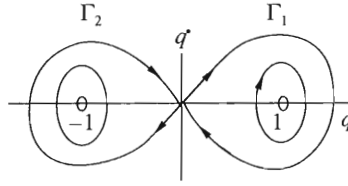
$$T(k) = 2\mathbf{K}\sqrt{2 - k^2}/\sqrt{\lambda}$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Отметим, что $\lim_{k \rightarrow 1} T(k) = \infty$ при $k \rightarrow 1$.

2. Качественное исследование движений. Рассмотрим субгармонические колебания в системе (1.3), удовлетворяющие резонансному условию

$$T(k) = mT_1 \quad (2.1)$$

где $T_1 = 2\pi/\Omega$ – период параметрического воздействия. Следуя принятому ранее подходу [5], воспользуемся каноническими преобразованиями $I = I(u, v)$, $\theta = \theta(u, v)$, связан-



Фиг. 2

ными с переходом к переменным действие (I) – угол (θ). Тогда в переменных I, θ динамическая система (1.3) примет вид

$$\begin{aligned} I \dot{} &= \varepsilon F(I, \theta, t), & \theta \dot{} &= \omega(I) + \varepsilon G(I, \theta, t) \\ F(I, \theta, t) &= \frac{\partial I}{\partial u} g_1 + \frac{\partial I}{\partial v} g_2, & G(I, \theta, t) &= \frac{\partial \theta}{\partial u} g_1 + \frac{\partial \theta}{\partial v} g_2, & \omega(I) &= \frac{\partial H}{\partial I} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где H – гамильтониан порождающей системы.

Отметим, что решения порождающей системы (2.2) периодические ($I = I_0 = \text{const}$, $\theta = \omega(I_0)t + \theta_0$); они показаны на фиг. 2 внутри гомоклинических орбит Γ_1 и Γ_2 .

Для целых $m = 1, 2, \dots$ определим значения I^m из резонансных условий (2.1). В дальнейшем исследуем движения около резонансных энергетических уровней [5]. Эти колебания определим соотношениями

$$I = I^m + \sqrt{\varepsilon} h(t), \quad \theta = \omega(I^m)t + \phi \quad (2.3)$$

Подставим выражения (2.3) в систему (2.2). К найденной системе уравнений применим метод усреднения [10], в котором используется замена переменных

$$(h, \phi) = (\bar{h}, \bar{\phi}) + \sqrt{\varepsilon} \Phi(\bar{h}, \bar{\phi}, t)$$

где $(\bar{h}, \bar{\phi})$ – новые переменные. В результате получим динамическую систему

$$\bar{h} \dot{\phantom{\bar{h}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\pi} \bar{M} \left(\frac{\bar{\phi}}{\omega} \right) + \varepsilon \frac{\partial \bar{F}}{\partial I} \bar{h}, \quad \bar{\phi} \dot{\phantom{\bar{\phi}}} = \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial I} \bar{h} + \varepsilon \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial I^2} \bar{h}^2 + \bar{G}(\bar{\phi}) \right] \quad (2.4)$$

где

$$\bar{M}(t_0) = -\delta \sqrt{\lambda} J_1(k) + \Gamma \pi^2 J_3(k) \sin \Omega t_0 - \delta_1 \pi^4 \sqrt{\lambda} J_2(k)$$

$$J_1(k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{mT} q_0^{\cdot 2} dt = \frac{4}{3} [(2-k^2)\mathbf{E} - 2k^2\mathbf{K}] (2-k^2)^{-3/2}$$

$$J_2(k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{mT} q_0^{\cdot 2} q_0^2 dt = \frac{8}{15} [2(k^4 + k^2)\mathbf{E} + (k^2 - 2)k^2\mathbf{K}] (2-k^2)^{-5/2}$$

$$J_3 \sin \Omega t_0 = \int_0^{mT} q_0 q_0^{\cdot} \cos(\Omega \tau + \Omega t_0) d\tau = \frac{\Omega^2 \pi}{\lambda} \text{csch} \frac{m\pi \mathbf{K}'}{\mathbf{K}} \sin \Omega t_0 \quad (2.5)$$

$$\omega = \omega(I^m), \quad \frac{\partial \omega}{\partial I} = -\frac{\sqrt{\lambda} \pi^2 (2-k^2) [(2-k^2)\mathbf{E} - 2k^2\mathbf{K}]}{2k^4 k'^2 \mathbf{K}^3}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial I^2} = -\frac{\sqrt{\lambda} \pi^3 (2-k^2)^{5/2}}{4k^8 k^4} \left[2(k'^6 + 3k'^2 + k^4) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}^4} + k'^2 (4k'^2 - k^4) \frac{1}{\mathbf{K}^3} - 3(2-k^2)^2 \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{K}^5} \right]$$

Черта над F и G означает операцию усреднения этих функций; $k'^2 = 1 - k^2$; $\mathbf{K}' = \mathbf{K}(k)$; (q_0, \dot{q}_0) – решения порождающей системы (1.3); $\mathbf{E} = \mathbf{E}(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода. При получении системы (2.4) использовалось соотношение

$$mT\omega(k) \frac{\partial \bar{F}}{\partial I} = \bar{M} \left(\frac{\bar{\Phi}}{\omega} \right)$$

Для дальнейшего анализа представим систему (2.4) в виде

$$\begin{aligned} \bar{h}^* &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\pi} (-(\delta_1 - \delta_*) \pi^4 \sqrt{\lambda} J_2 + \Gamma \pi^2 J_3 \sin m \bar{\Phi}) + \varepsilon [\chi + \Gamma \pi^2 K_1 \sin m \bar{\Phi}] \bar{h} \\ \bar{\Phi}^* &= \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial I} \bar{h} + \varepsilon \left[\frac{\partial^2 \omega}{2 \partial I^2} \bar{h}^2 - \frac{\Gamma \pi^2 K_1}{m} \cos m \bar{\Phi} \right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\delta_* = -\frac{\delta J_1(k)}{\pi^4 J_2(k)}, \quad \chi = \delta \sqrt{\lambda} \frac{\Omega (2-k^2)^2 \sigma(k)}{60 \pi m \lambda k^3 J_2} - \pi^4 (\delta_1 - \delta_*) \sqrt{\lambda} K_2$$

$$K_1 = \frac{\Omega \pi}{\lambda} \operatorname{csch} \frac{m \pi \mathbf{K}'}{\mathbf{K}} \left[\frac{(2-k^2)^3 \Omega^2 \pi}{8 \lambda k^4 k'^2 K^2} \operatorname{cth} \frac{m \pi \mathbf{K}'}{\mathbf{K}} + \gamma_1(k) \right], \quad \gamma_1(k) = -\frac{m}{2\pi} \frac{\partial \omega}{\partial I}$$

$$K_2 = \frac{2E\Omega}{\lambda \pi m \sqrt{2-k^2}} + \frac{\omega(k)}{\Omega} J_2$$

$$\sigma(k) = 80(2-k^2) \mathbf{E}^2(k) - 160k'^2 \mathbf{K}(k) \mathbf{E}(k) - 32(k^4 + k'^2) \mathbf{K}(k) \mathbf{E}(k) + 16k'^2 (2-k^2) \mathbf{K}^2(k)$$

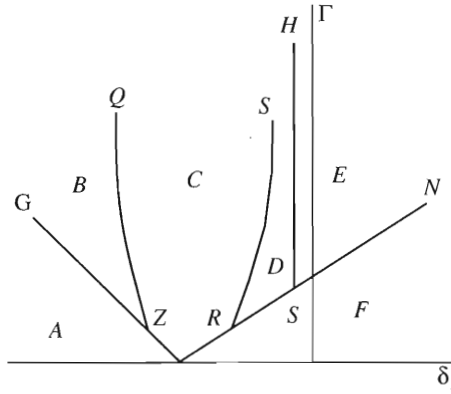
Траектории динамической системы (2.6) на плоскости соответствуют движениям неавтономной динамической системы (2.2) около резонансных энергетических уровней, что следует из соотношений (2.3), поэтому из свойств неподвижных точек и траекторий системы (2.6) можно сделать вывод о свойствах периодических орбит и других движений системы (2.2).

Воспользуемся результатами хорошо разработанной [3, 11] теории динамических систем на плоскости для анализа системы (2.6). Неподвижные точки этой системы представим так:

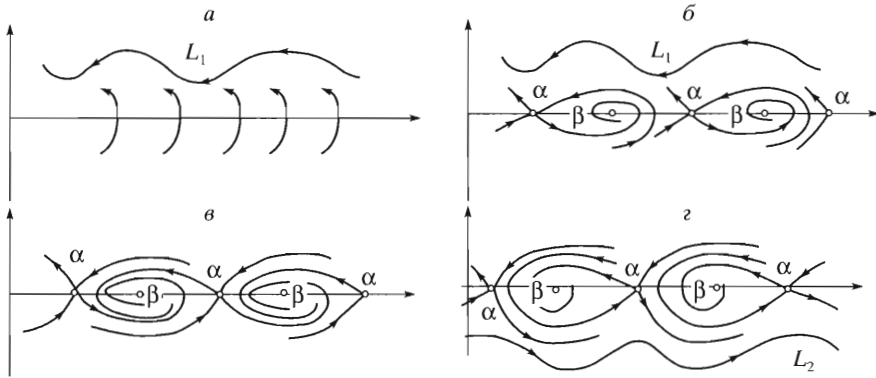
$$(\bar{\Phi}_v, \bar{h}_v) = \left(\frac{(-1)^v}{m} \arcsin a + \frac{\pi v}{m}, 0 \right) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad v \in Z, \quad a = \frac{\sqrt{\lambda}}{\Gamma \pi^2 J_3} (J_1 \delta + \delta_1 \pi^4 J_2) \tag{2.7}$$

Исследуем устойчивость неподвижных точек. Для этого линеаризуем систему (2.6) около неподвижных точек и определим характеристические показатели. Состояния равновесия разделим на две группы в соответствии с характеристическими показателями. Неподвижные точки типа "седло" обозначим на фазовой плоскости через α . Они имеют такие характеристические показатели:

$$\bar{\sigma}_{1,2} = \pm R + O(\varepsilon); \quad R = \left[\frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial I} \right| \Gamma \pi J_3 m \sqrt{1-a^2} \right]^{1/2} \tag{2.8}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Устойчивость неподвижных точек β определяется следующими характеристическими показателями:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{A} \pm iR \tag{2.9}$$

где $\text{tr} \tilde{A}$ – след матрицы линеаризованной системы, удовлетворяющий соотношению

$$\lim_{k \rightarrow 1} \text{tr} \tilde{A} = \lim_{k \rightarrow 1} \varepsilon \frac{\sqrt{\lambda} (\delta_1 \pi^4 J_2 + J_1 \delta)}{2m T_1 k^2 K(k)} \tag{2.10}$$

Так как для движений около резонансных энергетических уровней значения эллиптического модуля k близки к единице, для приближенного анализа показателей $\lambda_{1,2}$ воспользуемся соотношением (2.10). Тогда неподвижная точка β устойчива при $\delta_1 < \delta_*(m)$ и неустойчива при $\delta_1 > \delta_*(m)$.

Рассмотрим бифуркации системы (2.6). На фиг. 3 качественно показано бифуркационное множество в плоскости параметров (δ_1, Γ) . В областях A и B движения системы качественно различаются, так как эти области разделяет седло-узловая бифуркационная линия (GZ) . Фазовые траектории в области B качественно показаны на фиг. 4, б. Здесь существует неподвижная точка типа "седло" (точка α), устойчивая не-

подвижная точка β и устойчивое периодическое движение L_1 . В результате седло-узловой бифуркации (GZ) эти неподвижные точки сливаются и потом исчезают, поэтому в области A (фиг. 3) нет неподвижных точек; здесь наблюдаются только устойчивые периодические движения L_1 (фиг. 4, *a*). Аналогичная бифуркационная картина наблюдается при переходе из области E в область F . Эти области разделяет седло-узловая бифуркационная линия RN . Фазовые траектории в областях E и F не показаны.

Исследуем гетероклинические орбиты системы (2.6). Для этого выберем параметр δ_1 следующим образом:

$$\delta_1 = \delta_*(m) + \sqrt{\epsilon}\Delta; \quad \Delta = O(1) \tag{2.11}$$

Подставим выражение (2.11) в систему (2.6). Тогда гамильтониан порождающей системы принимает вид

$$H = \frac{\sqrt{\epsilon}\partial\omega}{2} \bar{h}^2 + \frac{\sqrt{\epsilon}\Gamma\pi J_3}{2m} \cos m\bar{\phi} \tag{2.12}$$

Динамическая система (2.12) имеет следующие неподвижные точки: центры $(\bar{\phi}_v, \bar{h}_v) = (\frac{2v}{m}\pi, 0)$ ($v = 0, \pm 1, \dots$) и седла $(\bar{\phi}_v, \bar{h}_v) = (\frac{2v+1}{m}\pi, 0)$. Заметим, что седла соединяются между собой гетероклиническими орбитами.

Учитывая выражение (2.11), определим гетероклинические движения в диссипативной системе (2.6) с помощью функции Мельникова [3]

$$\bar{M} = -\frac{\sqrt{\epsilon}\partial\omega}{2} \Delta \pi^3 \sqrt{\lambda} J_2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h} dt + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial\omega}{\partial I} \chi|_{\Delta=0} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}^2 dt \tag{2.13}$$

В соотношении (2.13) интегрирование проводится вдоль гетероклинических орбит системы (2.12). Гетероклинические бифуркации в системе (2.6) наблюдаются, если

$$\Delta = \pm \frac{4\chi|_{\Delta=0}}{J_2\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{2\Gamma J_3}{m\pi^7 \left| \frac{\partial\omega}{\partial I} \right|}} \tag{2.14}$$

На фиг. 3 качественно представлены гетероклинические бифуркационные множества ZQ и RS . Рассмотрим бифуркации при переходе системы из области B в области C и D . В области B наблюдается периодическое движение L_1 (фиг. 4, *b*), которое "влипает" в гетероклиническую орбиту и исчезает. Отметим, что такая гетероклиническая траектория наблюдается на бифуркационной линии ZQ . В области C (фиг. 4, *в*) периодических движений нет. На бифуркационной линии RS наблюдается гетероклиническая орбита и рождается периодическое движение L_2 , которое имеет место в области D (фиг. 4, *г*).

Система (2.6) с гомоклиническими траекториями получена в результате использования метода усреднения. Этот метод применялся к системе неавтономных уравнений, которые выводились из системы (2.2) с учетом замены переменных (2.3). При некоторых значениях параметров гомоклинические траектории в автономной системе (2.6) соответствуют пересечениям сепаратрисных многообразий седловых периодических движений неавтономных уравнений. Вследствие этого пересечение в фазовом пространстве возникают подковы Смейла. Такое явление в осциляторе Дуффинга – Вандер-Поля было исследовано [12]. Пересечение сепаратрисных многообразий в системе (1.3) здесь не рассматривается.

Рассмотрим смену устойчивости неподвижной точки β , которая наблюдается на бифуркационной линии HS (фиг. 3). Для анализа траекторий в окрестности этой неподвижной точки введем замену переменных: $(\psi, h) = (\phi - a, h)$. Тогда неподвижная точка определяется координатами $(\psi, h) = (0, 0)$. Рассматривая движение около состояния равновесия ($|\psi| \ll 1$), получаем дифференциальное уравнение

$$\psi'' + \omega_1^2 \psi = \sqrt{\varepsilon} \psi' (\alpha + r\psi) + O(\varepsilon) \quad (2.15)$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial I} \right| \Gamma \pi J_3 m \sqrt{1 - (\delta_1 - \delta_*)^2 \beta_1^2}$$

$$\alpha = \chi + 2\Gamma \pi^2 K_1 (\delta_1 - \delta_*) \beta_1, \quad \beta_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{\lambda} J_2}{\Gamma J_3}$$

$$r = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial I} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial I^2} \Gamma \pi J_3 m + 2\Gamma \pi^2 K_1 m \right] \sqrt{1 - (\delta_1 - \delta_*)^2 \beta_1^2}$$

Решим уравнение (2.15) методом Крылова – Боголюбова [10], используя замену переменных

$$(\psi, \psi') = (a \cos \theta, -a \omega \sin \theta)$$

Тогда получаем следующую систему уравнений относительно a, θ :

$$a' = \sqrt{\varepsilon} \alpha \frac{a}{2} + O(\varepsilon), \quad \theta' = \omega_1 + O(\varepsilon) \quad (2.16)$$

где

$$\alpha(k) = \delta \sqrt{\lambda} \frac{\Omega(2 - k^2)^2 \sigma(k)}{60\pi m \lambda k^3 J_2} + (\delta_1 - \delta_*) \pi^4 \sqrt{\lambda} \left(2K_1 \frac{J_2}{J_3} - K_2 \right)$$

Отсюда следует, что неподвижная точка $(\psi, h) = (0, 0)$ асимптотически устойчива при $\alpha < 0$ и неустойчива при $\alpha > 0$. Бифуркационная линия, отделяющая асимптотически устойчивые неподвижные точки от неустойчивых, имеет вид $\alpha = 0$. Уравнение бифуркационной линии можно записать так:

$$\delta_1 - \delta_* = \Delta_*(k) \quad (2.17)$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} \Delta_*(k) = \frac{15\delta}{8\pi^4 \sqrt{\lambda}} \left[\frac{\Omega\pi}{\lambda} \operatorname{cth} \frac{\Omega\pi}{2\sqrt{\lambda}} + 1 \right]^{-1} \lim_{k \rightarrow 1} k^2 \mathbf{K}^2$$

Из системы (2.16) следует, что, несмотря на смену устойчивости вдоль бифуркационной линии HS , предельные циклы не рождаются.

При параметрических колебаниях гибкого стержня возникают седло-узловые бифуркации субгармонических режимов. Для любого порядка m субгармонических колебаний (2.1) бифуркации системы качественно одинаковы. Из предыдущей статьи автора [9] следует, что за этими бифуркациями, колебания гибкого стержня являются хаотическими. Эти движения сопровождаются прощелкиванием стержня между тремя положениями статического равновесия.

Автор благодарит Ю.В. Михлина, Я. Авраицевича и О.К. Морачковского за обсуждения. Материалы статьи докладывались на семинарах Института Математики (Киев) и Института прикладной математики и механики (Донецк).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических во времени возмущениях // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
2. *Holmes P.* A nonlinear oscillator with a strange attractor // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 292. № 1394. P. 419–448.
3. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. N. Y. etc.: Springer, 1983.
4. *Морозов А.Д.* К вопросу о полном качественном исследовании уравнения Дюффинга // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13. № 5. С. 1134–1152.
5. *Морозов А.Д.* Глобальный анализ в теории нелинейных колебаний. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1995. 291 с.
6. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
7. *Аврамов К.В.* Вынужденные нелинейные колебания гибких стержней при комбинационном резонансе // Доп. НАН України. 2002. № 2. С. 47–50.
8. *Аврамов К.В.* Бифуркации при комбинационном резонансе и квазипериодические колебания гибких стержней // Прикл. механика. 2003. Т. 39. № 8. С. 121–128.
9. *Аврамов К.В.* Седло-узловые бифуркации параметрических колебаний гибких стержней с тремя положениями статического равновесия // Доп. НАН України. 2003. № 4. С. 37–40.
10. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
11. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.
12. *Greenspan B., Holmes P.* Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillators // SIAM J. Math. Analysis. 1984. V. 15. № 1. P. 69–97.

Харьков, Украина
e-mail: kvavr@kharkov.ua

Поступила в редакцию
7.XII.2004