

УДК 539.3:62-50

© 2006 г. М. И. Зеликин, Л. А. Манита

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ С УЧАЩАЮЩИМИСЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ БАЛКОЙ ТИМОШЕНКО

Рассматривается линейная задача управления в плоскости движением балки Тимошенко, один конец которой прикреплен к вращающемуся диску. Управлением служит угловое ускорение диска. Доказано, что в задаче гашения первой моды оптимальное управление имеет счетное число переключений на конечном интервале времени (четтеринг-управление); описан процесс построения субоптимального управления с конечным числом переключений.

В теории оптимального управления колебаниями, возникающими в механических системах, объектом многочисленных исследований является модель колебаний балки Эйлера – Бернулли. Теория балки Тимошенко – развитие системы Эйлера–Бернулли, учитывающее инерцию вращения и деформацию сечения, возникающую при колебаниях. Основное предположение в модели балки Тимошенко состоит в том, что плоские сечения, нормальные к оси балки до деформации, остаются плоскими и после деформации балки, поворачиваясь как жесткое целое на угол $\xi(x, t)$, причем сечения не обязательно остаются нормальными к оси балки [1, 2]. Модель однородной балки Тимошенко описывается системой уравнений в частных производных второго порядка

$$\rho P w_{tt} - kPGw_{xx} + kPG\xi = 0, \quad \rho I \xi_{tt} - EI \xi_{xx} + kPG\xi - kPGw_x = 0$$

где ρ – плотность массы балки, E – модуль упругости Юнга, G – модуль сдвига, I – момент инерции, P – площадь поперечного сечения, k – коэффициент сдвига Тимошенко, $w(x, t)$ и $\xi(x, t)$ – смещение балки в направлении, перпендикулярном оси балки в положении покоя, и угловое смещение поперечного сечения балки в момент t в точке x соответственно.

При изучении задачи управления медленно вращающейся балки Тимошенко доказана [3, 4] управляемость балки из заданного положения в положение покоя за достаточно большое время. Построено [5] управление, которое стабилизирует всю систему в положении покоя. Получены [6] условия точной управляемости и описаны множества достижимости.

Ниже рассматривается задача минимизации среднеквадратичного отклонения балки Тимошенко от положения равновесия. Доказывается, что в задаче оптимального гашения первой моды управление имеет бесконечное число переключений на конечном интервале времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим модель балки Тимошенко в предположении, что левый конец балки прикреплен к диску радиуса r . Предполагается, что движение балки управляется угловым ускорением диска. Используя перемасштабирование, уравнения балки Тимошенко можно свести к системе с одним действительным параметром $\gamma > 0$ [3]

$$\begin{aligned} w_{tt}(x, t) - \frac{1}{\gamma} w_{xx}(x, t) + \frac{1}{\gamma} \xi_x(x, t) &= -\ddot{\theta}(t)(r + x) \\ \xi_{tt}(x, t) - \xi_{xx}(x, t) + \frac{1}{\gamma} \xi(x, t) - \frac{1}{\gamma} w_x(x, t) &= -\ddot{\theta}(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\theta(t)$ – угол поворота диска в момент t . Заданы граничные условия

$$w(0, t) = \xi(0, t) = 0, \quad w_x(l, t) - \xi(l, t) = 0, \quad \xi_x(l, t) = 0 \quad (1.2)$$

где l – длина балки. Они означают, что левый конец балки ($x = 0$) закреплен, а правый конец балки ($x = l$) свободный. Определим начальные условия

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \quad \xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \xi_t(x, 0) = \xi_1(x), \quad x \in [0, l] \quad (1.3)$$

Далее будем считать $l = 1, \gamma = 1$. Рассмотрим задачу минимизации отклонения балки от положения равновесия в смысле следующего функционала:

$$\int_0^{\infty} \|\boldsymbol{\omega}(x, t)\|_H^2 dt \quad (1.4)$$

где $\boldsymbol{\omega}(x, t) = \begin{pmatrix} w(x, t) \\ \xi(x, t) \end{pmatrix}$, H – гильбертово пространство $L^2([0, 1], \mathbb{C}^2)$, т.е. линейное про-

странство вектор-функций $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, таких, что

$$\int_0^{\infty} (|y_1(x)|^2 + |y_2(x)|^2) dx < \infty$$

со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{y}(x), \mathbf{z}(x) \rangle_H = \int_0^1 (y_1(x) \overline{z_1(x)} + y_2(x) \overline{z_2(x)}) dx$$

Рассмотрим подмножество гильбертова пространства H

$$D = \{\mathbf{y}(x) \in H \mid y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1'(1) - y_2(1) = 0, \quad y_2'(1) = 0\} \quad (1.5)$$

Определим линейный дифференциальный оператор $A: D \rightarrow H$ по формуле

$$A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -y_1'' + y_2' \\ -y_1' - y_2'' + y_2 \end{pmatrix}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по x .

Тогда задача оптимального управления балкой может быть записана в следующем виде: минимизировать функционал (1.4) на траекториях управляемой системы

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\omega}(\cdot, t) + A\boldsymbol{\omega}(\cdot, t) = u(t)\mathbf{g}(\cdot), \quad t > 0; \quad (1.6)$$

где $\mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} -(r+x) \\ -1 \end{pmatrix}$, $u(t) = \ddot{\theta}(t)$ – скалярное управление, будем считать, что оно удовлетворяет ограничению $-1 \leq u \leq 1$.

2. Собственные значения и собственные функции дифференциального оператора.

Было доказано [3, 4], что A – строго положительный, самосопряженный оператор, об-

ладающий полной ортонормированной системой собственных функций $\mathbf{h}_j(x) (j \in \mathbb{N})$ и соответствующей системой собственных значений $\{\lambda_j \in \mathbb{R}\}$, таких, что $1 < \lambda_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Собственные числа λ_j являются решением уравнения

$$\frac{8\lambda^{3/2}}{\lambda-1} \left(1 + \cos \sqrt{\lambda - \sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda + \sqrt{\lambda}} - \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \sin \sqrt{\lambda - \sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda + \sqrt{\lambda}} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть λ – собственное число оператора A , $\mathbf{h}(x)$ – соответствующая собственная функция, т.е.

$$A\mathbf{h}(x) = \lambda\mathbf{h}(x), \quad \mathbf{h}(x) \neq 0 \quad (2.2)$$

Положим

$$\delta^\pm = \sqrt{\lambda \pm \sqrt{\lambda}}, \quad \mu^\pm = \sqrt{\lambda} \pm 1 \quad (2.3)$$

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\mathbf{h}(x) = D_1^+ \chi_1^+ e^{-i\delta^+} + D_1^- \chi_1^- e^{i\delta^+} + D_2^+ \chi_2^+ e^{-i\delta^-} + D_2^- \chi_2^- e^{i\delta^-}$$

где

$$\chi_1^\pm = \begin{pmatrix} -1 \\ \pm i\delta^+ \\ \mu^+ \end{pmatrix}, \quad \chi_2^\pm = \begin{pmatrix} -1 \\ \pm i\delta^- \\ \mu^- \end{pmatrix}$$

и D_1^\pm, D_2^\pm – некоторые комплексные постоянные. Так как функция $\mathbf{h}(x)$ удовлетворяет условиям (1.5), то постоянные D_1^\pm, D_2^\pm определяются из однородной системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -D_1^+ - D_1^- + D_2^+ + D_2^- &= 0 \\ \frac{D_1^+ \delta^+}{\mu^+} - \frac{D_1^- \delta^+}{\mu^+} + \frac{D_2^+ \delta^-}{\mu^-} - \frac{D_2^- \delta^-}{\mu^-} &= 0 \\ D_1^+ \sqrt{\lambda} e^{-i\delta^+} + D_1^- \sqrt{\lambda} e^{i\delta^+} + D_2^+ \sqrt{\lambda} e^{-i\delta^-} + D_2^- \sqrt{\lambda} e^{i\delta^-} &= 0 \\ \frac{D_1^+ \delta^+ \sqrt{\lambda} e^{-i\delta^+}}{\mu^+} - \frac{D_1^- \delta^+ \sqrt{\lambda} e^{i\delta^+}}{\mu^+} - \frac{D_2^+ \delta^- \sqrt{\lambda} e^{-i\delta^-}}{\mu^-} + \frac{D_2^- \delta^- \sqrt{\lambda} e^{i\delta^-}}{\mu^-} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

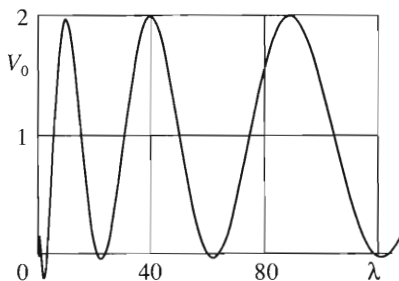
Ненулевое решение системы (2.4) существует тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, что эквивалентно уравнению (2.1).

Так как $\lambda_j > 1$, для вычисления собственных значений достаточно рассматривать уравнение, соответствующее равенству нулю выражения в скобках в (2.1):

$$1 + \cos \delta^- \cos \delta^+ - \tilde{\lambda} \sin \delta^- \sin \delta^+ = 0; \quad \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \quad (2.5)$$

или эквивалентное ему:

$$\frac{2}{1+\tilde{\lambda}} + \cos(\delta^- + \delta^+) + \frac{1-\tilde{\lambda}}{1+\tilde{\lambda}} \cos(\delta^- - \delta^+) = 0 \quad (2.6)$$



Фиг. 1

Напомним, что δ^\pm зависят от λ в силу выражений (2.3). Обозначим через $V_0(\lambda)$ левую часть уравнения (2.6). На фиг. 1 представлен график функции $V_0(\lambda)$.

Изучим асимптотику собственных значений оператора A при $j \rightarrow \infty$. Положим $\sigma = \sqrt{\lambda}$ и определим функцию

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) = V_0(\sigma^2) &= \frac{2\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{\sigma^2-1}+\sigma} + \cos(\sqrt{\sigma^2-1} + \sqrt{\sigma^2+\sigma}) + \\ &+ \frac{\sqrt{\sigma^2-1}-\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}+\sigma} \cos(\sqrt{\sigma^2-1}-\sqrt{\sigma^2+\sigma}) \end{aligned}$$

При $\sigma \rightarrow \infty$ функция $\Phi(\sigma)$ асимптотически эквивалентна следующей функции:

$$\Phi_0(\sigma) = 1 + \cos(2\sigma) + \frac{1}{4\sigma} \sin(2\sigma) - \frac{1}{4\sigma^2} \left(1 + \cos 1 + \frac{\cos(2\sigma)}{8} \right)$$

Лемма 1. Существуют постоянные $N_0 > 0$, $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ такие, что при всех $\sigma \geq N_0$

$$|\Phi(\sigma) - \Phi_0(\sigma)| \leq B_1/\sigma^3, \quad |\Phi'(\sigma) - \Phi_0'(\sigma)| \leq B_2/\sigma^3$$

Доказательство леммы проводится прямыми вычислениями.

Лемма 2. Существует постоянная $N_1 > 0$ такая, что в области $\sigma \geq N_1$ корни уравнения $\Phi_0(\sigma) = 0$ имеют вид

$$\sigma_k^\pm = \zeta_k + \frac{1}{8\zeta_k} \left(1 \pm 4\cos \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{1}{\zeta_k^2} \right) \quad (2.7)$$

где $\zeta_k = \pi(2k-1)/2$, $k \in \mathbb{N}$, – решения уравнения $1 + \cos(2\sigma) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим разложение Тейлора функции $\Phi_0(\sigma)$ в окрестности точки ζ_k

$$\Phi_0(\sigma) = -\frac{7}{32\zeta_k^2} - \frac{\cos 1}{4\zeta_k^2} - \frac{1}{2\zeta_k}(\sigma - \zeta_k) + \left(2 + \frac{7}{13\zeta_k^2} \right) (\sigma - \zeta_k)^2 + O\left(\frac{1}{\zeta_k^3} \right)$$

Решая уравнение $\Phi_0(\sigma) = 0$, получим равенство (2.7).

Таким образом, при достаточно больших σ в малой окрестности точки ζ_k находятся два разных корня уравнения $\Phi_0(\sigma) = 0$. Заметим, что расстояние между ними имеет порядок $1/\zeta_k$.

Лемма 3. Существуют положительные постоянные m^+ и m^- такие, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\zeta_k \Phi'_0(\sigma_k^\pm)) = \pm m^\pm$$

Доказательство леммы 3 легко получить из определения функции $\Phi_0(\sigma)$ и леммы 2.

Из лемм 1–3 и теоремы об обратной функции, примененной к $\Phi(\sigma)$ в точке σ_k^\pm , следует, что каждой паре корней σ_k^\pm уравнения $\Phi_0(\sigma) = 0$ соответствует пара корней κ_k^\pm уравнения $\Phi(\sigma) = 0$ и других корней у последнего уравнения нет.

Лемма 4. При $k \rightarrow +\infty$ верна следующая оценка для корней функции $\Phi(\sigma)$:

$$\kappa_k^\pm = \sigma_k^\pm + O\left(\frac{1}{\zeta_k^2}\right)$$

Из леммы 4 можно получить следующую оценку для собственных чисел оператора A .

Теорема 2. Каждому достаточно большому значению k соответствуют два близких собственных значения λ_k^- и λ_k^+ оператора A , таких, что

$$\lambda_k^- < (\pi(2k - 1)/2)^2 < \lambda_k^+, \quad \lambda_k^+ - \lambda_k^- = 2 \cos \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\zeta_k}\right) \tag{2.8}$$

Доказательство. Из определения функции $\Phi(\sigma)$ следует, что каждому корню уравнения $\Phi(\sigma) = 0$ соответствует собственное число λ оператора A . Положим $\lambda_k^\pm = (\kappa_k^\pm)^2$.

Применяя лемму 2 и лемму 4, получим

$$\lambda_k^\pm = \left(\zeta_k + \frac{1 \pm 4 \cos \frac{1}{2}}{8 \zeta_k} + O\left(\frac{1}{\zeta_k^2}\right) \right)^2 = \zeta_k^2 + \frac{1 \pm 4 \cos \frac{1}{2}}{4} + O\left(\frac{1}{\zeta_k}\right)$$

Отсюда следует соотношение (2.8).

Замечание. Расстояние между разными парами близких собственных значений оператора A растет линейно по k .

Ниже приведены первые тридцать два собственных значения оператора A

k	1	2	3	4	5	6	7	8
ζ_k^2	2.467	22.207	61.685	120.903	199.859	298.556	416.991	555.165
λ_k^-	1.623	21.568	61.054	120.273	199.231	297.927	416.363	554.537
λ_k^+	3.587	23.333	62.812	122.030	200.987	299.683	418.118	556.293
$\lambda_k^+ - \lambda_k^-$	1.964	1.765	1.759	1.757	1.757	1.756	1.756	1.756
k	9	10	11	12	13	14	15	16
ζ_k^2	713.079	890.732	1088.124	1305.255	1542.126	1798.108	2075.084	2371.172
λ_k^-	712.451	890.104	1087.495	1304.626	1541.498	1798.108	2074.457	2370.545
λ_k^+	714.207	891.860	1089.252	1306.384	1543.253	1799.863	2076.212	2372.300
$\lambda_k^+ - \lambda_k^-$	1.756	1.756	1.757	1.758	1.755	1.755	1.755	1.755

Замечание. В [4] изучался оператор \tilde{A} , несколько отличающийся от оператора A . Однако спектр \tilde{A} совпадает с полученным спектром оператора A . По-видимому, операторы A и \tilde{A} сводятся один к другому.

3. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку собственные функции оператора A образуют полную ортонормированную систему, разложим решение уравнения (1.6) и правую часть этого уравнения по системе $(\mathbf{h}_j(x))_{j=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \mathbf{h}_j(x), & \mathbf{g}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} C_j \mathbf{h}_j(x); \\ s_j(t) &= \langle \boldsymbol{\omega}(x, t), \mathbf{h}_j(x) \rangle_H, & C_j &= \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{h}_j(x) \rangle_H\end{aligned}$$

Если $C_j = 0$ для некоторого j , то значение радиуса диска r назовем сингулярным. Доказано [5], что множество сингулярных значений r не более, чем счетно. В дальнейшем будем считать, что значение r несингулярно, т.е. $C_j \neq 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$. После подстановки в уравнение (1.6) получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} [\ddot{s}_j(t) + \lambda_j s_j(t) - C_j u(t)] \mathbf{h}_j(x) = 0$$

В силу ортогональности системы собственных функций получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{s}_j(t) + \lambda_j s_j(t) = C_j u(t), \quad j \in \mathbb{N}$$

Используя равенство Парсеваля, выводим, что функционал (1.4) записывается в виде

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^2(t) \right) dt$$

Кроме того, раскладывая по системе собственных функций начальные условия (1.3)

$$\begin{pmatrix} w_0(x) \\ \xi_0(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j^0 \mathbf{h}_j(x), \quad \begin{pmatrix} w_1(x) \\ \xi_1(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_j \mathbf{h}_j(x)$$

получим начальные условия для функций $s_j(t)$: $s_j(0) = \tau_j^0$, $s_j'(0) = \tau_j$.

При большинстве начальных состояний, связанных с естественными внешними воздействиями на балку, основная часть энергии колебаний приходится на главную моду, поэтому в качестве первого приближения к построению оптимального решения в задаче (1.1–1.4) имеет смысл рассмотреть задачу оптимального гашения первой моды. Критерий оптимальности – минимизация среднеквадратичного уклонения способствует минимальному воздействию на остальные моды колебаний в процессе гашения главной моды.

Таким образом, приходим к следующей задаче оптимального управления – задаче об управляемом гармоническом осцилляторе с квадратичным критерием качества: минимизировать функционал

$$\int_0^{\infty} s^2(t) dt \tag{3.1}$$

на траекториях управляемой системы

$$\ddot{s}(t) + \lambda s(t) = C u(t) \tag{3.2}$$

где s – фазовая переменная, u – скалярное управление, $-1 \leq u \leq 1$, начальные условия $s(0) = \tau_1^0$, $\dot{s}(0) = \tau_1$. Структура оптимального синтеза, кривой переключений и свойства оптимальных траекторий для этой задачи изучались ранее [7, 8].

4. Особые режимы и режимы с учащающимися переключениями. Построение оптимального синтеза для задачи (3.1), (3.2) основано на технике, развитой в серии работ [7, 9]. Приведем краткий обзор соответствующих результатов. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\int_0^T (\varphi_0(x) + u\varphi_1(x)) dt$$

на множестве решений управляемой системы

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x)$$

с граничными условиями $x(0) \in B_0 \subset \mathbb{R}^n$, $x(T) \in B_T \subset \mathbb{R}^n$. Здесь x – фазовая координата, u – скалярное управление, $|u| \leq 1$. Отображения $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1$) задаются функциями класса C^∞ , B_0, B_T – гладкие многообразия. Допустимые управления $u(t)$ измеримы, соответствующие траектории $x(t)$ абсолютно непрерывны. Для решения задачи составляется гамильтониан $H = H_0(x, \psi) + uH_1(x, \psi)$, где

$$H_0(x, \psi) = f_0(x)\psi - \frac{1}{2}\varphi_0(x), \quad H_1(x, \psi) = f_1(x)\psi - \frac{1}{2}\varphi_1(x)$$

Используя принцип максимума Понтрягина, составляем гамильтонову систему

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4.1}$$

с гамильтонианом H . Условие максимума определяет оптимальное управление: $u = +1$ при $H_1 > 0$, $u = -1$ при $H_1 < 0$; $H_1 = 0$ – поверхность разрыва гамильтоновой системы.

Экстремаль $(x(t), \psi(t))$ принципа максимума Понтрягина называется особой на участке (t_0, t_1) , если $H_1(x(t), \psi(t)) = 0$ при $t \in (t_0, t_1)$. Это означает, что экстремаль лежит на поверхности $H_1 = 0$. Для того чтобы найти управление на особой траектории, надо дифференцировать тождество $H_1(x(t), \psi(t)) = 0$ по t в силу системы (4.1) до тех пор, пока в полученном выражении не возникнет управление u с ненулевым коэффициентом. Известно, что это может произойти только на четном шаге $2q$ дифференцирования. Число q называют порядком особой траектории. Будем говорить, что глобальный порядок особой траектории равен q , если

$$ad_{H_1} ad_{H_0}^i H_1 = 0, \quad i = 0, \dots, 2q - 2, \quad ad_{H_1} ad_{H_0}^{2q-1} H_1 \neq 0$$

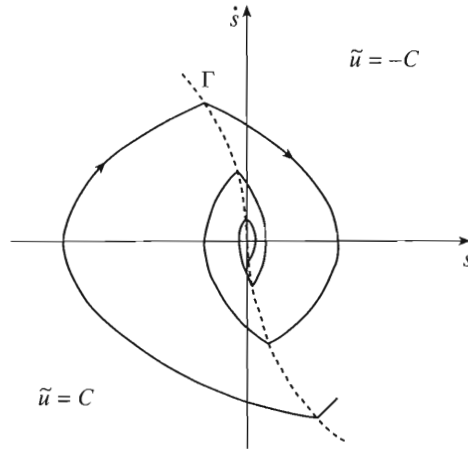
в некоторой окрестности особой траектории. Если равенства выполнены только в точках экстремали $(x(t), \psi(t))$, $t \in (t_0, t_1)$, то говорят, что q – локальный порядок экстремали.

Пусть глобальный порядок особой траектории равен q . Если функции

$$z_{i+1}(x, \psi) = ad_{H_0}^i H_1, \quad i = 0, \dots, 2q - 1$$

независимы в окрестности экстремали, то, дополнив их до независимой системы функциями $w_j(x, \psi)$ ($j = 1, \dots, 2n - 2q$) и приняв (z, w) за новые переменные, гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 2q - 1, \quad \dot{z}_{2q} = \rho_1(z, w) + u\rho_2(z, w) \\ \dot{w}_j &= F_j(z, w, u), \quad j = 1, \dots, 2n - 2q, \quad u = \operatorname{sgn} z_1 \end{aligned}$$



Фиг. 2

Особые режимы лежат на многообразии $z = 0$. При стыковке неособого режима с особым возникает четтеринг. Под термином четтеринг-траектории понимают такую траекторию, которая имеет бесконечное число переключений управления на конечном интервале времени.

5. Оптимальный синтез для управляемого гармонического осциллятора с квадратичным критерием качества. Положим

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \tau_1^0 \\ \tau_1 \end{pmatrix}$$

Из полученных ранее результатов [7, 10] для задачи (3.1), (3.2) вытекает следующая теорема.

Теорема 3.

1°. Начало координат – особая траектория порядка 2.

2°. Существует окрестность начала координат U_ε , такая, что:

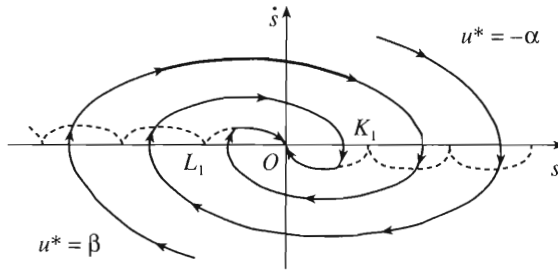
а) для любого $\mathbf{S}_0 \in U_\varepsilon$ существует оптимальная траектория $\mathbf{S}^*(t)$ с начальным условием $\mathbf{S}^*(0) = \mathbf{S}_0$, которая достигает начала координат за конечное время с бесконечным числом переключений управления;

б) в окрестности U_ε кривая переключений имеет вид

$$\Gamma = \begin{cases} s = \mu_1(\dot{s})\dot{s}^2, & \dot{s} > 0 \\ s = \mu_2(\dot{s})\dot{s}^2, & \dot{s} < 0 \end{cases}, \quad \mu_i(\dot{s}) \in C^1, \quad \mu_1(0) \in \left(-\frac{1}{2C}, 0\right), \quad \mu_2(0) \in \left(0, \frac{1}{2C}\right)$$

Оптимальный синтез $\tilde{u}(s, \dot{s}) = -C$ над кривой Γ , и $\tilde{u}(s, \dot{s}) = C$ под кривой Γ (фиг. 2).

6. Построение субоптимального режима для управляемого гармонического осциллятора с квадратичным интегральным критерием качества. Оптимальные траектории для управляемого гармонического осциллятора с квадратичным критерием качества имеют бесконечное число переключений управления на конечном интервале времени. Возникает необходимость аппроксимировать оптимальные четтеринг-траектории траекториями с конечным числом переключений управления. Для построения субоптимальной траектории с конечным числом переключений рассмотрим две вспомога-



Фиг. 3

тельные задачи: задачу наибоыстрейшей остановки осциллятора и простейшую задачу быстрогодействия.

Задача наибоыстрейшей остановки осциллятора

$$T \rightarrow \min$$

$$\dot{s}(t) + \lambda s(t) = u(t), \quad S(0) = S_0, \quad S(T) = 0$$

Управляющий скалярный параметр u изменяется на отрезке $[-\alpha, \beta]$, где $\alpha > 0, \beta > 0$. Был построен [11] оптимальный синтез для случая $\alpha = \beta = 1$. Построение легко обобщается на случай произвольных α, β . Оптимальный синтез устроен следующим образом (фиг. 3): фазовые траектории системы представляют собой при $u = \beta$ эллипсы $(\sqrt{\lambda} s - \beta/\sqrt{\lambda})^2 + \dot{s}^2 = d^2$ с центром в точке $(\beta/\sqrt{\lambda}, 0)$, а при $u = -\alpha$ – эллипсы $(\sqrt{\lambda} s + \alpha/\sqrt{\lambda})^2 + \dot{s}^2 = d^2$ с центром в точке $(-\alpha/\sqrt{\lambda}, 0)$. Фазовая точка движется по эллипсам по часовой стрелке. Переключения управления происходят на выделенной кривой, состоящей из счетного числа половинок эллипсов. Выше кривой переключения и на дуге OL_1 оптимальное управление $u^* = -\alpha$, ниже кривой переключения и на дуге OK_1 оптимальное управление $u^* = \beta$. На каждой оптимальной траектории имеется конечное число точек переключения, зависящее от начальных условий. Чем дальше начальная точка от начала координат, тем больше число точек переключения управления.

Оптимальный синтез в задаче наибоыстрейшей остановки осциллятора достаточно громоздок, однако для остановки осциллятора можно использовать простой в реализации оптимальный синтез в простейшей задаче быстрогодействия, при этом система за конечное время попадает в начало координат. Была приведена [10] оценка погрешности времени достижения начала координат по сравнению с оптимальным решением.

Простейшая задача быстрогодействия

$$T \rightarrow \min$$

$$\dot{s}(t) = u(t), \quad S(0) = S_0, \quad S(T) = 0$$

Скалярное управление ограничено: $-\alpha \leq u \leq \beta, \alpha > 0, \beta > 0$. Известно [11], что оптимальное управление $\hat{u}(t)$ принимает граничные значения $-\alpha$ и β и имеет не более одной точки переключения.

Теперь опишем процесс построения субоптимального решения для задачи (3.1), (3.2). Для точки S_0 рассмотрим начальный участок оптимальной в задаче (3.1), (3.2) траектории $S^*(t)$ ($S^*(0) = S_0$), содержащий ровно N переключений. Пусть этот участок заканчивается в точке S_N . Начиная с точки S_N , используем управление $\hat{u}(S_N)$ или

$u^*(S_N)$ ($\hat{u}(S_N)$ – оптимальный синтез в простейшей задаче быстрогодействия, $u^*(S_N)$ – оптимальный синтез в задаче об остановке осциллятора). Пусть $\hat{J}_N(S_0)$ – значение функционала на построенной таким образом траектории, а $J^*(S_0)$ – значение функционала на оптимальной траектории $S^*(t)$.

Теорема 4 [12]. Существуют ϵ -окрестность начала координат O_ϵ и постоянные $M > 0$, $\nu > 0$, такие, что для любой точки $S_0 \in O_\epsilon$ справедлива оценка

$$\hat{J}_N(S_0) - J^*(S_0) < M e^{-\nu N}$$

Таким образом, для практической реализации можно использовать на конечном интервале движения управление с конечным числом переключений, при этом можно обеспечить сколь угодно малую погрешность в функционале.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00735, 05-01-22001 и 05-01-00916).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.
2. Taylor S., Yau S. Boundary control of a rotating Timoshenko beam // ANZIAM Journal. Ser. E. 2003. V. 44. № 1. P. 143–184.
3. Gugat M. Controllability of a slowly rotating Timoshenko beam // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2001. V. 6. P. 333–360.
4. Krabs W., Sklyar G.M. On the controllability of a slowly rotating Timoshenko beam // Z. Anal. und Anwend. 1999. V. 18. № 2. P. 437–448.
5. Krabs W., Sklyar G.M. On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam // Z. Anal. und Anwend. 2000. V. 19. № 1. P. 131–145.
6. Krabs W., Sklyar G.M., Wozniak J. On the set of reachable states in the problem of controllability of rotating Timoshenko beams // Journal for Analysis and its Applications. 2003. V. 22. № 1. P. 215–228.
7. Zelikin M.I., Borisov V.F. Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering. Boston, etc.: Birkhauser, 1994. 242 p.
8. Телеснин В.Р. Об одной задаче оптимизации переходных процессов // МИАН АН СССР. 1984. Т. 166. С. 235–244.
9. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // МИАН АН СССР. 1991. Т. 197. С. 85–166.
10. Манита Л.А. Поведение экстремалей окрестности особых режимов и негладкие функции Ляпунова в задачах оптимального управления // Фундамент. и прикл. математика. 1996. Т. 2. № 2. С. 411–447.
11. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 407 с.
12. Зеликин М.И., Зеликина Л.Ф. Уклонение функционала от оптимального значения при четтеринге экспоненциально убывает с ростом числа переключений // Диф. уравнения. 1999. Т. 35. № 11. С. 1468–1472.