

УДК (551.25 + 530.145):534.1

© 2006 г. С. З. Дунин, Д. Н. Михайлов, В. Н. Николаевский

**ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫХ
ПОРИСТЫХ СРЕДАХ. ВЛИЯНИЕ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ**

Рассматривается задача о распространении продольных волн в насыщенной жидкостью пористой среде при наличии пузырьков газа. В линейном приближении построены зависимости коэффициента затухания и фазовой скорости волн Френкеля – Био первого и второго рода от частоты. Показано, что в окрестности резонансной частоты пузырьков продольные волны Френкеля – Био изменяют свой характер. Волна первого рода трансформируется из быстрой волны при низких частотах в медленную при высоких. Дисперсионная кривая волны второго рода состоит из двух ветвей – “низкочастотной” ветви, колебания которой обладают классическими свойствами, и “высокочастотной”, которая является слабозатухающей высокоскоростной модой. Построены частотные зависимости отношения массовых скоростей газожидкостной смеси и пористой матрицы, а также возмущений напряжения в матрице и давления в смеси. Выявлено, что “высокочастотная” ветвь волны второго рода характеризуется сонаправленным движением газожидкостной смеси и пористой матрицы, а их массовые скорости близки, что объясняет низкое затухание данной моды колебаний. Получено аналитическое выражение для “граничной частоты”, определяющей начало “высокочастотной” ветви дисперсионной кривой волны второго рода.

В пористых средах могут распространяться продольные волны Френкеля – Био двух типов [1–3]: волна первого рода, обусловленная преимущественно сжимаемостью внутрипорового наполнителя и материала матрицы, и волна второго рода, связанная, главным образом, с деформацией матрицы (“волна по матрице”). Их характеристики определяются различием плотностей и сжимаемостей составляющих материалов и матрицы.

Пористая матрица может деформироваться объемом только в случае, если насыщающая малосжимаемая жидкость способна перетекать по системе пор, высвобождая пространство для объемной переупаковки. Вязкое сопротивление по Дарси приводит к высокому затуханию, поэтому продольная волна Френкеля – Био второго рода соответствует сейсмически наблюдаемым волнам в сухих или почти сухих грунтах и горных породах [4], где вязкое сопротивление газа (воздуха) незначительно. В полностью насыщенной жидкостью среде наблюдаемой сейсмической волной становится продольная волна первого рода (быстрая), а волна второго рода может распространяться только на очень короткие расстояния (из-за крайне высокого затухания). Следовательно, логично предположить, что при какой-то промежуточной величине газонасыщенности происходит либо изменение типа наблюдаемой продольной волны Френкеля – Био, либо одновременно могут наблюдаться оба типа продольных волн [4, 5].

Действительно, в некоторых публикациях [6–8] приводятся достаточно странные графики экспериментально регистрируемых зависимостей скоростей волн от частоты или от других параметров среды, что можно интерпретировать как переход от одного наблюдаемого типа волны к другому. Ряд авторов считает, что в насыщенных [5, 9] или частично насыщенных [3, 10, 11] пористых средах могут распространяться одновременно продольные волны Френкеля – Био разных типов.

Трансформация поведения волн Френкеля – Био первого и второго рода при наличии пузырьков газа была обнаружена Бедфордом и Штерном [12] и затем также исследовалась другими авторами [13, 14]. Однако объяснения физического механизма эффекта дано не было. Напри-

мер, было прямо указано [12], что некоторые из полученных результатов вполне могут быть связаны с особенностями численного метода и, следовательно, физического смысла не имеют.

В предлагаемой статье продолжено изучение эффекта изменения поведения волн Френкеля – Био при резонансе газовых пузырьков. Перестройка волновых характеристик связывается с изменением характера движения жидкости в поровом пространстве при наличии пузырьков. Действительно, вместо перетекания, необходимого для реализации продольной волны Френкеля – Био второго рода, жидкость может смещаться и внутрь объема, освобождаемого при сжатии пузырька, предоставляя дополнительную возможность для объемного деформирования матрицы. В этом случае колебания пористой матрицы и пузырьков становятся синфазными, а затухание волны второго рода (благодаря снижению сопротивления по Дарси) должно значительно уменьшиться.

1. Уравнения динамики. Рассматривается распространение продольных волн Френкеля – Био в насыщенной жидкостью пористой среде при наличии пузырьков газа.

Пусть волна распространяется вдоль оси x . Предположим, что насыщающая жидкость содержит газ в виде одинаковых изолированных пузырьков.

Запишем полную систему уравнений баланса массы и импульса

$$\begin{aligned} \partial_t(1 - m)\rho_1 + \partial_x(1 - m)v_1\rho_1 &= 0 \\ \partial_t m\rho_2 + \partial_x m v_2\rho_2 &= 0 \\ \partial_t(1 - m)\rho_1 v_1 + \partial_x(1 - m)\rho v_1^2 &= \partial_x \sigma^f - (1 - m)\partial_x p + \mu m^2 k^{-1}(v_2 - v_1) \\ \partial_t m\rho_2 v_2 + \partial_x m\rho_2 v_2^2 &= -m\partial_x p - \mu m^2 k^{-1}(v_2 - v_1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

К этим уравнениям добавляется уравнение динамики пузырька [15]

$$R\partial_{tt}R + \frac{3}{2}(\partial_t R)^2 + \frac{4\mu}{\rho_L}\left(\frac{1}{R} + \frac{m}{4k}R\right)\partial_t R = (p_g - p)\rho_L^{-1} \tag{1.2}$$

Индекс 1 соответствует твердой фазе, 2 – газожидкостной смеси, ρ_i и v_i – соответствующие плотности и массовые скорости фаз, ρ_L – плотность жидкости без пузырьков газа, $\sigma^f \equiv \sigma_{xx}^f$ – эффективное напряжение Терцаги [3], p – давление в жидкости, m – пористость, k – проницаемость, μ – вязкость жидкости без пузырьков, R – радиус пузырька, p_g – давление газа внутри пузырька; $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_{tt} = \partial^2/\partial t^2$.

Отметим, что в отличие от уравнения Рейля, описывающего колебания одиночного пузырька в вязкой жидкости, уравнение (1.2) дополнено вторым диссипативным членом, включающим пористость и проницаемость, для учета потерь по Дарси.

Среднюю плотность газожидкостной смеси определим как

$$\rho_2 = \rho_L(1 - \varphi), \quad \varphi = (4\pi/3)R^3 n_0 \tag{1.3}$$

где φ – объемное газосодержание, $n_0 = \text{const}$ – числовая концентрация пузырьков. В выражении для средней плотности (1.3) пренебрегается плотностью газа, что вполне справедливо при малых газосодержаниях. Изменение φ связано с изменением радиуса пузырьков R , тогда как их числовая концентрация полагается постоянной.

Предположим также, что поровое давление p равно давлению в жидкости вдали от пузырька.

Система уравнений замыкается уравнениями состояния для твердой, жидкой и газовой фазы, а также реологическим соотношением для матрицы

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_{10}(1 - \beta_1 \sigma/3), \quad \rho_L = \rho_{L0}(1 + \beta_L p), \quad p_g = p_0(R_0/R)^x \\ \sigma &= I_1/(1 - m) - 3p, \quad \sigma^f = (K_b + 4G/3)e_1 + K_b \beta_1 p \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $\chi = 3\zeta$, ζ – показатель адиабаты, K_b , β_1^{-1} – модули объемной упругости пористой матрицы и составляющего ее материала, G – модуль сдвига матрицы, e_1 – продольная деформация матрицы, β_L – сжимаемость жидкости; I_1 – первый инвариант тензора эффективных напряжений.

Тепловые эффекты, присоединенная масса и изменение вязкости жидкости, связанное с наличием в ней пузырьков, не учитываются.

2. Линейное приближение. Будем считать, что в процессе распространения волны параметры среды слабо отклоняются от своего равновесного состояния (равновесные параметры среды обозначим нижним нулевым индексом):

$$m = m_0 + m^*, \quad p = p_0 + p^*, \quad \sigma^f = \sigma_0^f + \sigma^{f*}, \quad v_1 = v_1^*, \quad v_2 = v_2^*, \quad R^* = (R - R_0)/R_0$$

$$R^* \ll 1, \quad p^*/p_0 \ll 1, \quad m^*/m_0 \ll 1, \quad v_i^* \ll 1$$

Система (1.1)–(1.4) сводится к виду

$$(1 - m_0)(\rho_{10}\partial_{tt}u_1^* - \rho_{20}\partial_{tt}u_2^*) - \partial_x\sigma^{f*} = \mu m_0 k^{-1}(\partial_t u_2^* - \partial_t u_1^*)$$

$$\rho_{20}\partial_{tt}u_2^* + \partial_x p^* = -\mu m_0 k^{-1}(\partial_t u_2^* - \partial_t u_1^*)$$

$$\beta p^* - \beta_1 \partial_x \sigma^{f*} - \frac{3\phi_0}{1 - \phi_0} m_0 R^* + m_0 \partial_x u_2^* + (1 - m_0) \partial_x u_1^* = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial_{tt}R^* + \omega_0^2 R^* + \xi \partial_t R^* = -\vartheta p^*$$

$$\sigma^{f*} = K_p \partial_x u_1^* + K_b \beta_1 p^*$$

Здесь

$$\beta = (1 - m_0)\beta_1 + m_0\beta_L, \quad \omega_0^2 = \chi p_0 / (\rho_{L0} R_0^2), \quad \xi = (4R_0^{-2} + m_0 k^{-1}) \mu \rho_{L0}^{-1}$$

$$\vartheta = \rho_{L0}^{-1} R_0^{-2}, \quad K_p = K_b + 4G/3$$

где ω_0 – резонансная частота пузырька в безграничной жидкости (по Миннаерту), u_1^* – смещение i -й фазы.

Ниже наряду с общим случаем рассматривается и случай “мягких грунтов” ($\beta_1 K_b \ll 1$), когда можно пренебречь последним членом в реологическом соотношении (последнее равенство (2.1)) и вторым членом в третьем уравнении (2.1).

Для выявления характерных особенностей распространения продольных волн Френкеля – Био в пористых средах ищем решение системы (2.1) в виде гармонической волны (звездочка, которой помечены возмущения, далее опускается)

$$(u_1, u_2, p, R, \sigma^f) = (\delta u_1, \delta u_2, \delta p, \delta R, \delta \sigma^f) \exp[i(\omega t - \eta x)] \quad (2.2)$$

где ω – частота, η – волновое число.

Подставляя выражения (2.2) в систему (2.1), находим дисперсионное соотношение (связь волнового числа и частоты) исходя из условия нетривиальности решения системы, т.е. из равенства нулю определителя пятого порядка:

$$\det \|a_{mn}\| = 0 \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -(1 - m_0)\rho_{10}\omega^2 + i\omega\mu k^{-1}m_0^2, & a_{12} &= (1 - m_0)\rho_{20}\omega^2 - i\omega\mu k^{-1}m_0^2 \\
 a_{13} &= 0, & a_{14} &= 0, & a_{15} &= i\eta \\
 a_{21} &= -i\omega\mu m_0 k^{-1}, & a_{22} &= -\omega^2\rho_{20} + i\omega\mu m_0 k^{-1}, & a_{23} &= -i\eta, & a_{24} &= 0, & a_{25} &= 0 \\
 a_{31} &= -i\eta(1 - m_0), & a_{32} &= -i\eta m_0, & a_{33} &= \beta, & a_{34} &= -3\varphi_0 m_0 / (1 - \varphi_0), & a_{35} &= i\eta\beta_1 \\
 a_{41} &= 0, & a_{42} &= 0, & a_{43} &= \vartheta, & a_{44} &= (-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega\xi), & a_{45} &= 0 \\
 a_{51} &= iK_p\eta, & a_{52} &= 0, & a_{53} &= -\varepsilon, & a_{54} &= 0, & a_{55} &= 1
 \end{aligned}$$

Дисперсионное соотношение (2.3) можно представить как квадратное уравнение

$$Z^2 + Z(M_1 + iM_2\tilde{\omega}) + M_3 + iM_4\tilde{\omega} = 0 \tag{2.4}$$

где

$$Z = c_m^2 \frac{\eta^2}{\omega^2}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_c}, \quad c_m^2 = \frac{K_p}{(1 - m_0)\rho_{10}}, \quad \omega_c = \frac{m_0\mu}{k\rho_2} \tag{2.5}$$

ω_c – критическая частота по Био, связанная с наличием вязкости насыщающей жидкости или газа [2].

В общем случае пористой среды, насыщенной жидкостью с пузырьками, коэффициенты M_1, \dots, M_4 зависят от газосодержания φ_0 и радиуса пузырьков. В силу своей громоздкости, данные выражения не приводятся.

Дисперсионное уравнение (2.4) ранее исследовалось рядом авторов, например [1, 3, 11], но при упрощающих предположениях. Так, при отсутствии пузырьков ($\varphi_0 = 0$ и $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 > 0$ и $M_4 < 0$) можно получить известные выражения [1, 3, 10] для скоростей быстрой и медленной волн Френкеля – Био. Другой предельный случай – пузырьки в неограниченной жидкости [16].

Уравнение (2.4) имеет два решения, соответствующие волнам Френкеля – Био первого и второго рода.

3. Аналитическое решение при отсутствии вязкости. Для исследования влияния пузырьков на скорости волн в насыщенной пористой среде рассмотрим частный случай, когда насыщающая жидкость невязкая ($\mu = 0$). При этом удастся найти простое аналитическое выражение скоростей волн. Действительно, при данном предположении для класса “мягких грунтов” ($\beta_1 K_b \ll 1$) система (2.1) сводится к одному уравнению, которому соответствует дисперсионное соотношение

$$(a_6 - a_3\omega^2)\eta^4 - (a_5 - a_2\omega^2)\omega^2\eta^2 + (a_4 - a_1\omega^2)\omega^4 = 0 \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (1 - m_0)\beta\rho_{10}\rho_{20}R_0^2\rho_{L0}, & a_2 &= g(\beta)R_0^2\rho_{L0}, & a_3 &= K_p m_0 R_0^2 \rho_{L0} \\
 a_4 &= (1 - m_0)\bar{\beta}\rho_{10}\rho_{20}\chi\rho_0, & a_5 &= g(\bar{\beta})\chi\rho_0, & a_6 &= K_p m_0 \chi \rho_0, & \bar{\beta} &= \beta + \frac{3\varphi_0 m_0}{1 - \varphi_0} (\chi\rho_0)^{-1} \\
 \rho^* &= m_0\rho_{10} + (1 - m_0)\rho_{20}, & g(\beta) &= (1 - m_0)\rho^* + K_p\beta\rho_{20}
 \end{aligned}$$

Тогда имеем следующее выражение для фазовой скорости:

$$V_{\pm}^2 = \frac{\omega}{\operatorname{Re}[\eta(\omega)]} = \frac{2(a_6 - a_3\omega^2)}{(a_5 - a_2\omega^2) \pm \sqrt{(a_5 - a_2\omega^2)^2 - 4(a_4 - a_1\omega^2)(a_6 - a_3\omega^2)}} \quad (3.2)$$

В предельном случае очень низких частот

$$V_{\pm}^2|_{\omega \rightarrow 0} = V_{0\pm}^2 = \frac{2a_6}{a_5 \pm \sqrt{a_5^2 - 4a_4a_6}} = \frac{2K_p m_0}{g(\bar{\beta}) \pm \sqrt{g^2(\bar{\beta}) - 4K_p \bar{\beta} m_0 (1 - m_0) \rho_{10} \rho_{20}}} \quad (3.3)$$

Полная сжимаемость $\bar{\beta}$ теперь зависит от объемной концентрации пузырьков и произведения $\chi\rho_0$. Для теории Френкеля – Био (насыщенная пористая среда без пузырьков, $\varphi_0 = 0$) коэффициент $\bar{\beta} = \beta$.

Определим, волну какого типа характеризует каждое решение. Напомним, что при $\varphi_0 = 0$ общепринято называть медленную волну волной второго рода, а быструю – волной первого рода. Сохраним название “волна второго рода” для волны, медленной в области низких частот ($\omega \ll \omega_0$), а быструю волну назовем волной “первого рода”. Исходя из этого, решение (3.3) со знаком плюс соответствует волне второго рода, а со знаком минус – волне первого рода.

В случае высоких частот фазовые скорости стремятся к другим предельным значениям

$$V_{\pm}^2|_{\omega \rightarrow \infty} = V_{\infty\pm}^2 = \frac{-2a_3}{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}} = \frac{-2K_p m_0}{-g(\beta) \pm \sqrt{g^2(\beta) - 4K_p \beta m_0 (1 - m_0) \rho_{10} \rho_{20}}} \quad (3.4)$$

Теперь в выражении (3.4) знак плюс соответствует быстрой волне, а знак минус – медленной. Таким образом, можно предположить, что на какой-то частоте произошла кардинальная перестройка скоростей волн – первоначально более быстрая волна стала медленной, а медленная – быстрой. Отметим, что даже при малом, но конечном газосодержании асимптотические значения (3.3) и (3.4) фазовых скоростей отнюдь не совпадают за счет различия $\bar{\beta} = \beta$.

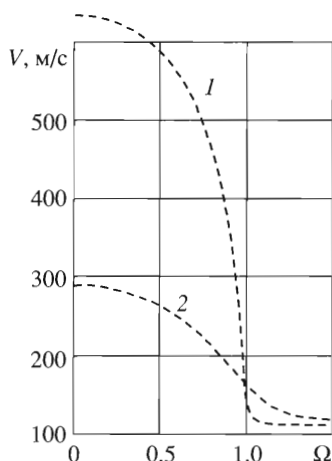
Прежде чем переходить к дальнейшему анализу, рассмотрим предельный переход к хорошо изученному случаю – жидкости с пузырьками (в отсутствие пористой среды $K_p = 0$, $m_0 = 1$). Коэффициенты a_6 и a_3 при этом равны нулю, а уравнение (3.1) имеет только один корень:

$$V^2 = \frac{\rho^*(\omega_0^2 - \omega^2)}{\rho_{10} \rho_{20} \beta (\omega_{gL}^2 - \omega^2)}; \quad \omega_{gL}^2 = \omega_0^2 \frac{\bar{\beta}_L}{\beta_L}, \quad \bar{\beta}_L = \beta_L + \frac{3\varphi_0}{1 - \varphi_0} (\chi\rho_0)^{-1} \quad (3.5)$$

Из выражения (3.5) явно следует существование двух ветвей колебаний – “низкочастотной” ($\omega < \omega_0$) и “высокочастотной” ($\omega > \omega_{gL}$). Интервал частот $\omega_0 < \omega < \omega_{gL}$ соответствует окну непрозрачности – в этом диапазоне при отсутствии вязкости квадрат фазовой скорости становится отрицательным и волна не может распространяться.

Возвратимся к исследуемому дисперсионному соотношению (3.1). Обратим внимание на то, что функция $\eta = \eta(\omega)$ пересекает ось абсцисс в двух точках: при нулевой частоте ($\omega = 0$) и частоте $\omega_g = a_4/a_1$. Точка $\omega = 0$ – начало низкочастотной ветви, а точка ω_g – высокочастотной:

$$\omega_g^2 = \omega_0^2 \frac{\bar{\beta}}{\beta} \quad (3.6)$$



Фиг. 1

В отличие от случая жидкости с пузырьками (второе соотношение (3.5)) граничная частота теперь зависит от пористости.

Все приводимые ниже расчеты выполнены при следующих параметрах: пористость $m_0 = 0.25$, сжимаемость жидкости $\beta_2 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, сжимаемость материала пористой матрицы $\beta_1 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, модуль объемной упругости пористой матрицы $K_b = 5 \cdot 10^7 \text{ Па}$, плотность жидкости $\rho_{20} = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность материала пористой матрицы $\rho_{10} = 2500 \text{ кг/м}^3$, стационарное давление $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, начальный радиус пузырьков $R_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, проницаемость $k = 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$.

На фиг. 1, 2 даны зависимости фазовой скорости V волны Френкеля – Био первого рода (штриховые кривые) и второго рода (сплошные кривые), а также волнового числа $\text{Re}\eta$ и коэффициента затухания $\Delta = -\text{Im}\eta$ от нормированной частоты $\Omega = \omega/\omega_0$ без учета диссипации ($\mu = 0$) при газосодержании $\phi_0 = 10^{-4}$ (кривые 1) и $\phi_0 = 10^{-3}$ (кривые 2).

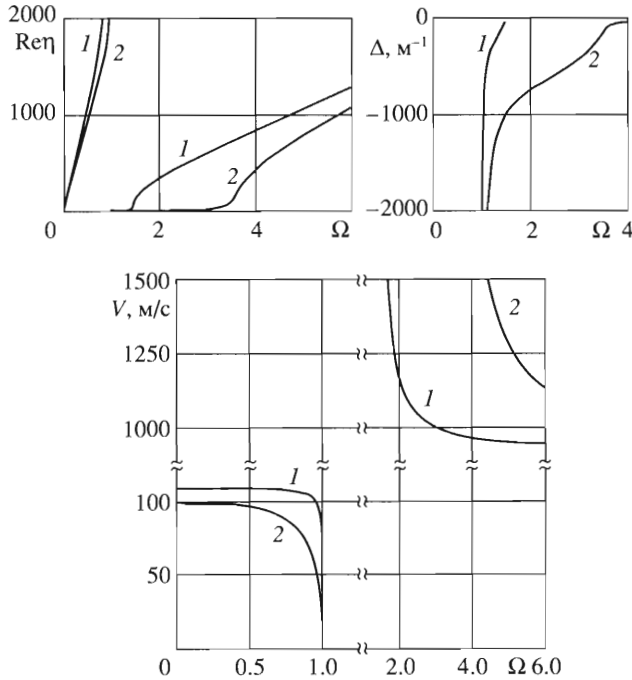
Пузырьковая фаза (даже при низком газосодержании) оказывает сильное влияние на характер волнового процесса, а именно дисперсионная кривая волны Френкеля – Био второго рода характеризуется двумя ветвями колебаний (фиг. 2) – низкочастотной при $\omega < \omega_0$ и высокочастотной $\omega > \omega_g$ (ω_g – граничная частота, начиная с которой возникает высокочастотная ветвь колебаний, см. формулу (3.6)).

Интервалу частот $\omega_0 < \omega < \omega_g$ в отсутствие диссипации соответствует “окно неустойчивости” волн второго рода: здесь квадрат волнового числа η меньше нуля, а $\text{Im}\eta > 0$ (фиг. 2). Для волны первого рода коэффициент затухания $\Delta = 0$ во всем интервале частот.

Важно также, что вблизи резонансной частоты колебаний радиуса пузырьков происходит перестройка волновых характеристик: волна первого рода становится медленной и наоборот – скорость волны второго рода существенно возрастает (ср. [14]).

Динамика волн в окнах неустойчивости исследовалась ранее [17–20], но на основе иных уравнений [21, 22], для вязкоупругой среды с осциллирующими твердыми фрагментами (гранулами).

4. Численное исследование дисперсионных кривых при учете вязкости. С физической точки зрения высокочастотная ветвь дисперсионной кривой волны Френкеля – Био второго рода характеризуется противофазными колебаниями давления в жидкости и радиуса пузырька [13]. Рассмотрим этот вопрос подробнее.



Фиг. 2

Введем эффективную сжимаемость β_g пузырьков [13] и сжимаемость газожидкостной смеси (U_g – объем пузырька)

$$\beta_g = -\frac{1}{U_g} \frac{\partial U_g}{\partial p}; \quad \beta_\Sigma = (1 - \varphi_0)\beta_L + \varphi_0\beta_g \quad (4.1)$$

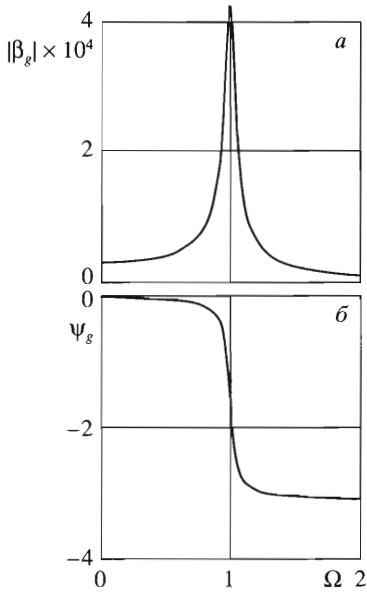
Пусть давление внутри жидкости и радиус пузырьков изменяются по гармоническому закону (2.2). Тогда для вязкой жидкости ($\mu \neq 0$) из первого равенства (4.1) и предпоследнего уравнения (2.1) следует, что сжимаемость газа – комплексная величина

$$\beta_g = 3[-R_0^2 \rho_{L0} \omega^2 + \chi p_0 + i\mu(4 + mk^{-1} R_0^2) \omega]^{-1} \quad (4.2)$$

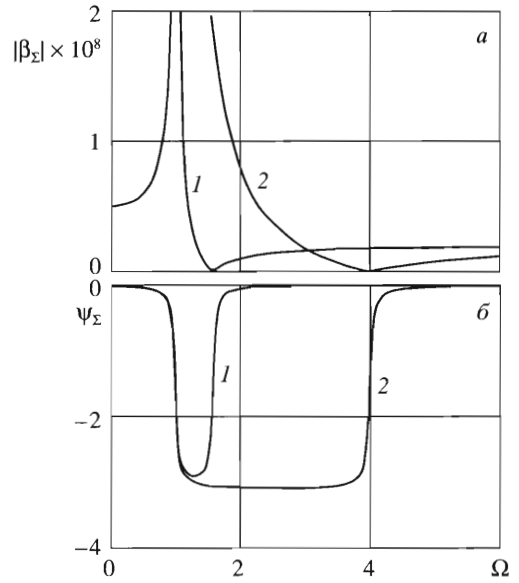
При этом $\text{Im}\beta_g$ определяет фазовую расстройку между вариацией давления в жидкости и радиусом пузырька [11].

При $\mu = 10^{-3}$ Па · с зависимости абсолютной величины сжимаемости ($|\beta_g|$) и фазовой расстройки Ψ_g от нормированной частоты $\Omega = \omega/\omega_0$ приведены на фиг. 3. Если при низких частотах ($\omega \ll \omega_0$) изменение давления и радиуса пузырька происходило в фазе, то на высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) – в противофазе (фиг. 3, б); на высоких частотах при росте давления в жидкости пузырек расширяется, что меняет и тип колебаний. Можно отметить, что на высоких частотах абсолютное значение сжимаемости газожидкостной смеси ($|\beta_\Sigma|$) стремится к сжимаемости только жидкости (фиг. 4, а). На графике частотной зависимости фазовой расстройки (Ψ_Σ) вариаций плотности газожидкостной смеси и давления интервал противофазных колебаний (фиг. 4, б) соответствует переходной зоне между низкочастотной и высокочастотной ветвями.

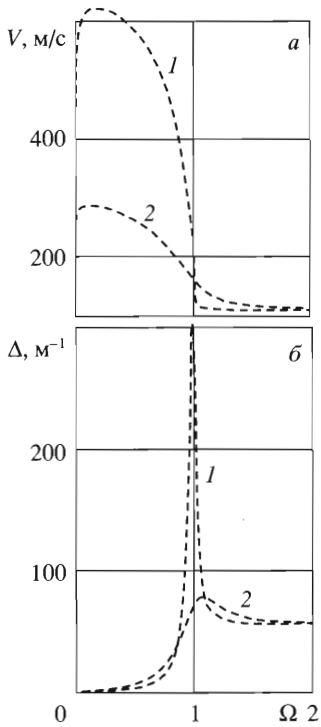
При значениях параметров, указанных в разд. 3, на фиг. 5 и 6 даны зависимости фазовой скорости V волн Френкеля – Био первого (штриховые кривые) и второго



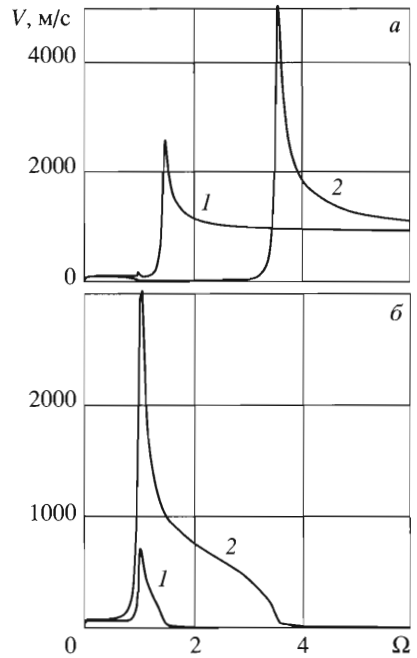
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

(сплошные кривые) рода и коэффициента затухания $\Delta = -\text{Im}\eta$ от нормированной частоты $\Omega = \omega/\omega_0$ с учетом диссипации ($\mu = 10^{-3}$ Па · с) при газосодержании $\phi_0 = 10^{-4}$ (кривые 1) и $\phi_0 = 10^{-3}$ (кривые 2).

Как следует из расчетов, даже при небольшой вязкости неустойчивость волны Френкеля – Био второго рода в области $\omega_0 < \omega < \omega_g$ подавляется, а обе ее дисперсионные ветви объединяются (фиг. 6, а). Важно подчеркнуть, что высокочастотная ветвь дисперсионной кривой волны второго рода соответствует быстро распространяющимся и слабозатухающим волнам: именно эти колебания можно регистрировать экспериментально (фиг. 6).

Волна первого рода при наличии пузырьков трансформируется из быстрой при низких частотах в медленную при высоких (фиг. 5, б), причем ее коэффициент затухания на низких частотах намного меньше ($\omega < \omega_0$), чем на высоких ($\omega > \omega_g$). Максимальное поглощение энергии волны происходит на резонансной частоте пузырьков (фиг. 5, а).

Рассмотрим вопрос о возможности изменения типа относительного движения газожидкостная смесь – пористая матрица для волн Френкеля – Био при резонансной частоте. Как известно [3], волна первого рода характеризуется синфазным движением жидкости и пористой матрицы, а волна второго рода – противофазным. Если в области резонансной частоты колебаний радиусов пузырьков наряду с изменением скоростей и затухания волн происходит и изменение фазовой расстройки между движением жидкости и пористой матрицы (синфазное движение меняется на противофазное и наоборот), то можно говорить о смене типа относительного движения в волнах Френкеля–Био.

В линейном приближении система уравнений (1.1–1.4) позволяет вычислить отношение массовых скоростей газожидкостной смеси v_2 и пористой матрицы v_1 , а также отношение возмущений напряжения в матрице и давления в газожидкостной смеси:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{J_1}{J_2}, \quad J_1 = \begin{vmatrix} 1 - \Pi \rho_{10}(1 - m_0) \\ \rho_{20}^{-1} & i\theta_c \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \rho_{20}m_0 & 1 - \Pi \\ 1 - i\theta_c & \rho_{20}^{-1} \end{vmatrix}, \quad \frac{\sigma^f}{p} = \Pi$$

$$\Pi = \frac{\varepsilon + (1 - i\theta_c - m_0)\zeta}{1 + (1 - i\theta_c)\zeta}, \quad \zeta = \frac{\rho_{10}Z}{\rho_{20}\Xi}, \quad \Xi = \begin{vmatrix} \rho_{20}m_0 & \rho_{10}(1 - m_0) \\ 1 - i\theta_c & i\theta_c \end{vmatrix}, \quad \theta_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}$$

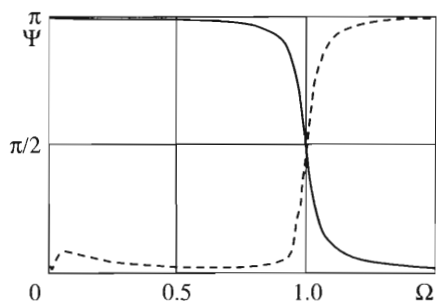
Обозначение для Z приведено выше (см. формулы (2.5)).

В отличие от предыдущих расчетов далее рассматривается “цементированный” геоматериал ($K_b\beta_1 \approx 0.5$), в котором роль эффективных напряжений значительнее. Остальные параметры задачи приведены в разд. 3 и остаются без изменения; $\mu = 10^{-3}$ Па · с, $\phi_0 = 10^{-4}$.

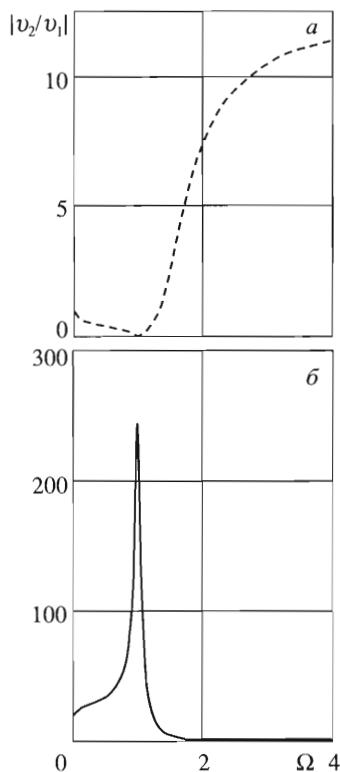
На фиг. 7 и 8 представлены зависимости абсолютного значения отношения массовых скоростей v_2/v_1 газожидкостной смеси и пористой матрицы, а также фазовой расстройки Ψ между смещениями газожидкостной смеси и пористой матрицы (в градусах) от нормированной частоты $\Omega = \omega/\omega_0$ для волн Френкеля – Био первого (штриховые кривые) и второго (сплошные кривые) рода.

При низкой частоте в волне Френкеля – Био второго рода газожидкостная смесь и пористая матрица движутся в противофазе (фиг. 7), но при частотах, превышающих ω_g , противофазное движение сменяется на синфазное (что и объясняет низкое затухание высокочастотной ветви).

Кроме того, если на низких частотах массовая скорость (по абсолютной величине) газожидкостной смеси v_2 превышает массовую скорость пористой матрицы v_1 , то при высоких частотах их массовые скорости близки (фиг. 8, б).



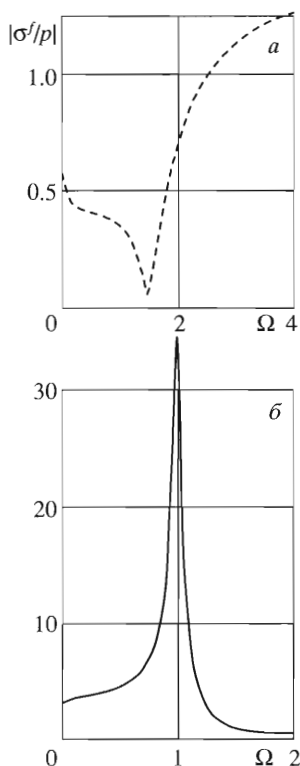
Фиг. 7



Фиг. 8

Для волны Френкеля – Био первого рода наблюдается обратная ситуация (фиг. 7 и 8, *a*) – на высоких частотах синфазное движение сменяется противофазным, а массовая скорость газожидкостной смеси становится в десять раз большей массовой скорости пористой матрицы.

Фиг. 9 позволяет проследить за частотной зависимостью абсолютной величины отношения возмущений эффективного напряжения σ^f и давления p в волнах Френкеля – Био первого (штриховые кривые) и второго (сплошные линии) рода при газосодержании $\varphi_0 = 10^{-4}$. Как и ранее, в зависимостях используется нормированная частота $\Omega =$



Фиг. 9

$= \omega/\omega_0$. Если на низких частотах в волне первого рода $|\sigma^f| \sim 0.6 |p|$ (фиг. 9, а), а в волне второго рода $|\sigma^f| \sim 4 |p|$, то в области высоких частот наблюдается противоположная ситуация. Отметим, что для волны Френкеля – Био второго рода (фиг. 9, б) максимум абсолютной величины отношения возмущений эффективного напряжения σ^f и давления p достигается на резонансной частоте пузырьков, так как на резонансной частоте пузырьков из-за увеличения сжимаемости жидкости резко уменьшается величина давления. При этом абсолютное значение отношения массовых скоростей v_2/v_1 также велико ($|v_2/v_1| \approx 250$).

Волна Френкеля – Био первого рода, наоборот, в окрестности резонансной частоты характеризуется повышенным давлением ($|\sigma^f/p| \approx 0.05$, фиг. 9, а).

Таким образом, на резонансной частоте пузырьков, во-первых, происходит смена типа относительного движения газожидкостная смесь – пористая матрица в волнах Френкеля – Био первого и второго рода (синфазное движение пористой матрицы и газожидкостной смеси сменяется противофазным и наоборот). Во-вторых, изменяется отношение абсолютных значений массовых скоростей газожидкостной смеси и пористой матрицы (если на низких частотах преобладали смещения матрицы, то на высоких большим будет смещение газожидкостной смеси и наоборот). Как следствие, меняется и отношение величин эффективного напряжения σ^f и давления p . Волны Френкеля – Био первого и второго рода по своему воздействию на матрицу “меняются ролями”.

Заметим, что с практической точки зрения важна волна с противофазным движением насыщающая жидкость (или газ) – пористая матрица, поскольку именно противофазность способствует очищению поровых каналов. Таким противофазным движением и преобладанием эффективного напряжения над давлением характеризуется

волна Френкеля – Био второго рода в насыщенной жидкостью пористой среде без пузырьков газа.

Однако, как отмечалось выше, при наличии пузырьков в области резонансной частоты происходит перестройка волн Френкеля – Био. На высоких частотах противофазное движение присуще уже волне первого рода, причем эффективное напряжение превышает давление ($|\sigma^f| \sim 1.4 |p|$). Одновременно значительно усиливается и ее затухание. Высокочастотная ветвь дисперсионной кривой волны Френкеля – Био второго рода характеризуется синфазным движением газожидкостная смесь – пористая матрица.

5. Выводы. Дана физическая интерпретация эффекта трансформации волн Френкеля – Био первого и второго рода при наличии пузырьков газа.

Перестройка волновых характеристик связывается с изменением сжимаемости газожидкостной смеси, а именно ее резким ростом на резонансной частоте пузырьков. Физически это означает, что если до резонанса “быстрая” волна была обусловлена в основном сжимаемостью газожидкостной смеси, то на резонансе она будет определяться в основном деформацией пористой матрицы, так как ее сжимаемость становится выше, чем сжимаемость газожидкостной смеси. Математически это соответствует смене знака в дисперсионном уравнении.

Показано, что при наличии газовых пузырьков в насыщенной пористой среде дисперсионная кривая волны Френкеля – Био второго рода состоит из двух ветвей – “низкочастотной” и “высокочастотной”. Эти ветви при отсутствии диссипации разделены окном непрозрачности – диапазоном между резонансной и граничной частотами. Отличие высокочастотной ветви состоит в том, что она описывает быстро распространяющиеся и слабозатухающие волны: именно указанные колебания можно регистрировать экспериментально. Затухание таких волн меньше, а скорость распространения выше, чем в волне первого рода. Наоборот, на частотах, превышающих граничную частоту, волна первого рода замедляется, а ее затухание возрастает.

В результате аналитического исследования параметров волн при насыщении пористой среды невязкой жидкостью с пузырьками газа получены выражения для асимптотических значений фазовых скоростей волн Френкеля – Био в низкочастотном и высокочастотном пределе, а также для граничной частоты (частоты, начиная с которой появляется высокочастотная ветвь колебаний волны второго рода).

С помощью численных расчетов обнаружено, что в окрестности резонансной частоты меняется характер относительного движения между газожидкостной смесью и пористой матрицей в продольных волнах обоих типов. Как следствие, меняется и отношение величин эффективного напряжения σ^f и давления p . Волны первого и второго рода по своему воздействию на матрицу “меняются ролями”.

Авторы благодарят рецензента за замечания, в особенности за указанную ссылку на работу [12], которая выпала из их поля зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1944. Т. 8. № 4. С. 133–150.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solids // J. Acoust. Soc. America. 1956. V. 28. P. 168–191.
3. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 339 с.
4. Вильчинская Н.А., Николаевский В.Н. Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 5. С. 91–100.
5. Логинов К.И., Верецагина Т.Н., Логинов И.В. Нелинейные акустические свойства пористых проницаемых флюидонасыщенных сред // Физические основы сейсмического метода. Нетрадиционная геофизика. / А.В. Николаев и И.П. Галкин. М.: Наука, 1991. С. 134–143.

6. *Elliott S.E., Willey B.F.* Compressional velocities of partially saturated unconsolidated sands // *Geophysics*. 1975. V. 40. № 6. P. 949–954.
7. *Gregory A.R.* Fluid saturation effects on dynamic elastic properties of sedimentary rocks // *Geophysics*. 1976. V.41. № 4. P. 895–921.
8. *Toksoz M.N., Cheng C.H., Timur A.* Velocities of seismic waves in porous rocks // *Geophysics*. 1976. V. 41. № 4. P. 621–645.
9. *Nakagawa K., Soga K., Mitchell J.K.* Observation of Biot compressible wave of the second kind in granular soils // *Geotechnique*. 2000. V. 47. № 1. P. 133–147.
10. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
11. *Smeulders D.M.J.* On wave propagation in saturated and partly saturated porous media. PhD Thesis, Technical University Eindhoven, 1992. 130 pp.
12. *Bedford A., Stern M.* A model for a wave propagation in gassy sediments // *J. Acoust. Soc. America*. 1983. V. 73. № 2. P. 409–417.
13. *Smeulders D.M.J., van Dongen M.E.H.* Wave propagation in porous media containing a dilute gas-liquid mixture: theory and experiments // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 343. P. 351–373.
14. *Лопатников С.Л., Горбачев П.Ю.* Распространение и затухание продольных волн в частично газонасыщенной пористой среде // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1987. № 8. С. 78–86.
15. *Донцов В.Е., Кузнецов В.В., Накоряков В.Е.* Волны давления в пористой среде, насыщенной жидкостью с пузырьками газа // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1987. № 4. С. 85–92.
16. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.П.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1983. 238 с.
17. *Трибельский М.И.* Коротковолновая неустойчивость и переход к хаосу в распределенных системах с дополнительной симметрией // *Успехи физ. наук*. 1997. Т. 167. №. 2. С. 167–190.
18. *Xi H. W., Toral R., Gunton J.D., Tribelsky M. I.* Extensive chaos in the Nikolaevskii model // *Phys. Rev. Ser. E*. 2000. V. 62. № 1. R17–R20.
19. *Malomed B.A.* Patterns produced by a short-wave instability in the presence of a zero mode // *Phys. Rev. Ser. A*. 1992. V. 45. № 2. P. 1009–1017.
20. *Tanaka D.* Critical exponents of Nikolaevskii turbulence // *Phys. Rev. Ser. E*. 2005. V.71. № 2. P. 025203–1–025203–4 (R).
21. *Nikolaevskii V.N.* Dynamics of viscoelastic media with internal oscillators // *Recent Advances in Engineering Science*. Berlin: Spring., 1989. P. 210–221.
22. *Береснев И.А., Митлин В.С., Николаевский В.Н.* Роль коэффициента нелинейности при возбуждении доминантных сейсмических частот // *Докл. АН СССР*. 1991. Т. 317. № 5. С. 1103–1107.