УДК 532.59:534.1

© 2006 г. В. В. Рындина

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ЧАСТОТЫ БРЕНТА–ВЯЙСЯЛЯ ПО ДИСПЕРСИОННЫМ КРИВЫМ

С помощью интегрального уравнения для частоты Брента–Вяйсяля (ЧБВ), построенного по последовательности дисперсионных кривых внутренних гравитационных волн в вертикально стратифицированном океане постоянной глубины, на основании известной модели [1], находятся коэффициенты тейлоровского разложения квадрата ЧБВ в предположении его аналитичности и некоторых условий симметрии. В предположении, что квадрат ЧБВ представим в виде многочлена четвертого порядка от глубины рассматриваемого слоя жидкости, показывается, что одной и той же последовательности дисперсионных кривых соответствуют не более двух таких многочленов. Находятся коэффициенты этих многочленов.

Задача восстановления частоты Брента–Вяйсяля (ЧБВ) по дисперсионным кривым (ДК) стала актуальной после успехов в расшифровке картины внутренних волн, проявляющихся на поверхности океана в виде перемещающихся с определенной скоростью световых бликов. По полученным наблюдениям можно приближенно найти уравнения нескольких первых ДК. Между множеством последовательностей ДК и множеством ЧБВ нет взаимно однозначного соответствия, поэтому представляет интерес задача нахождения множества ЧБВ, соответствующих заданной последовательности ДК, в достаточно широком классе ЧБВ. Некоторые вопросы, касающиеся этой тематики, рассматривались ранее [2–7].

1. Постановка задачи. Рассматривается задача восстановления частоты ЧБВ для вертикально стратифицированного океана постоянной глубины по последовательности ДК внутренних гравитационных волн. В качестве математической модели такого океана взята модель [1], сводящаяся к следующей краевой задаче:

$$w'' - \frac{\mu(z)}{g}w' + \frac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2-f^2}k^2 w = 0, \quad w = w(z), \quad z \in [-H, 0]$$
$$w(-H) = 0, \quad w'(0) = g\frac{k^2}{\omega^2-f^2}w(0) \tag{1.1}$$

где w – амплитудная функция вертикальной составляющей скорости частиц жидкости, $\mu(z)$ – квадрат ЧБВ, H – глубина океана, g – ускорение силы тяжести, f – параметр Кориолиса, k – волновое число, ω – частота свободных гармонических волн.

Отдельные вопросы восстановления ЧБВ по ДК в некоторых классах рассматривались ранее. В частности, был предложен [6] алгоритм восстановления ЧБВ по последовательности ДК в случае, когда она известна на отрезке $[-H, -aH]$, $a \in (0, 1)$ и приведены примеры параметрических классов, в которых ЧБВ восстанавливается однозначно.

В данной работе рассматривается задача восстановления аналитической функции $\mu(z)$, симметричной относительно середины отрезка $[-H, 0]$, а также случай, когда $\mu(z)$ – многочлен четвертого порядка. В первом случае ЧБВ определяется однозначно по последовательности ДК, во втором случае показывается, что разыскиваемых многочленов может быть не более двух. В качестве примера построенной теории рассматривается также восстановление ЧБВ в классе многочленов второй степени. Показывается, что таких многочленов может быть также не более двух.

2. Основные соотношения. Переходя к безразмерным величинам, новым параметрам и новой функции

$$x = -\frac{z}{H}, \quad u = \frac{w}{(gH)^{1/2}}, \quad \eta^2 = \frac{H}{g}\omega^2, \quad \xi^2 = H^2k^2, \quad q(x) = \frac{g}{H}\mu(-Hx)$$

$$F^2 = \frac{H}{g}f^2, \quad \lambda = \frac{\xi^2}{\eta^2 - F^2}, \quad s = \lambda^2 - \lambda F^2 - \xi^2, \quad \upsilon = u\exp(\lambda x)$$

перейдем от краевой задачи (1.1) к задаче

$$\upsilon'' + (q(x) - 2\lambda)\upsilon' = -s\upsilon; \quad \upsilon'(0) = 0, \quad \upsilon(1) = 0 \tag{2.1}$$

Краевая задача (2.1) эквивалентна интегральному уравнению (ИУ)

$$z(x) \triangleq \upsilon(x)\sqrt{\rho(x)}\exp(-\lambda x) = s\int_0^1 K(x, t, \lambda)z(t)dt \tag{2.2}$$

с симметричным ядром

$$K(x, t, \lambda) = \exp[-\lambda(x+t)]\sqrt{\rho(x)\rho(t)}\int_\sigma^1 \frac{\exp(2\lambda y)}{\rho(y)}dy$$

$$\sigma = \begin{cases} x, & t < x \\ t, & t > x \end{cases}, \quad \rho(x) = \exp\left(\int_0^x q(t)dt\right)$$

Ядро $K(x, t, \lambda)$ при любом вещественном λ удовлетворяет условиям осцилляционности теоремы Г.М. Финкельштейна и, следовательно, является осцилляционным, поэтому ИУ (2.2) имеет счетное множество положительных и простых характеристических значений $s_0(\lambda) < s_1(\lambda) < \dots$. Функции $s_j(\lambda)$ ($j = 0, 1, \dots$) могут быть определены по ДК задачи (1.1) [6].

Далее получим интегральное уравнение для безразмерной ЧБВ – функции $q(x)$. Для этого рассмотрим след ядра $K(x, t, \lambda)$

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s_n(\lambda)} \tag{2.3}$$

Он допускает представление

$$A(\lambda) = \int_0^1 K(x, x, \lambda)dx = \int_0^1 \exp(2\lambda x)\Phi(x)dx; \quad \Phi(x) = \int_x^1 \frac{\rho(t-x)}{\rho(t)}dt \tag{2.4}$$

Функция $\Phi(x)$ выражается через $A(\lambda)$ с помощью обратного преобразования Лапласа, и таким образом находится последовательностью ДК, поскольку ею по формуле (2.3) определяется след $A(\lambda)$. Записав функцию $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = \int_x^1 \exp\left(\int_t^{t-x} q(y)dy\right)dt \tag{2.5}$$

получим основное ИУ для $q(x)$.

Можно проверить, что если функция $q(x)$ – решение уравнения (2.5), то и функция $q(1-x)$ также его решение. Кроме того, заметим, что если $\upsilon_j(x)$ – собственная функция задачи (2.1), отвечающая собственному значению $s_j(\lambda)$, то функция

$$w_j(x) = \int_0^{1-x} \rho(t)\upsilon_j(t)\exp(-2\lambda t)dt$$

будет собственной функцией краевой задачи

$$\upsilon'' + (q(1-x)-2\lambda)\upsilon' = -s\upsilon; \quad \upsilon'(0) = 0, \quad \upsilon(1) = 0 \tag{2.6}$$

отвечающей тому же самому собственному значению $s_j(\lambda)$. Из этого следует, что краевые задачи (2.1) и (2.6) имеют одни и те же собственные значения. Следовательно, обратная спектральная задача для краевой задачи (2.1) имеет по крайней мере два решения $q_1(x)$, $q_2(x)$, связанные условием $q_1(x) = q_2(1-x)$.

3. Восстановление функции $q(x)$ по последовательности ДК в случае, когда функция $q(x)$ симметрична относительно середины отрезка [0, 1] и аналитична в круге $|z| < 1$. Допустим, что функция $q(x) \in A_1$ и удовлетворяет условию $q(x) = q(1-x)$. Найдем коэффициенты тейлоровского разложения функции $q(x)$, удовлетворяющей уравнению (2.5) в этом случае. Рассмотрим функцию $F(x) = \Phi(1-x)$. После замены переменной под знаком интеграла в выражении для функции $F(x)$ получим представление

$$F(x) = \int_0^x \exp\left(\int_0^{x-u} q(y)dy\right)\exp\left(\int_1^u q(1-y)dy\right)du \tag{3.1}$$

Было показано [6], что

$$\int_0^1 q(t)dt = -1-\Phi'(0)$$

Вводя функцию $f(x) = F(x)\exp(-1-\Phi'(0))$ и учитывая, что $q(y) = q(1-y)$, получим из соотношения (3.1)

$$f(x) = \int_0^x \rho(u)\rho(x-u)du \tag{3.2}$$

Разложим функции $\rho(u)$ и $f(x)$ в степенные ряды

$$\rho(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Заметим что $c_0 = 1, f_0 = 0, f_1 = 1$. Подставляя степенные разложения в выражение (3.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов c_k ($k = 0, 1, \ldots$)

$$f_n = \sum_{k+j+1=n} c_k c_j \frac{k!j!}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Первое уравнение дает равенство $c_0^2 = f_1$. Для c_0 нужно выбрать значение 1. Из второго уравнения получаем $c_1 = f_2$. Последующие коэффициенты рекуррентно находятся из равенств

$$c_{n-1} = \frac{n}{2}\left[f_n - \sum_{k=1}^{n-2} c_k c_{n-k-1}\frac{k!(n-k-1)!}{n!}\right], \quad n = 3, 4, \ldots \tag{3.3}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае функция $q(x) = \rho'(x)[\rho(x)]^{-1}$ однозначно восстанавливается по последовательности ДК с помощью формул (3.3).

4. Нахождение решений основного уравнения в классе многочленов четвертого порядка. Заметив, что если $q(x)$ – многочлен степени n, то $\Phi(x)$ – целая функция порядка $n + 1$, можно найти степень многочлена $q(x)$, установив порядок роста функции $\Phi(x)$.

Остановимся на случае, когда разыскиваемый многочлен $q(x)$ имеет четвертый порядок. Поскольку функция $q(1 - x)$ также является многочленом четвертого порядка, основное уравнение разрешимо, вообще говоря, неоднозначно. Далее будет показано, что имеется не более двух решений.

Итак, пусть

$$q(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon, \quad \alpha \neq 0$$

Задача заключается в нахождении коэффициентов этого многочлена по функции $\Phi(x)$. Подставив выражение для $q(x)$ в соотношение (2.5), после очевидных преобразований имеем

$$\Phi(x) = x\int_1^{\frac{1}{x}} \exp\left\{\frac{\alpha}{5}x^5[(u-1)^5 - u^5 + k(x, u)]\right\}du$$

где функция $k(x, u)$ равномерно стремится к нулю по $u \in [-1, 1]$ при $x \to \infty$.

Коэффициент α можно найти, используя асимптотическое поведение функции $\Phi(x)$ при больших значениях аргумента. Для этого сначала нужно определить знак α, устанавливаемый в зависимости от того, стремится функция $\Phi(x)$ при $x \to +\infty$ к нулю или к бесконечности. Это вытекает из того, что

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = -\infty \quad \text{при} \quad \alpha < 0$$

Установив знак α, находим значение α, используя асимптотический метод Лапласа,

$$\alpha = -80\lim(x^{-5}\ln|\Phi(x)|) \quad \text{при} \quad x\,\mathrm{sign}\,\alpha \to +\infty$$

Для нахождения остальных коэффициентов используем следствия, полученные из основного уравнения путем его непосредственного дифференцирования [6],[1]

$$q(0) + q(1) = \Phi_1, \quad \int_0^1 q^n(t)dt = \Phi_{n+1}, \quad n = 1, 2, \quad q'(0) - q'(1) - q(0)q(1) = \Phi_4 \tag{4.1}$$

$$q''(0) + q''(1) - 3q(1)q'(1) + 3q(0)q'(0) - q(0)q'(1) + q(1)q'(0) - 2\Phi_1 q(0)q(1) = \Phi_5$$

где

$$\Phi_1 = P\Phi''(1), \quad \Phi_2 = -1 - \Phi'(0), \quad \Phi_3 = \Phi''(0) - \Phi_1$$

$$\Phi_4 = -\Phi_1^2 - P\Phi^{(3)}(1), \quad \Phi_5 = P\Phi^{(4)}(1) - \Phi_1^3; \quad P = -[\Phi'(1)]^{-1}$$

Записав равенства (4.1) через коэффициенты многочлена $q(x)$, получим пять уравнений, которым должны удовлетворять эти коэффициенты.

Из первого, второго и четвертого равенств (4.1) получим три уравнения

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + 2\varepsilon = \Phi_1, \quad \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{2}\delta + \varepsilon = \Phi_2$$

---

[1] См. также: *Рындина В.В.* Коэффициенты параметра стратификации жидкости в классе многочленов не выше четвертой степени. Ростов-на-Дону., 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 18.10.02. № 1778-В02.

$$4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \varepsilon(\Phi_1 - \varepsilon) = -\Phi_4$$

Положив

$$T = \varepsilon(\Phi_1 - \varepsilon) \tag{4.2}$$

получим из этих уравнений

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{5}{2}T, \quad \beta = \beta_0 + 4T + 2(\delta + 2\varepsilon), \quad \gamma = \gamma_0 - \frac{3}{2}T - 3(\delta + 2\varepsilon) \tag{4.3}$$

Постоянные

$$\alpha_0 = -15\Phi_1 + 30\Phi_2 - \frac{5}{2}\Phi_4, \quad \beta_0 = 28\Phi_1 - 60\Phi_2 + 4\Phi_4, \quad \gamma_0 = -12\Phi_1 + 30\Phi_2 - \frac{3}{2}\Phi_4$$

однозначно определяются функцией $\Phi(x)$, а следовательно, и последовательностью ДК.

Из первого равенства (4.3) получаем, что $T = 2/5(\alpha_0 - \alpha)$. Поскольку α, как было показано выше, однозначно определяется последовательностью ДК, то T также однозначно определяется последовательностью ДК. Уравнение (4.2) относительно ε определяет, вообще говоря, два значения ε_1, ε_2. Подставив вместо коэффициентов α, β, γ многочлена $q(x)$ выражения (4.3) и используя первое и пятое равенства (4.1), получим равенство

$$2\delta(\Phi_1 - 2\varepsilon) = \Phi_6 - 2\varepsilon(\Phi_4 + T) \tag{4.4}$$

где

$$\Phi_6 = -60\Phi_1 + 120\Phi_2 - 12\Phi_4 + 3\Phi_1\Phi_4 + T(\Phi_1 - 12) - \Phi_5$$

Если корни уравнения (4.2) различны, то $\Phi_1 - 2\varepsilon_j \neq 0$ ($j = 1, 2$), и из равенства (4.4) получим два значения δ, соответствующие двум различным значениям ε:

$$\delta_j = \frac{\Phi_6 - 2\varepsilon_j(\Phi_4 + T)}{2(\Phi_1 - 2\varepsilon_j)}, \quad j = 1, 2$$

Из формул (4.3) получаем в этом случае соответствующие значения β_j, γ_j ($j = 1, 2$).

Таким образом, если корни уравнения (4.2) различны, то существуют две функции

$$q_j(x) = \alpha x^4 + \beta_j x^3 + \gamma_j x^2 + \delta_j x + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2$$

удовлетворяющие уравнению (2.5).

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то $\varepsilon_j = \Phi_1/2$, поэтому $\Phi_1 - 2\varepsilon_j = 0$ и из равенства (4.4) величина δ не определяется. В этом случае для нахождения коэффициента δ привлечем третье равенство (4.1); получим

$$\int_0^1 [P_1(x) + \delta(2x^3 - 3x^2 + x)]^2 dx = \Phi_3$$

$$P_1(x) = \alpha x^4 + \beta_1 x^3 + \gamma_1 x^2 + \frac{1}{2}\Phi_1; \quad \beta_1 = \beta_0 + 4T + 2\Phi_1, \quad \gamma_1 = \gamma_0 - \frac{3}{2}T - 3\Phi_1 \tag{4.5}$$

Многочлен $P_1(x)$ однозначно определяется последовательностью ДК.

Из соотношения (4.5) получаем квадратное уравнение для δ

$$\frac{1}{210}\delta^2 + 2\theta_1\delta + \theta_2 = \Phi_3$$

$$\theta_1 = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + x)P_1(x)dx, \quad \theta_2 = \int_0^1 P_1^2(x)dx \tag{4.6}$$

из которого определяются, вообще говоря, два корня: δ_1 и δ_2. Из формул (4.3) получим в этом случае соответствующие значения β_j, γ_j (j = 1, 2), т.е. в случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ существуют два решения уравнения (2.5), если $\delta_1 \neq \delta_2$, и одно решение, если $\delta_1 = \delta_2$.

Не существует других многочленов четвертого порядка, кроме найденных выше, с той же самой последовательностью ДК.

В случае, когда $q(x)$ оказывается многочленом степени ниже четвертой, его коэффициенты могут быть найдены из полученных выше формул путем приравнивания нулю соответствующих коэффициентов. Однако проще провести самостоятельное решение подходящей системы уравнений, вытекающей из основного уравнения (2.5). Так, в классе многочленов второй степени

$$q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma; \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in R$$

из первого, второго и четвертого равенств системы (4.1) получаем для нахождения коэффициентов α, β, γ систему уравнений, решение которой приводит, вообще говоря, к двум функциям, составляющим решение уравнения (2.5):

$$q_j(x) = \alpha x^2 - (\alpha - (-1)^j \sqrt{L})x + \frac{1}{2}(\Phi_1 - (-1)^j \sqrt{L}), \quad j = 1, 2$$

$$\alpha = 3\Phi_1 - 6\Phi_2, \quad L = \Phi_1^2 + 8\alpha + 4\Phi_4$$

Подробное исследование решений уравнения (2.5) в классе многочленов третьей степени проведено ранее[2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
2. *Рындина В.В.* Зависимость дисперсионных кривых внутренних волн стратифицированного океана от частоты Брента–Вяйсяля // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 741–747.
3. *Потетюнко Э.Н.* Волновые движения неоднородной жидкости // Вопросы волновых движений жидкости. Ростов н/Д: Союз науч. и инж. обществ, Рост. обл. правл., 1989. С. 81–171.
4. *Rindina V.V., Machulina L.A.* Re-establishment of the stratification parameter of an ocean by the dispersion curves of internal gravity waves // Mathematical Modelling and Applied Mathematics Intern. Conf., Moscow-Vilnius, 1990. Amsterdam: North-Holland, 1992. P. 18–23.
5. *Мачулина Л.А., Рындина В.В., Черкесов Л.В.* Восстановление частоты Вяйсяля–Брента по спектральным характеристикам свободных колебаний стратифицированной жидкости // Волновые движения жидкости и смежные вопросы. Краснодар: Изд-во Кубан. ун-та, 1991. С. 92–98.
6. *Рындина В.В.* Некоторые вопросы единственности восстановления частоты Брента–Вяйсяля по дисперсионным кривым // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 121–126.
7. *Потетюнко Э.Н., Черкесов Л.В., Шубин Д.С.* Восстановление распределения плотности океана по его волновому спектру // Прикл. гидромеханика. 2000. Т. 2(74). № 4. С. 73–81.

Ростов-на-Дону
e-mail:vvrynd@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
17.IX.2004

[2] *Рындина В.В., Река Н.А.* О восстановлении квадрата частоты Брента–Вяйсяля по дисперсионным кривым в классе многочленов третьей степени. Ростов-на-Дону, 1999. 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.07.99. № 2439-99.