

УДК 532.5

© 2006 г. О. В. Войнов

ТЕЧЕНИЯ С КВАЗИРАВНОВЕСНЫМИ СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ В ДИНАМИКЕ СМАЧИВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассматриваются медленные течения вязкой жидкости со свободной границей по поверхности твердого тела при наличии движущейся линии контакта трех фаз. Развивается асимптотическая теория второго порядка, описывающая закономерности изменения свободной границы под действием капиллярных сил при конечном динамическом краевом угле.

Известны [1–3] приближенные степенные зависимости краевого угла от безразмерной скорости при смачивании поверхности, а также от безразмерного времени при растекании капли на стенке, которые предлагалось рассматривать [4] как законы подобия в динамике смачивания. Однако из-за влияния масштабного фактора [1, 2] их можно понимать как законы подобия только в некотором узком смысле.

Возникновение динамического (видимого) краевого угла – следствие многомасштабности вязкого течения, описываемого общей асимптотикой [1]. Большой параметр теории – это ширина диапазона масштабов на логарифмической шкале. Теория второго порядка описывает масштабный эффект динамики смачивания на основе большого параметра или обратного ему малого параметра. Асимптотические решения второго порядка задач динамики смачивания известны для малых краевых углов [2]. Рассматриваемые ниже течения при конечных динамических краевых углах (при смачивании трубы и самопроизвольном растекании капли на стенке) объединяет общее свойство квазиравновесия свободных границ на макромасштабе – максимальном масштабе в многомасштабном течении вблизи движущейся линии контакта.

Основы теории статики смачивания заложили Юнг [5] и Гаусс [6] (см. также труды Гиббса [7]). В теории смачивания есть прямая связь между статикой и динамикой в форме уравнения энергии на движущейся линии контакта [1]. Это уравнение позволяет описывать экспериментальные зависимости [8] краевого угла от скорости смачивания, обусловленные процессами молекулярного уровня.

В динамике смачивания сухой поверхности медленное макроскопическое течение со свободной границей зависит от течения на молекулярном (микроскопическом) масштабе вблизи линии смачивания. Так, известно, что при полном смачивании и малой скорости смачивания асимптотика угла наклона свободной границы включает микромасштаб, определяемый дальнедействующими молекулярными силами Ван-дер-Ваальса [2]. Форма пленки на микромасштабе определяется ее вязким течением под действием сил Ван-дер-Ваальса [9, 2, 4].

Известно [10], что асимптотика вблизи линии контакта нормального напряжения в задаче главного приближения на свободной границе на макромасштабе содержит кроме тейлоровского сингулярного слагаемого логарифмическую особенность, что полезно иметь в виду при численных расчетах. В теории конечных углов асимптотическое сращивание разложений угла наклона осуществляется на основе статики на макромасштабе с точностью до величины порядка малого параметра задачи. В отличие от аналитической теории при малых краевых углах [2, 11–13] для построения теории второго порядка при конечных углах необходимы [1] численные расчеты напряжения на свободной границе.

От растекания жидкости по смачиваемой ею поверхности существенно отличается растекание по абсолютно несмачиваемой поверхности [14], когда особенность напряжения на линии контакта – интегрируемая; этот случай соответствует однородной задаче Релея о течении в угле [15].

1. Соотношения на движущейся линии контакта. При постановке задач динамики смачивания твердого тела необходимо иметь в виду, что существуют механизмы дина-

мики смачивания, действующие вне рамок гидродинамики, на молекулярном (микроскопическом) масштабе. Их описывает уравнение энергии на движущейся линии контакта [1]

$$\cos \alpha_m = (\sigma_2 - \sigma_1 - G \operatorname{sign}(v)) / \sigma \quad (1.1)$$

Здесь v – скорость движения линии контакта по поверхности твердого тела, $G = G(v)$ – коэффициент диссипации энергии $E_m = |v|G(v) \geq 0$ на линии контакта на единице ее длины в единицу времени, σ_1 и σ_2 – плотности свободных поверхностных энергий на границах раздела твердое тело – жидкость и твердое тело – газ соответственно, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, $\alpha_m(v)$ – микроскопический угол смачивания. Если микродиссипация $E_m = 0$, то получим статический краевой угол $\alpha_m(v) = \alpha_s$; при этом уравнение энергии (1.1) согласуется с уравнением Юнга [5] и соответствует вариационной постановке Гаусса [6] задачи капиллярного равновесия жидкости в контакте с твердым телом. Уравнение (1.1) – одно из основных в теории смачивания твердых тел, хотя его нет в обзоре Де Жена [4]. При помощи уравнения энергии получено описание следующих важных эффектов динамики смачивания.

1°. Если при неполном смачивании $G \rightarrow \operatorname{const} > 0$ для $v \rightarrow 0$, то уравнение (1.1) описывает [1] эффект зависимости краевого угла от знака малой скорости v (гистерезис статического краевого угла смачивания).

Соотношение (1.1) при $G = \operatorname{const} > 0$ для растущей скорости v описывает также [1] другой эффект – постоянство угла при увеличении скорости (эффект Аблетта [8]), который проявляется для некоторых систем и маловязких жидкостей при неполном смачивании. Этот эффект используется в компьютерном моделировании течений при ударе жидких капель о твердую стенку [16–18]. Уравнение (1.1) верно для произвольного движения линии контакта независимо от числа Рейнольдса. Отсюда ясно, почему результаты опытов Аблетта, выполненных при малых числах Рейнольдса, можно применять для моделирования течений при больших числах Рейнольдса. Опыты по динамике смачивания при скоростях, много больших, чем в опытах Аблетта, представляют интерес, однако такие опыты есть только для некоторых частных случаев при скоростях порядка 1м/с [17].

Уравнение (1.1) с переменным коэффициентом микродиссипации энергии G для случая разности энергий $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma < 0$ описывает зависимость $\alpha_m(v)$, проявляющуюся в опытах Аблетта при достаточно малой скорости v .

2°. В случае полного смачивания ($\Delta\sigma > 0$) жидкость полностью растекается по поверхности. При малой скорости растекания фронт смачивания может опережать сверхтонкая текущая (прекурсионная) пленка [2]. При этом баланс энергии на микроуровне подчиняется уравнению энергии [1] при $G = \Delta\sigma$, $\alpha_m = 0$. Увеличение разности поверхностных энергий $\Delta\sigma > 0$ за счет замены одного твердого тела на другое не ускоряет растекания жидкости, так как краевой угол α_m минимален и верно равенство $G = \Delta\sigma$ для коэффициента диссипации энергии внутри пленки. Баланс энергии на основе уравнения (1.1) более общий, чем баланс энергии при течении прекурсионной пленки, данный [4] на основе частной модели вязкого течения пленки под действием сил Ван-дер-Ваальса [2, 4].

3°. Известному случаю $\Delta\sigma > 0$ и $G - \Delta\sigma > 0$ [1] соответствует положительный краевой угол α_m , что означает эффект появления краевого угла при полном смачивании за счет микродиссипации энергии E_m . Такой краевой угол возможен в опытах с маловязкими жидкостями, и его стали наблюдать сравнительно недавно [19].

Рассмотрим вязкую диссипацию энергии E в течении вблизи движущейся линии контакта на единице ее длины, предполагая течение многомасштабным. Если диссипация E велика, то видимый краевой угол α_0 может заметно отличаться от микроскопического угла α_m [1].

Ограничимся случаем неполного смачивания ($\Delta\sigma < 0$) и сравним диссипацию E с микродиссипацией E_m . При $E \gg E_m$ зависимость α_m от ν несущественна для значений видимого угла α_0 .

Запишем оценку вязкой диссипации [1] для малых значений углов $\alpha_0 \approx \alpha_m$

$$E \approx 3\mu\nu^2\alpha_0^{-1}s; \quad s = \ln(r_0/r_m) \gg 1 \quad (1.2)$$

Здесь μ – динамическая вязкость жидкости, r_0 – макромасштаб расстояния от линии контакта, r_m – микромасштаб [1], ему соответствует микромасштаб расстояния свободной границы до стенки h_m , дуги радиусов r_0 и r_m – части границы рассматриваемой области течения. Запишем, согласно соотношениям (1.1) и (1.2), отношение двух диссипаций в виде

$$\frac{E}{E_m} \approx \frac{3s}{\alpha_0} \frac{\mu\nu}{G(\nu)} \quad (1.3)$$

Если значение $G \sim |\Delta\sigma|$ немало и существенна микродиссипация E_m , то отношение (1.3) в силу (1.1) мало при том же условии, при котором мал вклад вязкости в приближенном выражении для угла $\alpha_0^3 = \alpha_m^3 + 9s\mu\nu/\sigma$ [1, 2]. При этом малая вязкость не влияет на видимый краевой угол, который близок к микроуглу: $\alpha_0 \approx \alpha_m$. Отметим, что вязкая диссипация E может быть пренебрежимо малой и в случае $E_m = 0$, и при малых числах Рейнольдса течения.

Далее рассматриваем случай высоковязких жидкостей, когда важна роль вязкости.

2. Асимптотическая теория динамики смачивания второго порядка. Рассмотрим при малых значениях чисел Бонда, Рейнольдса и капиллярного числа $Ca = \mu\nu/\sigma$ две задачи динамики нелетучей жидкости: о стационарном заполнении круглой трубы и о нестационарном растекании капли на плоской стенке. Малость числа Бонда используем при решении задач на макромасштабе.

В первой задаче жидкость движется внутри круглой трубы с постоянным средним расходом и граница раздела жидкость–газ, пересекающая стенку трубы, отличается от статического капиллярного мениска из-за действия нормальных вязких напряжений в жидкости. Необходимо найти форму свободной границы.

Вторая задача – о самопроизвольном растекании капли на стенке – в отличие от первой является нестационарной и свободная граница жидкости изменяется со временем, как и радиус линии контакта. Вообще говоря, это задача с начальными условиями и необходимо задавать начальную форму капли. Рассматриваются нестационарные решения, близкие к квазиравновесным в каждый момент времени. Возможность такого подхода обоснована тем, что в нестационарной задаче растекания капли преимущественная диссипация энергии происходит вблизи линии контакта и форма капли в каждый момент времени "успевает" релаксировать к равновесной, благодаря малой скорости движения края капли.

Система – макроскопическая, и для масштабов, существенно больших некоторого малого масштаба, течение описывается уравнениями Стокса. На твердом теле скорость $\mathbf{u} = 0$. На свободной границе S касательное напряжение $P_\tau = 0$ и скачок нормального напряжения равен капиллярному давлению Лапласа $2\sigma H = P_n + p_0$ (P_n – нормальное напряжение в жидкости, p_0 – давление в газе, H – средняя кривизна), нормальная скорость жидкости на S равна нормальной скорости w поверхности: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = w$.

Вблизи движущейся линии контакта справедлива универсальная асимптотика угла наклона касательной α к свободной поверхности [1–3]

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha_m}^{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - \cos\alpha \right) d\alpha + Ca \ln \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_*} = Ca \ln \frac{h}{h_m}, \quad h \gg h_m \quad (2.1)$$

Микроугол α_m соответствует уравнению (1.1); $\alpha_* = \alpha_m$ при $\alpha_m \geq |9Ca|^{1/3}$ и $\alpha_* = (9Ca)^{1/3}$ в противном случае; такое определение постоянной α_* обеспечивает известное [3] согласие асимптотики (2.1) с асимптотической теорией для малых значений угла при полном смачивании ($\alpha_m = 0$) [2]. Асимптотика (2.1) в течении с конечным числом Рейнольдса справедлива при малом локальном числе Рейнольдса $h\nu/\nu \ll 1$ (ν – кинематическая вязкость), а в нестационарном течении с характерным временем τ – при малом $h/\nu \ll \tau$. Асимптотика (2.1) верна при $h_m \ll h \ll h_0$, верхнюю границу (макромасштаб) h_0 расстояния между свободной поверхностью и стенкой можно определить при сращивании асимптотических разложений или оценить по порядку величины. Значение h_0 позволяет вычислить по асимптотике (2.1) динамический краевой угол $\alpha_0 = \alpha(h_0)$.

Согласно соотношению (2.1), свободная граница близка к своей касательной – угол α медленно изменяется вдоль границы: $d\ln\alpha/d\ln h \ll 1$ [1], что справедливо, благодаря большому параметру $\ln(h_0/h_m) \gg 1$. Обозначим

$$\varepsilon = 1/\ln(h_0/h_m) \tag{2.2}$$

Малое внеинтегральное слагаемое в левой части соотношения (2.1) имеет порядок $\text{Ca}\varepsilon$.

При наличии прекурсионной пленки, движущейся под действием сил Ван-дер-Ваальса [2, 4, 9], микромасштаб равен ее максимальной толщине [2]

$$h_m = (A'/(2\pi\sigma))^{1/2} (3Ca)^{-1/3} \tag{2.3}$$

(A' – постоянная Гамакера). Максимальную толщину прекурсионной пленки рассмотрел также Де Жен [4]. Аналогичную формулу параметра асимптотики на основе численного решения записали Де Жен и Эрве [4]. При этом коэффициент в (2.3) найден с существенно большей точностью, чем коэффициент в аналогичной формуле [4], как видно из [20].

Прекурсионная пленка может возникнуть только при малых краевых углах, а при конечных углах микромасштаб h_m может иметь порядок размера молекулы жидкости [1, 2, 4] в согласии с тем, что в случае ньютоновской жидкости длина пристенного скольжения может иметь порядок размера молекулы.

Если поверхность предварительно покрыта макроскопической пленкой толщины h_∞ , то микромасштаб равен $h_m = 1.84h_\infty$ [2]. Параметр h_m известен также в случае, когда толщина покрывающей пленки микроскопическая [21].

Условие $h_0 \gg h_m$, ограничивающее применимость теории, в случае малых углов $\alpha_0 \ll 1$ было записано в явной форме как условие наличия малого параметра a_1 в задаче о динамике смачивания при движении капиллярного мениска [2]. Предел применимости асимптотической теории смачивания при движении мениска для частного случая предварительно смоченного твердого тела [2] равен

$$a_1 = 1.77h_\infty R_0^{-1} Ca^{-2/3} = 1$$

(R_0 – радиус мениска).

Наряду с формулами микромасштаба известен ряд приближенных формул для макромасштаба [1, 2].

В течении с конечным числом Рейнольдса верхняя граница h_0 области справедливости асимптотики (2.1) может быть приближенно определена условием малости локального числа Рейнольдса¹): $h\nu/\nu < 1$; $h_0 = \nu/\nu$. Тогда масштабный фактор включает малое число Рейнольдса, определенное по микромасштабу: $\ln(h_0/h_m) = |\ln(h_m\nu/\nu)|$. Для

¹ Воинов О.В. Термодинамика и асимптотическая теория движения линии контакта трех фаз при смачивании твердых тел. – Деп. ВИНТИ. 1994. № 2136-В94.

малых углов следует использовать более точное условие $\alpha_0 h\nu/\nu < 1$. Кроме того, для случая капиллярного мениска необходимо учитывать другое условие, определяющее приближенно h_0 как границу области значений h , для которых контур свободной поверхности близок к своей касательной: $h < \alpha_0^2 R_0/2$ [1, 2]. Величина h_0 равна наименьшей из приведенных двух границ.

В асимптотике (2.1) можно использовать вместо расстояния h и параметра h_m расстояние до линии контакта $r = h/\sin\alpha$ и параметр $r_m = h_m/\sin\alpha_*$ [1]. Однако в важном случае предварительно смоченной поверхности, когда она покрыта тонкой макроскопической пленкой, параметр r_m изменяется во много раз при изменении скорости смачивания (числа Ca), в то время как микромасштаб h_m не зависит от скорости. По этой причине используем в качестве независимой переменной расстояние до стенки h , а не расстояние r до линии контакта.

Рассмотрим область макромасштаба, где расстояния от линии контакта относительно велики – порядка размера системы и расстояние свободной границы от стенки $h \sim h_k$ в случае заполнения трубы радиуса h_k или $h \sim h(0)$ в случае растекания капли ($h(0)$ – высота капли).

Решение ищем формально возмущениями по числу Ca. На макромасштабе свободная поверхность S близка к квазистатической, так как вблизи линии контакта согласно соотношению (2.1) угол α медленно меняется с расстоянием и для фиксированного угла α_0 согласно соотношению (2.1) скорость смачивания мала: $\nu \sim \varepsilon$. Задав статическую поверхность S_1 , близкую к S , из задачи о течении вязкой жидкости найдем на поверхности S_1 приращение нормального напряжения к его значению на оси симметрии $P_n - P_n(0)$. Используя это, найдем малое возмущение поверхности S_1 из граничного условия Лапласа [1] и определим малое возмущение угла ее наклона вблизи линии контакта. Сращивание асимптотического разложения угла наклона границы α на макромасштабе с общей асимптотикой (2.1) вблизи линии контакта позволит найти формулы для краевого угла поверхности S_1 , включающие параметр h_0 в виде функционала от напряжения P_n на границе [1, 11]².

Далее, найдем численно параметрическую зависимость максимального масштаба $h_0 = h_0(\alpha_0)$, определяющего крайовой угол по асимптотике (2.1) в виде $\alpha_0 = \alpha_{as}(\ln h_0)$. В результате получим решение задачи о динамике смачивания второго порядка точности.

Для случая малых углов известна аналитическая теория второго порядка [2]. Ее и асимптотику напряжений на большом масштабе вблизи линии контакта [10] можно применять для проверки решений, полученных при сочетании асимптотических и численных подходов.

3. Свободная граница на макромасштабе и сращивание асимптотических разложений. Запишем уравнение для угла наклона поверхности S

$$\frac{\sigma}{x} \frac{d}{dx}(x \cos \alpha) = P_n + p_0 \quad (3.1)$$

x – расстояние от оси симметрии системы, α – угол между касательной к S и твердой стенкой. В случае капли на плоскости следует заменить α на $\alpha + \pi/2$.

Поверхность первого приближения – сегмент сферы S_1 – проходит через линию контакта и имеет кривизну

$$R^{-1} = (P_n(0) + p_0 - c)/(2\sigma)$$

² См. также: Воинов О.В. О растекании капли вязкой жидкости по горизонтальной поверхности. – Деп. ВИНТИ. 1995. № 3495-B95.

где c – малая произвольная постоянная. Ищем радиус возмущенной поверхности в виде

$$r' = |R + \bar{R}(\theta)|, \quad \bar{R} \ll R_0 = |R|$$

(ось $\theta = 0$ направлена вдоль оси симметрии системы). На оси симметрии и на линии контакта справедливы условия

$$d\bar{R}/d\theta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad \bar{R} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0 \quad (3.2)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение для возмущения радиуса включает малую произвольную постоянную:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{d\bar{R}}{d\theta} + 2\bar{R} = \frac{R^2}{\sigma} (P_n(\theta) - P_n(0) + c); \quad P_n - P_n(0), \quad c \ll 2 \frac{\sigma}{R_0} \quad (3.3)$$

Рассмотрим варианты задания статической поверхности – сегмента сферы, проходящей через линию контакта: а) кривизна сферы равна средней кривизне поверхности S на оси $R^{-1} = H(0)$ (постоянная $c = 0$); б) сфера касается поверхности S в точке на оси симметрии системы с координатой x_2 ($\bar{R}(0) = 0$), высота сегмента $a_0 = x_2$ (линия контакта находится в плоскости $x_2 = 0$), для случая капли $a_0 = h(0)$. Высота a_0 сферического сегмента связана с краевым углом α_b и радиусом основания элементарной формулой.

Возмущение угла наклона касательной α_1 на контуре сферы равно

$$\alpha - \alpha_1(\theta) = R_0^{-1} d\bar{R}(\theta)/d\theta$$

Отсюда и из уравнения (3.1) следует уравнение (3.3). Интегрируя уравнение (3.3) при учете условий (3.2), найдем поведение угла наклона α поверхности на краю, $\theta \rightarrow \theta_0$. Получим

$$\alpha - \alpha_1 = \int_0^{\theta_0} \frac{P_n(\theta') - P_n(0)}{\sigma} \Lambda(\theta_0, \theta') R_0 d\theta' + \dots \quad (3.4)$$

Здесь $\alpha_1 \approx \alpha_0$, угол $\theta_0 = |\pi/2 - \alpha_0|$ для случая трубы, $\theta_0 = \alpha_0$ для капли; функция $\Lambda(\theta_0, \theta)$ для вариантов а и б соответственно равна

$$\Lambda_a(\theta_0, \theta) = -\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\theta_0} \quad (3.5)$$

$$\Lambda_b(\theta_0, \theta) = \left[\cos \theta - (1 + \cos \theta_0) \left(1 + \cos \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \quad (3.6)$$

Напряжение на контуре сегмента сферы нормируем к первому члену его асимптотики вблизи линии контакта (напряжению при течении внутри угла)

$$P_n - P_n(0) = 2\mu \nu Q(\alpha_0) \sin \alpha_0 G h^{-1}, \quad Q = \sin \alpha / (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \quad (3.7)$$

При $h \rightarrow 0$ имеем $G \rightarrow 1$ согласно решению задачи о течении в угле.

Сращивание асимптотических разложений с точностью $O(\varepsilon^2)$ известно для случая малых краевых углов в задаче смачивания при движении мениска [2]. Для конечных краевых углов запишем тейлоровское разложение асимптотики угла наклона свободной границы (2.1) в точке $z_0 = \ln(h_0)$

$$\alpha = \alpha_0 + \varphi(\alpha_0)(z - z_0) + \dots, \quad \alpha_0 = \alpha_{as}(z_0), \quad \varphi = \alpha'_{as}(z_0) = 2QCa \quad (3.8)$$

Оно имеет смысл при $h \ll h_0$ и $z_0 - z \ll \ln(h_0/h_m) \gg 1$; формула (3.8) не изменяется при замене h на расстояние r от линии контакта. Соотношение (3.8) можно также записать в виде

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 + \frac{h d\alpha}{\alpha dh} (z - z_0) + \dots \right) \left(\frac{r d\alpha}{\alpha dr} \approx \frac{h d\alpha}{\alpha dh} \approx \varepsilon \frac{\alpha^3 - \alpha_m^3}{3\alpha^3} \ll 1 \right)$$

Малое влияние кривизны мениска при $h \ll h_0$ учитывает формула

$$\alpha = \alpha_1(z) + \varphi(\alpha_0)(z - z_0); \quad \alpha_1 = \alpha_0 + h/(R \sin \alpha_0) + \dots = \alpha_0 + r/R + \dots$$

представляющая профиль угла наклона границы вблизи движущейся линии контакта в задаче на макромасштабе; ее можно применять в экспериментальных исследованиях свободной поверхности.

Выше можно было принять за независимую переменную вместо h расстояние r от линии контакта, заменив z на $\ln r$ без изменения (3.8). Преимущества использования для описания свободной границы переменной h перед r отмечены в разд. 2.

4. Решение задачи о стационарном заполнении трубы. Срачивая при $h \ll h_0$ ($\theta \rightarrow \theta_0$) разложения (3.4) и (3.8) для случая течения в трубе радиуса h_k и используя равенства (3.7), запишем

$$\alpha_0 = \alpha_{as}(\ln h_0), \quad h_0 = h_k \exp(-C_0) \quad (4.1)$$

$$C_0 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \left\{ \sin \alpha_0 \int_0^{\theta} \Lambda(\theta_0, \theta') R_0 \frac{G(\theta')}{h} d\theta' + \ln \frac{h_k}{h} \right\} \quad (4.2)$$

Используя соотношение $R_0 \sin \theta = h_k - h$ для сферы, получим из соотношений (4.2), (3.5) и (3.6) для указанных выше вариантов задания статической поверхности раздела фаз

$$C_{0a} = 1 - \int_0^{h_k} \left(1 - \frac{h}{h_k} \right) \frac{G-1}{h} dh \quad (4.3)$$

$$C_{0b} = \operatorname{ctg} \theta_0 \int_0^{\theta_0} \left\{ \Lambda_b(\theta_0, \theta) G(\theta) + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right\} \frac{h_k}{h} d\theta \quad (4.4)$$

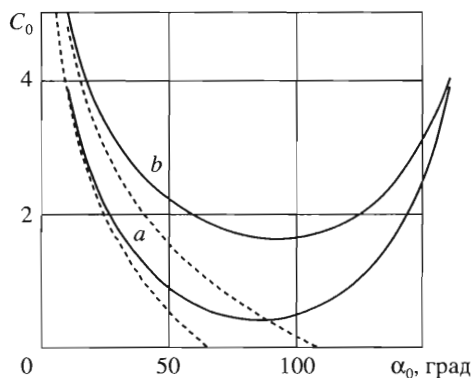
Отметим, что функция $(G-1)/h$ в отличие от сингулярного напряжения P_n имеет слабую особенность, если угол α_0 меньше 129° [10].

Параметры решений для вариантов a и b связаны соотношениями

$$\alpha_a - \alpha_b = 2CaQ(\alpha_b) \ln \frac{h_{0a}}{h_{0b}} = 2CaQ(\alpha_b)(C_b - C_a) = \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) \frac{h_k}{\sin \alpha_b}$$

Напряжение P_n на сегменте S сферы рассчитано для течения в трубе; в сечении трубы на расстоянии H от линии контакта задавался профиль скорости течения Пуазейля. Решалась задача для уравнений Стокса при граничных условиях на S : нормальная скорость $u_n = 0$, касательное напряжение $P_\tau = 0$; на твердой стенке, при $x_1 = 1$: $u_1 = 0$, $u_2 = -1$; в сечении $x_2 = -H$: $u_1 = 0$, $u_2 = 1 - 2x_1^2$.

Здесь x_1 – расстояние от оси трубы, x_2 – расстояние вдоль оси. Уравнение линии контакта имеет вид $x_2 = 0$, $x_1 = 1$.



Фиг. 1

В расчетах при $H > 3.5R$ напряжение на поверхности S практически не зависит от H .

Расчеты проведены при ограничении $\alpha_0 \leq 160^\circ$, так как при $\alpha_0 = \pi$ задача о течении внутри угла вырождена ($Q = 0$). Среди тестов использована асимптотика напряжений вблизи линии контакта в задаче на макромасштабе [10], содержащая слагаемое с логарифмической особенностью (в дополнение к сингулярному).

Численное решение задачи для уравнений Стокса найдено при помощи нового метода граничного интегрального уравнения (ИУ). Компоненты скорости и давление осесимметричного течения были выражены через две гармонические функции несколькими способами, в том числе, с применением формулы Обербека [22]. Для их определения использовано модифицированное ИУ, в котором гармоническая функция $\Phi(\mathbf{x}')$ под знаком интеграла модифицирована таким образом, чтобы плотность двойного слоя обращалась в нуль при некотором значении $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ [23]

$$4\pi K\Phi(\mathbf{x}) = \iint_{S_L} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n} - (\Phi(\mathbf{x}') - \Phi(\mathbf{x})) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right\} dS, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in S_L; \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

S_L – граница жидкости, коэффициент K зависит от геометрии задачи. Для неограниченной области, внешней по отношению к границе S_L , значение $K = 1$ [23]. В случае, когда часть поверхности S_L не ограничена и близка на бесконечности к плоскости, значение $K = 1/2$. Для задачи внутри замкнутой поверхности S_L коэффициент $K = 0$. Модификация ИУ дает повышение точности его дискретной аппроксимации. Для обеспечения высокой точности использована специальная квадратурная формула [23].

Численные решения задач динамики идеальной жидкости со свободными границами [23, 24] показали эффективность этого подхода и его преимущество перед подходом более поздних работ, в которых использовано ИУ без модификации.

Результаты расчетов параметра $C_0 = C_0(\alpha_0)$ в формуле (4.1) для краевого угла α_0 представлены на фиг. 1. Сплошные кривые a и b – результаты расчетов краевых углов сегментов сфер для вариантов a и b (разд. 3) по формулам (4.3) и (4.4). Штриховые кривые соответствуют формулам для C_0 аналитической теории малых углов [2, 11]¹:

$$a) C_0 = 1 - \ln(2\alpha_0^2), \quad b) C_0 = 2 - \ln(2\alpha_0^2) \tag{4.5}$$

Первое равенство (4.5) асимптотически соответствует явному решению [2] и означает, что $h_0 \sim \alpha_0^2 R$ или $r_0 \sim \alpha_0 R$ [1, 2]. Штриховые кривые близки к расчетным при малом значении α_0 . Рост параметра C_0 при уменьшении краевого угла α_0 мениска связан с

уменьшением размера той части макрообласти, в которой угол α мало отличается от угла α_0 . Это важное обстоятельство не отражает гипотеза $r_0 \sim R$ (см. [25, 4]).

Полученные графики вместе с асимптотикой (2.1) дают зависимость динамического краевого угла от скорости $\alpha_0 = \alpha_0(Ca)$ в параметрическом виде. Значение $C_{0b}(\pi/2) = 1.64$ согласуется со значением аналогичной постоянной $c_1 = 1.83$ [1] для конечных краевых углов. Отметим известное [1, 3] согласие теории [1] с опытами [26–28]. Наличие минимума параметра C_0 на сплошных кривых, приведенных на фиг. 1, и его рост при $\alpha_0 > 150^\circ$, при малых $\pi - \alpha_0$, согласуется с оценкой $h_0 \sim (\pi - \alpha_0)^2 R_0$, симметричной оценке h_0 при малых α_0 .

В случае использования переменной r кривые фиг. 1 допускают простой пересчет: вместо $h_0 = h_k \exp(-C_0)$ имеем $r_0 = h_k \exp(-C_0) / \sin \alpha_0$.

5. Нестационарное течение капли на стенке. Осесимметричное течение жидкой капли на плоской поверхности описывает общая квазиравновесная модель с параметрами h_m и α_m [1, 2]. При $\alpha_m = 0$ в случае тонкой капли может возникнуть квазистационарная прекурсионная пленка [2], известна также теория нестационарной пленки, движущейся вблизи края растекающейся капли под действием сил Ван-дер-Ваальса [29]. Поверхность капли на макромасштабе близка к сегменту сферы радиуса $R_0(t)$ с краевым углом $\alpha_0(t)$. В дополнение к вариантам a и b задания статической поверхности раздела рассмотрим третий вариант – сегмент сферы, объем которого равен объему капли: $V_0 = V$ (вариант c). Краевой угол α_c связан с радиусом основания капли x_0 и эквивалентным радиусом R_e соотношением

$$x_0 = 2R_e \cos \frac{\alpha_0}{2} (2 + \cos \alpha_0)^{-1/3} \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} \right)^{-1/3}, \quad R_e = (3V/(4\pi))^{1/3} \quad (5.1)$$

Входящая в формулу для возмущения (3.4) функция имеет вид

$$\Lambda(\theta_0, \theta) = \left(1 - 2 \frac{h}{a_0} \right) \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}, \quad h = R_0(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (5.2)$$

Сращивание асимптотических разложений (3.4) и (3.8) при замене в формуле (4.1) радиуса h_k на высоту капли a_0 вновь дает формулу (4.2), где надо заменить h_k на a_0 ; для разных вариантов поверхностей первого приближения – сегментов сфер – при учете соотношений (3.5), (3.6) и (5.2) имеем

$$C_{0a} = \int_0^{a_0} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} G \right) \frac{dh}{h}, \quad \theta_0 < \frac{\pi}{2} \quad (5.3)$$

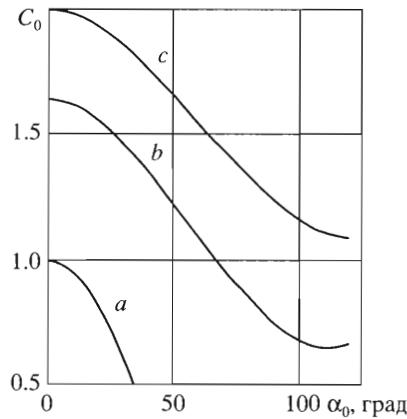
$$C_{0b} = \int_0^{\theta_0} \left\{ \sin \theta + \sin \theta_0 \Lambda_b(\theta_0, \theta) G(\theta) \right\} \frac{R_0}{h} d\theta \quad (5.4)$$

$$C_{0c} = 2 + \int_0^{a_0} \left(2 \frac{h}{a_0} - 1 \right) \frac{G-1}{h} dh \quad (5.5)$$

Нормальное напряжение P_n на поверхности S деформирующегося сегмента сферы найдено из решения задачи для уравнений Стокса со следующими граничными условиями:

на S : нормальная скорость $u_n = v \sin \alpha_0 (1 - 2h/a_0)$, касательное напряжение $P_\tau = 0$ (скорость края капли $v = 1$);

на стенке ($x_2 = 0$): $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ (x_2 – координата вдоль оси симметрии).



Фиг. 2

Расчеты проведены в диапазоне $10^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$. В соответствии с формулами (5.3)–(5.5) найдены зависимости $C_0(\alpha_0)$ для вариантов *a*, *b* и *c*, которые даны на фиг. 2. При малом угле α_0 для случая *a* параметр $C_{0a} \approx 1$; для случаев *b* и *c* при малых углах $C_{0b} \approx 1.64$ и $C_{0c} \approx 2$ в согласии с аналитической теорией [12, 13]². Значение $C_{0c}(\pi/2) = 1.23$ близко к аналогичной постоянной [1], равной единице. Три динамических краевых угла разных типов дают более полное описание формы текущей капли, чем один угол. Разные краевые углы принимают близкие значения. Параметр краевого угла α_b позволяет учитывать малое отличие высоты капли $h(0)$ от высоты a_0 сегмента сферы в случае *c*.

6. Модель динамики капли при конечных краевых углах. Уравнение для краевого угла капли следует из соотношения $\dot{\alpha}_0 = v$ для сегмента сферы [1]:

$$\dot{\alpha}_0 = -\frac{v}{R_e} \left[(2 + \cos \alpha_0) \sin \frac{\alpha_0}{2} \right]^{4/3} \tag{6.1}$$

$$v = \frac{\sigma}{\mu} \left\{ \ln \frac{h_0}{h_m} - \ln \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_*} \right\}^{-1} \frac{1}{2} \int_{\alpha_m}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{Q(\alpha)}, \quad h_0 = a_0 \exp(-C_0(\alpha_0)) \tag{6.2}$$

Высота сегмента $a_0 = x_0 \operatorname{tg}(\alpha_0/2)$.

Зависимость $C_{0c}(\alpha_0)$ показана на фиг. 2.

Добавив к соотношениям (6.1), (6.2) выражения для микропараметров h_m и α_m (в одном из частных случаев [1, 2]), получим замкнутую модель динамики капли на стенке. Второе слагаемое в фигурных скобках в выражении (6.2) всегда мало, так как $\ln(h_0/h_m) \gg 1$.

Уравнение краевого угла растекающейся капли (6.1), (6.2) близко к аналогичному уравнению [1], в котором интеграл в асимптотике (2.1) приближен третьей степенью угла. Эта аппроксимация является асимптотикой интеграла при малых углах и эффективна также при конечных углах до 150° .

Модель позволяет описать течение в капле с точностью $O(\varepsilon^2)$. Параметры h_m и α_m – общие для задач гидродинамики на макромасштабе, пригодны для капель произвольного объема. Детали начальных условий задачи не важны на больших временах.

Обыкновенное дифференциальное уравнение модели легко интегрируется аналитически, если микроугол α_m не зависит от скорости v ($\alpha_m = \alpha_S$).

Действительно, в соотношении (6.2) выражение в фигурных скобках – медленная функция времени, благодаря наличию логарифма большой величины. В главном приближении при интегрировании ее следует положить постоянной и учесть в полученной формуле ее медленное изменение. Поправку найдем итерацией. Таким методом из уравнений (6.1) и (6.2) при малом α_0 и полном смачивании получим приближенное решение $\alpha_0 \sim t^{-3/10}$ и $x_0 \sim t^{1/10}$, верное [1, 2] при различных выражениях для микромасштаба h_m (в том числе при течении прекурсионной пленки). Это подтверждено во многих экспериментах, часть из которых указана в обзоре Де Жена [4].

В заключение отметим, что при числе Рейнольдса порядка единицы теория смачивания, основанная на уравнениях Стокса, может быть пригодна с точностью $O(\epsilon)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов О.В. Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 76–84.
2. Воинов О.В. Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. 1977. № 2. С. 92–99.
3. Воинов О.В. Асимптотика свободной границы при ползущем движении и зависимость краевого угла от скорости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 6. С. 1422–1425.
4. de Gennes P.-G. Wetting: Statics and dynamics // Rev. Modern Phys. 1985. V. 57. № 3. P. 827–863 = Де Жен П.Ж. Смачивание: Статика и динамика // Успехи физ. наук. 1987. Т. 151. № 4. С. 619–681.
5. Young T. An essay on the cohesion of fluids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1805. V. 95. P. 65–87.
6. Gauss K.F. Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii // Comment. Societ. Regiae Scientiarum Gottingensis. Klass Math. 1829. V. 7. P. 39–88.
7. Gibbs J.W. The Scientific Papers. V.I. Thermodynamics. N.Y.: Dover, 1961. 434 p.
8. Ablett R. An investigation of the angle of contact between paraffin wax and water // Phil. Mag. Ser.6. 1923. V. 46. № 272. P. 244–256.
9. Huh C., Scriven L.E. Hydrodynamic model of steady movement of solid / liquid / fluid contact line // J. Colloid Interface Sci. 1971. V. 35. № 1. P. 85–101.
10. Воинов О.В. Обобщение задачи о течении вязкой жидкости в угле на течение с искривленными границами // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 837–846.
11. Voinov O.V. Motion of line of contact of three phases on a solid: thermodynamics and asymptotic theory // Int. J. Multiphase Flow. 1995. V. 21. № 5. P. 801–816.
12. Воинов О.В. Растекание капли вязкой жидкости по поверхности под действием капиллярных сил // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 767–775.
13. Воинов О.В. Динамические краевые углы смачивания при растекании капли на поверхности твердого тела // ПМТФ. 1999. №1. С. 101–107.
14. Пухначев В.В., Солонников В.А. К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 961–971.
15. Rayleigh, Lord. Steady motion in a corner of a viscous fluid // Scient. Papers. Cambridge: Univ. Press, 1920. V. 6. P. 8–21.
16. Fukai J., Zhao Z., Poulikakos D., Megaridis C.M., Miyatake O. Modelling of the deformation of a liquid droplet impinging upon a flat surface // Phys. Fluids. 1993. V. 5. № 11. P. 2588–2599.
17. Fukai J., Shiba Y., Yamamoto Y., Miyatake O., Poulikakos D., Megaridis C.M., Zhao Z. J. Wetting effects on the spreading of a liquid droplet colliding with a flat surface: Experiment and modelling // Phys. Fluids. 1995. V. 7. № 2. P. 236–247.
18. Pasandideh-Fard M., Qiao Y.M., Chandra S., Mostaghimi J. Capillary effects during droplet impact on a solid surface // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 3. P. 650–659.
19. Siebold A., Nardin M., Schultz J., Walliser A., Oppliger M. Effect of dynamic contact angle on capillary rise phenomena // Colloid and Surf. A. 2000. V. 161. № 1. P. 81–87.

20. *Voinov O.V.* Meniscus and precursor film in steady-state wetting // *J. Colloid Interface Sci.* 1998. V. 201. № 1. P. 127–131.
21. *Воинов О.В.* Динамический краевой угол при смачивании поверхности жидкостью Ван-дер-Ваальса // *ПМТФ.* 2000. № 4. С. 101–105.
22. *Lamb H.* *Hydrodynamics.* Cambridge: Univ. Press, 1932 = *Ламб Г.* *Гидродинамика.* М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
23. *Воинов О.В., Воинов В.В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // *Докл. АН СССР.* 1975. Т. 221. № 3. С. 559–562.
24. *Воинов О.В.* Расчет параметров скоростной струи, образующейся при захлопывании пузыря // *ПМТФ.* 1979. № 3. С. 94–99.
25. *Joanny J.F., de Gennes P.-G.* Upward creep of a wetting fluid : A scaling analysis // *J. Physique.* 1986. V. 47. № 1. P. 121–127.
26. *Железный Б.В.* Экспериментальное исследование динамического гистерезиса краевого угла // *Докл. АН СССР.* 1972. Т. 207. № 3. С. 647–650.
27. *Ogarev V.A., Timonina T.N., Arslanov V.V., Trapeznikov A.A.* Spreading of polydimethylsiloxane drops on solid horizontal surfaces // *J. Adhesion.* 1974. V.6. № 4. P. 337–355.
28. *Hoffman R.L.* A study of the advancing interface . I. Interface shape in liquid–gas systems // *J. Colloid Interface Sci.* 1975. V.50. № 2. P. 228–241.
29. *Воинов О.В.* Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // *ПМТФ.* 1994. № 6. С. 69–85.

Тюмень
e-mail: o.v.voinov@mtu-net.ru

Поступила в редакцию
21.XII.2004