УДК 532.5

© 2006 г. **А. Г. Куликовский**

О ГЛОБАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ В НЕОДНОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

В линейном приближении рассматриваются условия неустойчивости течений или состояний, не зависящих от времени и координат, в протяженных неодномерных областях. Дается обобщение понятия глобальной неустойчивости, введенного ранее для одномерного случая. Для слабонеустойчивых течений предлагается метод, позволяющий выяснить, при каких условиях существуют неограниченно растущие со временем возмущения, которые не зависят от конкретного вида граничных условий (однако, при условии их невырожденности). Подробно рассматривается случай двумерной прямоугольной области.

При рассмотрении устойчивости одномерных стационарных состояний и течений на отрезке большой, но конечной длины L было выяснено [1], что неустойчивость может проявляться в двух видах: 1) в виде растущих возмущений, существование которых, а также их собственные частоты, определяются граничными условиями на одном из концов отрезка ("односторонняя", или граничная неустойчивость); собственные частоты этих возмущений стремятся к конечным пределам при стремлении к бесконечности длины отрезка, на котором развиваются возмущения; 2) в виде существования растущих возмущений, которые вдали от границ представляют собой две волны, идущие в противоположных направлениях и отражающиеся от концов отрезка ("глобальная" неустойчивость). Уравнение, определяющее собственные частоты, соответствующие глобальной неустойчивости, при стремлении длины отрезка L к бесконечности приобретает вид

$$\mathrm{Im}k_r(\omega) = \mathrm{Im}k_l(\omega) \tag{0.1}$$

Здесь $k_r(\omega)$ и $k_l(\omega)$ – ветви аналитической функции, выражающей из дисперсионного уравнения системы волновое число как функцию частоты ω. При этом ветви $k_r(\omega)$ и $k_l(\omega)$ соответствуют возмущениям, которые среди всех типов возмущений, распространяющихся направо и, соответственно, налево, испытывают наибольший пространственный рост или наименьшее затухание. Если длина L велика, но конечна, то собственные значения располагаются на комплексной плоскости ω на расстояниях одно от другого и от линии, определяемой уравнением (0.1), которые с ростом L убывают как $1/L$. Таким образом, выполнение уравнения (0.1) для $\mathrm{Im}\omega > 0$ является достаточным условием неустойчивости при больших L. При выводе уравнения (0.1) предполагалась конечность коэффициентов взаимного превращения возмущений, соответствующих $k_r(\omega)$ и $k_l(\omega)$, при их отражениях от концов отрезка, а также, как уже было сказано, что $L \to \infty$. Ниже будет считаться, что $L \gg \lambda$, где λ – характерная длина волны возмущений, соответствующих k_r и k_l.

Таким образом, при больших L возможность существования собственной функции определяется пространственным изменением амплитуд двух основных волн, составляющих "скелет" собственной функции, а собственная частота ω находится из условия, что при циклическом прохождении этими волнами отрезка длины L в прямом и обратном направлениях пространственное усиление $L\mathrm{Im}(k_r(\omega) - k_l(\omega))$ остается конечным.

Аналогичные результаты были получены [2] при рассмотрении одномерных возмущений в случае, когда граничные условия ставились не только на концах отрезка, но и в промежуточных точках. Кроме того, допускалось вырождение граничных условий, связанное с обращением в нуль некоторых коэффициентов отражения или преломления. Глобальная неустойчивость в этом случае также проявляется в виде существования замкнутой цепочки (последовательности) волн, зависящих от времени как $e^{-i\omega t}$ с $\mathrm{Im}\omega > 0$, которые взаимно превращаются одна в другую в точках, где поставлены граничные условия. Цепочка может состоять из двух волн, как и в ранее рассмотренном случае [1], а может содержать и большее число волн. Условие, из которого находится $\mathrm{Im}\omega$, заключается в том, что пространственное усиление волн по всем звеньям цепочки равно единице, деленной на произведение всех коэффициентов отражения и преломления. Это условие аналогично равенству (0.1) может быть записано как связь между мнимыми частями волновых чисел волн цепочки, зависящих от ω.

Цель предлагаемой работы – обобщение полученных ранее результатов [1, 2] и распространение понятия глобальной неустойчивости на неодномерные задачи.

Проблема заключается в обнаружении в неодномерных протяженных областях растущих со временем возмущений, рост которых, так же как в одномерных задачах [1, 2], определяется свойствами дисперсионного уравнения и, при характерном размере области, стремящемся к бесконечности, не зависит от конкретного вида граничных условий при условии их невырожденности. При этом, как и ранее [1], граничные условия считаются не зависящими от размера области (при упомянутом стремлении этого размера к бесконечности) и невырожденными в смысле отличия от нуля коэффициентов отражения возмущений от границ области. Как и ранее [1, 2], считается также, что характерный линейный размер, на котором происходит существенное изменение возмущения (характерная длина волны) много меньше характерного размера области. Неустойчивость, обусловленная существованием растущего возмущения описанного типа, будем называть глобальной, по аналогии с принятой терминологией [1, 2].

1. Достаточное условие существования растущих возмущений в случае слабой неустойчивости. Будем для простоты рассматривать ситуации, когда неустойчивость слабая, т.е. когда дисперсионное уравнение системы

$$F(\omega, k_j) = 0$$

таково, что при действительном волновом векторе $\mathbf{k} = \mathbf{e}_j k_j$ ($\mathbf{e}_j$ – единичные векторы декартовой системы координат) имеет место соотношение

$$\mathrm{Im}\omega \ll \mathrm{Re}\omega \tag{1.1}$$

В этом случае можно ограничиться рассмотрением возмущений, у которых

$$\mathrm{Im}k_j \ll \mathrm{Re}k_j, \quad j = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

при одновременном выполнении неравенства (1.1).

Рассмотрим сначала поведение возмущений, имеющих форму волновых пакетов. При выполнении условий (1.1) и (1.2) волновой пакет с волновыми числами, близкими к некоторым действительным значениям k_j, распространяется с групповой скоростью $\mathbf{V} = V_i\mathbf{e}_j$, причем

$$V_j = \partial\mathrm{Re}\omega/\partial k_j, \quad \mathrm{Im}k_j = 0 \tag{1.3}$$

Комплексность дисперсионного уравнения будет проявляться в изменении амплитуды волновых пакетов, распространяющихся внутри области и испытывающих время от времени отражение от ее границ. Будем считать, что размер L области столь велик, что характерная величина логарифма усиления пакета при прохождении им расстояния, имеющего порядок L, по модулю много больше логарифма типичного коэффициента отражения. Иначе говоря, будем полагать, что усиление и ослабление волн происходит, главным образом, при их распространении, а не за счет отражений. Очевидно, что обращение в нуль групповой скорости при $\mathrm{Im}\omega > 0$ приведет к неограниченному росту возмущений. Этот рост при отсутствии границ соответствует абсолютной неустойчивости, которая, очевидно, вызовет неустойчивость также и в большой ограниченной области.

При предположениях (1.1) и (1.2) граничные условия можно рассматривать как условия отражения волн с действительными частотами ω, пренебрегая влиянием мнимых частей. Как и ранее [1], будем считать, что все коэффициенты отражения волн конечны. От одного отражения до другого волновые пакеты распространяются внутри области по прямым линиям, направление которых определяется групповыми скоростями.

При отражении волновых пакетов возможны разные варианты. Ограничимся случаем зеркального отражения, когда приходящее возмущение, соответствующее определенной частоте и направлению волнового вектора, отражается в виде одного или нескольких волн разных типов, соответствующих той же частоте. Таким образом, можно говорить о последовательностях – цепочках волн, превращающихся одна в другую при отражениях. При этом под цепочкой волн, так же как и ранее [2], будем понимать однозначно продолжаемую их последовательность. Когда происходит отражение падающей волны в виде нескольких волн будем говорить о существовании нескольких цепочек, соответствующих падающей волне с различными продолжениями.

Цепочке (последовательности) волн соответствует траектория распространения возмущения в виде ломаной линии. Траектории могут быть замкнутыми (периодическими) и незамкнутыми (бесконечными). Для каждой траектории может быть вычислена скорость нарастания (или затухания) амплитуды возмущений со временем.

Обозначим через $\mathrm{Im}\omega_\alpha$ инкремент временнóго роста амплитуды волнового пакета при прохождении им отрезка ломаной линии с номером α (здесь и далее греческие индексы означают номер звена траектории). Если траектория замкнута, то можно ввести средний инкремент роста за время обхода волновым пакетом всей траектории

$$\mathrm{Im}\omega = \sum T_\alpha \mathrm{Im}\omega_\alpha / \sum T_\alpha, \quad T_\alpha = l_\alpha / V_\alpha \tag{1.4}$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено иное, суммирование ведется по всем номерам α; l_α – длина звена ломаной, V_α – модуль групповой скорости на α-м звене ломаной (направление групповых скоростей совпадает с направлением звеньев ломаной).

Как уже было сказано, при отражении сохраняется частота ω, причем при отражении волновых пакетов достаточно потребовать сохранения значений $\mathrm{Re}\omega$.

Величина $\mathrm{Im}\omega$ может быть найдена также несколько другим способом, подобно тому, как это было сделано в одномерном случае [1, 2].

Рассмотрим волны, соответствующие некоторой фиксированной комплексной частоте ω, занимающие всю траекторию. Будем находить ω для замкнутых траекторий (многоугольников) из требования, что амплитуда волны – однозначная функция точки на траектории. Из условия однозначности амплитуды, пренебрегая отличием коэффициентов отражения от единицы, получаем

$$\sum l_\alpha \mathrm{Im} k_\alpha(\omega_0 + \Delta\omega) = 0; \quad \mathrm{Im}\omega_0 = 0, \quad \mathrm{Re}\Delta\omega = 0 \tag{1.5}$$

где $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ – искомая частота цепочки волн, k_α – проекция вектора $\mathbf{k}$ на направление распространения по α-й стороне ломаной. Величина $\mathrm{Im}k_\alpha$ характеризует пространственный рост амплитуды на α-й стороне.

Поскольку $\Delta\omega$ – малая величина, равенство (1.5) можно при учете соотношений (1.3) записать в виде

$$\mathrm{Im}\omega = -\sum l_\alpha \mathrm{Im} k_\alpha(\omega_0) / \sum l_\alpha V_\alpha^{-1} \tag{1.6}$$

Действительно, рассмотрим тождество

$$k_\alpha(\omega_0 + \Delta\omega) = k_\alpha(\omega_0 + \Delta_\alpha\omega + \Delta\omega - \Delta_\alpha\omega)$$

где $\mathrm{Im}\omega_0 = 0$, а величину $\Delta_\alpha\omega$ определим условием $\mathrm{Im}k_\alpha(\omega_0 + \Delta_\alpha\omega) = 0$. Последнее означает, что $\omega_0 + \Delta_\alpha\omega$ имеет тот же смысл, что и ω_α в равенстве (1.4). В силу соотношений (1.1) и (1.2) величины $\Delta\omega$ и $\Delta_\alpha\omega$ можно считать малыми. Поэтому

$$\mathrm{Im}k_\alpha(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{1}{V_\alpha}\mathrm{Im}(\Delta\omega - \Delta_\alpha\omega); \quad V_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial k_\alpha}$$

Подставляя это выражение в равенство (1.5) и учитывая, что

$$\mathrm{Im}\omega = \mathrm{Im}\Delta\omega, \quad \mathrm{Im}\omega_\alpha = \mathrm{Im}\Delta_\alpha\omega$$

получим равенство (1.4). Таким образом, на замкнутых траекториях инкремент роста возмущений может находиться как из требования однозначности амплитуды на траектории, так и путем осреднения по времени инкрементов роста волновых пакетов на звеньях траектории.

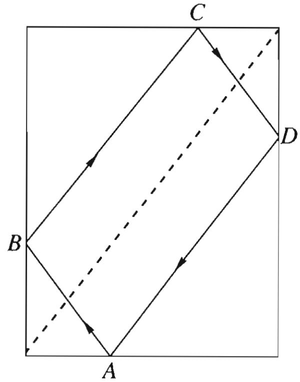
Если траектория незамкнутая, то следует осреднять скорость роста возмущений по большому интервалу времени и переходить к пределу при времени осреднения, стремящемуся к бесконечности.

Если существует траектория, на которой возмущение растет, то это означает неустойчивость исследуемого состояния. Действительно, найдется траектория с наибыстрейшим ростом возмущений. Возмущения, связанные с другими траекториями, будут расти со временем медленнее и не смогут помешать росту наиболее быстро растущего возмущения. Возможные потери, связанные с пространственным расширением пучков волн, распространяющихся вдоль близких лучей, могут приводить к уменьшению амплитуд, имеющему характер обратных степеней длины пути, проходимого возмущением. При достаточно больших расстояниях экспоненциальное нарастание амплитуды возмущения, вызываемое неустойчивостью, существенно превзойдет эффект степенного затухания, связанного с расходимостью пучка. Таким образом, усиление возмущений, определяющееся с помощью какой-либо цепочки волн, приводит при достаточно больших L к появлению растущих возмущений и, следовательно, к заключению о неустойчивости.

Обсуждавшиеся выше возмущения в некотором смысле подобны акустическим колебаниям между двумя отражающими поверхностями [3]. Для того чтобы такие колебания происходили без затухания, необходимо, чтобы отражающие поверхности обладали некоторой вогнутостью, что предотвращает уход энергии из области, где происходят колебания. В рассматриваемом случае, когда волны могут экспоненциально усиливаться в процессе их распространения, кривизны отражающих поверхностей могут иметь любые знаки, что не препятствует росту возмущений при распространении возмущений по траекториям в случае больших длин траекторий.

Рассмотрим теперь задачу с начальными данными, сосредоточенными в некоторой области с характерным размером $l \ll L$, и расположенной достаточно далеко от границ. Если на этом основании пренебречь влиянием границ, то такое возмущение через некоторое время распадется на волны, распространяющиеся со своими групповыми скоростями [4]. Это позволяет считать, что рассмотренное выше условие роста амплитуды какого-либо из волновых пакетов с учетом их отражений от границ представляет общее условие глобальной неустойчивости, т.е. неустойчивости, проявляющейся при больших L и не зависящее от конкретного задания граничных условий.

Таким образом, задача обнаружения глобальной неустойчивости сводится к нахождению траекторий, вдоль которых происходит усиление возмущений, т.е. траекторий с $\mathrm{Im}\omega > 0$. Этот подход к нахождению условия глобальной неустойчивости иллюстрируется ниже примером развития возмущений при ряде дополнительных конкретизирующих предположений.



Отметим, что подход, аналогичный предложенному выше, использовался ранее при доказательстве неустойчивости ряда неоднородных стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости [5, 6]. Траектории, вдоль которых происходит перенос и рост возмущений, представляются в этом случае замкнутыми линиями тока. Имеется также связь изложенного выше с методом комплексных уравнений Гамильтона–Якоби [7, 8], согласно которому эволюция возмущений на слабо неоднородном фоне находится в результате интегрирования упомянутых уравнений.

2. Условия роста возмущений в прямоугольной области. Рассмотрим проблему роста возмущений в большой прямоугольной (двумерной) области при выполнении условий (1.1) и (1.2). Дополнительно предположим, что волны, участвующие в образовании цепочки, ответственной за неустойчивость, принадлежат к одному и тому же типу с групповой скоростью, не зависящей от направления волнового вектора. Мнимую часть ω будем считать малой и зависящей от направления и модуля действительного волнового вектора $\mathbf{k}$. Такими свойствами обладают, в частности, возмущения поверхности изотропной упругой пластинки при ее обтекании сверхзвуковым потоком газа малой плотности [7]. Выберем, например, некоторую замкнутую траекторию распространения возмущений, состоящую из четырех звеньев (фигура). В силу зеркальности отражения изотропных возмущений траектория будет иметь форму параллелограмма $ABCD$ со сторонами, параллельными диагоналям прямоугольника, в котором рассматриваются возмущения. Обозначим длины сторон AB, BC, CD и DA через l_1, l_2, l_3, l_4 ($l_1 = l_3$, $l_2 = l_4$). Очевидно, что $l_1 + l_2 = L$, где L – длина диагонали прямоугольника.

Найдем средний инкремент роста возмущений, проходящих путь, представленный параллелограммом $ABCD$, считая, что усиление (или ослабление) на каждом прямолинейном отрезке происходит экспоненциально, согласно дисперсионному уравнению, и пренебрегая отличием коэффициентов отражения от единицы. Равенство (1.6) может быть в рассматриваемом случае переписано в виде

$$\operatorname{Im}\omega = a_1(\omega_0)l_1 + a_2(\omega_0)l_2; \quad a_n(\omega_0) = -\frac{(\operatorname{Im}k_n + \operatorname{Im}k_{n+2})l_n}{2LV^{-1}}, \quad n = 1, 2 \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) при учете того,что $l_1 + l_2 = L$, позволяет при заданном действительном значении ω_0 найти параллелограмм с максимальной скоростью роста возмущений $\operatorname{Im}\Delta\omega$. Если $a_1(\omega_0) > a_2(\omega_0)$, то для этого следует положить $l_1 = L$, $l_2 = 0$, при $a_1(\omega_0) < a_2(\omega_0)$ – наоборот $l_1 = 0$, $l_2 = L$. Таким образом, оптимальный параллелограмм при $a_1(\omega_0) \neq a_2(\omega_0)$ вытянут вдоль одной или другой диагонали. Кроме того, можно независимо найти значение ω_0, соответствующее максимальной скорости роста возмущений $\operatorname{Im}\omega$.

Множество параллелограммов, которые могут представлять траектории распространения возмущений, характеризуется одним свободным параметром, в качестве которого может быть выбрана величина l_1 или положение одной из точек отражения на соответствующей стороне.

В рассмотренном выше случае возмущение при прохождении замкнутой траектории по одному разу отражается от границ прямоугольника. Возможны другие варианты замкнутых траекторий, характеризующиеся двумя целыми числами m и n, представляющими число отражений от каждой из пары параллельных границ прямоугольника. Сами траектории при этом определяются, как и в рассмотренном случае, с точностью до одного параметра, задающего, например, положение одной из точек отражения. Траектория всегда состоит из отрезков прямых четырех попарно противоположных направлений, которые при учете направления распространения волн представляют собой векторы, сумма которых, очевидно, равна нулю. Если сложить векторы одинаковых направлений, то из получившихся четырех сумм можно составить суммарный параллелограмм, размеры которого определяются упомянутыми числами m и n. Инкремент роста амплитуды возмущений ($\mathrm{Im}\omega$) на замкнутых траекториях можно находить, используя равенство (2.1) для суммарного параллелограмма. Можно, очевидно, также использовать равенство (1.6) с учетом того, что V_α не зависит от α. Так же, как и в рассмотренном случае ($m = 1$, $n = 1$), среди суммарных параллелограммов с заданными m и n можно выбрать тот, который соответствует наибольшему значению $\mathrm{Im}\omega$. Однако возможности изменения длин сторон суммарного параллелограмма при m и n больших единицы оказываются ограниченными. Для незамкнутых траекторий равенство (1.4) может быть использовано как формула осреднения инкремента для достаточно больших времен T.

Приведем здесь без доказательств два утверждения, поскольку они интуитивно очевидны, а доказательства относятся к элементарной математике. При заданных m и n возможные вариации каждой из сторон суммарного параллелограмма не превосходят некоторой величины, не зависящей от m и n (в качестве которой можно выбрать удвоенную длину диагонали прямоугольника). При m и n, стремящихся к бесконечности, относительная доля пути возмущения, проходимого в заданном направлении, стремится к 1/4. Это же утверждение верно для бесконечных незамкнутых траекторий при стремлении к бесконечности отрезка траектории, для которого эта доля вычисляется. Если принять, что доля пути, проходимая возмущением в каждом из четырех направлений, равна 1/4 (что верно для незамкнутых траекторий, а также приближенно верно для замкнутых с большими m и n), то инкремент роста возмущений $\mathrm{Im}\omega$ будет зависеть от одного параметра, задающего направление одного из звеньев траектории.

Из сформулированных утверждений можно сделать следующий практический вывод для нахождения траектории, соответствующей наибольшему $\mathrm{Im}\omega$ в случае развития возмущений в прямоугольной области. Нужно рассмотреть траектории, соответствующие некоторому набору комбинаций m и n с небольшими значениями m и n. Для каждой комбинации m и n найти максимальное значение $\mathrm{Im}\omega$, варьируя $\mathrm{Re}\omega$ и параметр, определяющий форму траектории. Для замкнутых траекторий с большими значениями m и n, а также для незамкнутых (бесконечных) траекторий можно находить $\mathrm{Im}\omega$, считая, что в каждом из четырех направлений возмущение проходит четверть своего пути. В этом случае при нахождении максимального значения $\mathrm{Im}\omega$ варьируемыми параметрами будут отношение m/n и ω_0. При этом для замкнутых траекторий найденное таким образом значение $\mathrm{Im}\omega$ окажется лишь приближенным, а ошибка будет тем меньше, чем больше значения m и n.

Если указанным выше способом найдется траектория с $\mathrm{Im}\omega > 0$, то можно утверждать, что существуют растущие со временем возмущения, если характерный размер прямоугольника L достаточно велик.

Автор благодарит А.А. Бармина и С.Ю. Доброхотова за обсуждение статьи и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00219) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1697.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А.Г.* Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
2. *Куликовский А.Г.* Об условиях устойчивости стационарных состояний или течений в областях, протяженных в одном направлении // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 411–418.
3. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн М.: Наука, 1972. 456 с.
4. *Whitham G.B.* Linear and Nonlinear Waves. N.Y. etc.: Wiley, 1974 ≡ *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. *Bayly B.J.* Three-dimension centrifugal-type instabilities in inviscid dwo-dimensional flow// Physics fluids. 1988. V. 31. P. 56–64.
6. *Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И.* Некоторые асимптотические решения линеаризованных уравнений Навье-Стокса// Мат. заметки. 1993. Т. 53. Вып. 1. С. 25–35.
7. *Маслов В.П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973. 543 с.
8. *Иорданский С.В.* Устойчивость неоднородных состояний и континуальные интегралы // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 7. С. 180–189.
9. *Веденеев В.В.* Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы в сверхзвуковом потоке// Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.

Москва
e-mail: kulik@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
19.V.2005