

УДК 531.391:534.1

© 2006 г. И. Ф. Кожевников

КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ И НАГРУЖЕННОЙ ШИНЫ

На базе модели колеса с армированной шиной [1] определяются собственные частоты и собственные формы колебаний свободной или нагруженной шины в окрестности положения равновесия. Для свободной (ненагруженной) шины с закрепленным диском спектр собственных частот и собственных форм находится аналитически. В случае нагруженной шины аналогичная задача решается численно. Результаты этого анализа могут быть использованы при оценке уровня шумов, возникающих при движении транспортного средства по неровной поверхности.

Малые колебания колес исследовались многими авторами. В частности, изучались вибрации шины на базе модели упругого кольца и анализировались свойства передачи вибрации от дороги на ось колеса [2]. Рассматривались колебания гибкого растяжимого вращающегося кольца в линейной постановке [3] и с учетом геометрической нелинейности [4]. Имеется обзор статей, посвященных вибрациям колес в сложной динамике подвески транспортного средства и их влиянию на силы, передаваемые от шины на корпус транспортного средства [5].

1. Свободная шина. Предполагается, что колесо с армированной шиной состоит из диска, который представляется абсолютно твердым телом, имеющим шесть степеней свободы, сочлененного с боковой поверхностью шины, представленной в недеформированном состоянии частями двух торов, и бандажа, армированного нерастяжимыми нитями (кордом). В недеформированном состоянии бандаж представлен круговым цилиндром радиуса r . По части бандажа осуществляется контакт шины с плоскостью. Боковины обладают упругими свойствами, и их материал описывается в рамках модели несжимаемой резины Муни–Ривлина [6].

Пусть колесо закреплено и ненагружено. Тогда

$$X_1 = \text{const}, \quad X_2 = \text{const}, \quad X_3 = \text{const}, \quad \beta = 0, \quad \kappa = 0, \quad \theta = 0$$

Здесь X_1, X_2, X_3 – координаты центра масс диска C ; β, κ, θ – углы увода, развала и собственного вращения. Уравнения движения и условие нерастяжимости срединной линии бандажа имеют вид [1]

$$\begin{aligned} -\rho r^3 \ddot{u} + n_{11} u'' - n_{01} u + (m_{20} - m_{21}) v' - n_0 + \lambda(1 + u + v) - [\lambda(u' - v)]' &= 0 \\ -\rho r^3 \ddot{v} + (m_{02} - m_{12}) u' + n_{12} v'' - n_{02} v - [\lambda(1 + u + v)]' - \lambda(u' - v) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$(1 + u + v)^2 + (u' - v)^2 = 1 \rightarrow u \cong -v$$

где $u = u(\varphi, t)$ и $v = v(\varphi, t)$ – радиальное и касательное перемещения точек срединной линии бандажа в подвижной цилиндрической системе координат, ρ – линейная плотность срединной линии бандажа, $\lambda = \lambda(\varphi, t)$ – неопределенный множитель Лагранжа (его физический смысл – натяжение срединной линии бандажа), $n_0, n_{01}, n_{11}, n_{02}, n_{12}, m_{02}, m_{20}, m_{12}, m_{21}$ – постоянные коэффициенты, зависящие от геометрических параметров

шины и внутреннего давления в шине (выражения для коэффициентов не приводятся ввиду их громоздкости).

В случае закрепленного ненагруженного колеса граничные условия для функций $u(\varphi, t)$, $v(\varphi, t)$ переходят в условия периодичности этих функций

$$u(0) = u(2\pi), \quad v(0) = v(2\pi), \quad \lambda(0) = \lambda(2\pi)$$

Представим множитель Лагранжа в виде

$$\lambda(\varphi, t) = n_0 + \lambda_1(\varphi, t)$$

где λ_1 – величина первого порядка малости. Взяв производную от обеих частей первого уравнения (1.1) и складывая его со вторым, используя линейризованное условие нерастяжимости срединной линии бандажа, приходим к уравнению относительно функции $u(\varphi, t)$ и условию ее периодичности (аналогичное уравнение было получено ранее [3])

$$\rho r^3 \ddot{v}'' - \rho r^3 \ddot{v} + a_0 v^{(4)} + a_1 v'' + a_2 v = 0, \quad v(0) = v(2\pi) \tag{1.2}$$

$$a_0 = n_0 - n_{11}, \quad a_1 = 2n_0 + n_{01} + n_{12} + m_{20} - m_{21} - m_{02} + m_{12}, \quad a_2 = n_0 - n_{02}$$

Собственные колебания шины, описываемые уравнением (1.2), найдем в виде

$$v = e^{i\omega t} X(\varphi), \quad u = -v' = -e^{i\omega t} X'(\varphi)$$

ω – циклическая частота. Тогда

$$a_0 X^{(4)} + (a_1 - \rho r^3 \omega^2) X'' + (a_2 + \rho r^3 \omega^2) X = 0 \tag{1.3}$$

Решение этого уравнения представим в форме

$$X(\varphi) = G_1 e^{p_1 \varphi} + G_2 e^{p_2 \varphi} + G_3 e^{-p_1 \varphi} + G_4 e^{-p_2 \varphi} \tag{1.4}$$

где p_i ($i = 1, 2$) – корни характеристического уравнения

$$a_0 p^4 + (a_1 - \rho r^3 \omega^2) p^2 + (a_2 + \rho r^3 \omega^2) = 0 \tag{1.5}$$

т.е.

$$p_{1,2}^2 = \left[\rho r^3 \omega^2 - a_1 \pm \sqrt{(a_1 - \rho r^3 \omega^2)^2 - 4a_0(a_2 + \rho r^3 \omega^2)} \right] / (2a_0) \tag{1.6}$$

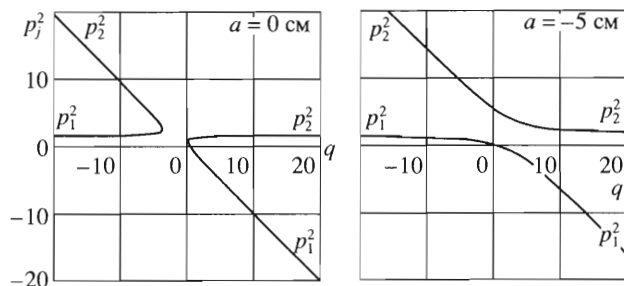
Так как функция $X(\varphi)$ должна быть 2π -периодичной, в соотношении (1.4) следует оставить только экспоненты с чисто мнимыми показателями, модуль которых кратен 2π , т.е.

$$p = 2\pi i n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

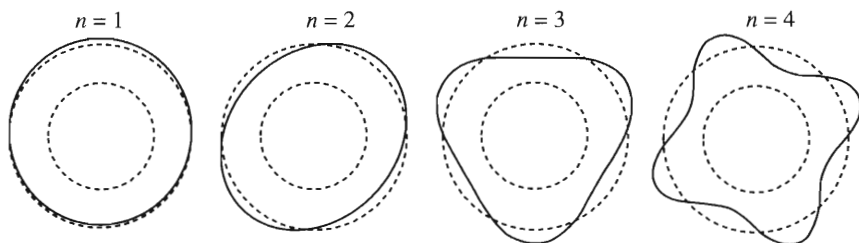
На фиг. 1 изображены зависимости p_1^2 , p_2^2 от $q = -\rho r^3 \omega^2 / a_0 > 0$ при $c = 22.62$ см и $a = 0$ см (слева) и $a = -5$ см (справа); параметры a и c определяют центр окружности, дуга которой – боковина шины. Видно, что бесконечный спектр частот может дать только p_1^2 при $p_1 = 2\pi i n$

$$\omega_n^2 = \frac{-16\pi^4 a_0 n^4 + 4\pi^2 a_1 n^2 - a_2}{\rho r^3 (1 + 4\pi^2 n^2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что $a_0 < 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Соответствующие собственные формы (СФ) представляются выражением

$$X_n(\varphi) = G_1^* \cos(n\varphi) + G_2^* \sin(n\varphi), \quad \forall G_1^*, G_2^*$$

Всякая СФ, соответствующая частоте ω_n , представляется линейной комбинацией $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$. Первые четыре СФ представлены на фиг. 2, а соответствующие им частоты для параметров $a = 0$ см, $c = 22.62$ см таковы:

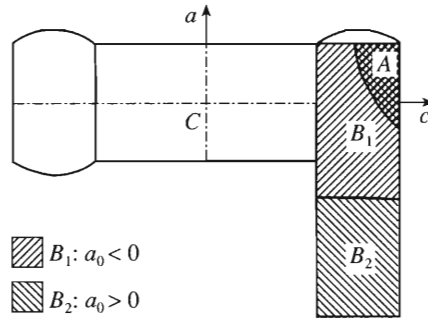
$$\omega_1 = 33.39 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 66.85 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_3 = 100.3 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_4 = 133.75 \text{ с}^{-1}$$

Коэффициент a_0 зависит от давления в шине и ее геометрических параметров (a и c). Для некоторых значений этих параметров невозможно реализовать конструкцию боковой поверхности шины, поскольку она должна сопрягаться с диском и бандажом дугой окружности. Эта область значений параметров (a, c) соответствует на фиг.3 области A . В области значений параметров B_2 возможно конструктивное построение боковой поверхности шины, но при этом коэффициент $a_0 > 0$, что свидетельствует о наличии решений вида $e^{\lambda X}(\varphi)$, $\lambda > 0$, описывающих малые колебания шины, а, значит, о неустойчивости выбранной формы боковой поверхности шины. В областях B_1 параметры (a, c) таковы, что при них реализуется необходимая форма устойчивых боковых поверхностей шины ($a_0 < 0$).

2. Нагруженная шина. Рассмотрим задачу о малых колебаниях шины около положения равновесия. Равновесие нагруженной шины было рассмотрено в работе [1], когда

$$X_1 = \text{const}, \quad X_2 = \text{const}, \quad X_3 = \text{const}, \quad \beta = 0, \quad \kappa = 0, \quad \theta = 0$$

а переменные u, v – функции только угла φ . Зона контакта постоянна $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ (в работе [1] предполагалось, что зона контакта – прямоугольник постоянной ширины, равной ширине бандажа и переменной длины. Длину зоны контакта определяют две



Фиг. 3

функции времени $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$, которые заранее неизвестны и находятся из уравнений движения. В дальнейшем будем считать, что колесо закреплено, а в процессе колебаний меняются функции $u, v, \lambda, \varphi_1, \varphi_2$. Соответствующие уравнения имеют вид (1.1), а граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} \rho r^3 [\dot{u}]_k \dot{\varphi}_k - (-1)^k [\lambda(u' - v)]_{l(k)} + n_{11} [u']_k + r \mu_{1k} \cos \vartheta_k &= 0 \\ \rho r^3 [\dot{v}]_k \dot{\varphi}_k - (-1)^k [\lambda(1 + u + v)]_{l(k)} + n_{12} [v']_k - r \mu_{1k} \sin \vartheta_k &= 0 \\ [u]_k = [v]_k = 0, \quad k = 1, 2; \quad \vartheta_k = \theta + \varphi_k \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $[f(\vartheta)]_k = f(\vartheta_k + 0) - f(\vartheta_k - 0)$ – скачок функции в концевой точке зоны контакта. Индекс $l(k)$ понимается как значение соответствующей функции при $\vartheta_1 - 0$ для $k = 1$ и при $\vartheta_2 + 0$ для $k = 2$, μ_{1k} – компонента реакции связи в граничных точках зоны контакта. Представим функции, определяющие деформации срединной линии бандажа, множители Лагранжа и функции, определяющие зону контакта, в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(\varphi, t) &= U(\varphi) + U_{\text{vib}}(\varphi, t), \quad v(\varphi, t) = V(\varphi) + V_{\text{vib}}(\varphi, t) \\ \lambda(\varphi, t) &= \lambda^\circ(\varphi) + \lambda_{\text{vib}}(\varphi, t) \\ \mu_{1k}(\varphi, t) &= \mu_{1k}^\circ(\varphi) + \mu_{\text{vib}1k}(\varphi, t), \quad \varphi_k(t) = \varphi_k^\circ + \varphi_{\text{vib}k}(t) \end{aligned}$$

где $U, V, \lambda^\circ, \mu_{1k}^\circ, \varphi_k^\circ$ – решение, описывающее положение равновесия шины и удовлетворяющее уравнениям и граничным условиям

$$\begin{aligned} n_{11} U'' - n_{01} U + (m_{20} - m_{21}) V'' - n_0 + \lambda^\circ(1 + U + V) - [\lambda^\circ(U' - V)]' &= 0 \\ (m_{02} - m_{12}) U' + n_{12} V'' - n_{02} V - [\lambda^\circ(1 + U + V)]' - \lambda^\circ(U' - V) &= 0 \\ (1 + U + V)^2 + (U' - V')^2 = 1 \rightarrow U = -V \\ -(-1)^k [\lambda^\circ(U' - V')]_{l(k)} + n_{12} [V']_k + r \mu_{1k}^\circ \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_k^\circ \right) &= 0 \\ -(-1)^k [\lambda^\circ(1 + U + V')]_{l(k)} + n_{12} [V']_k - r \mu_{1k}^\circ &= 0 \\ [U]_k = [V]_k = 0, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Из этой системы находим функции $U, V, \lambda^\circ, \mu_{1k}^\circ, \varphi_k^\circ$, где $\lambda^\circ = n_0 + \lambda_1^\circ$, λ_1° – член первого порядка малости.

Переменные $U_{\text{vib}}, V_{\text{vib}}$, определяющие малые колебания шины в окрестности положения равновесия, найдем из следующей системы (здесь необходимо учитывать, что множители Лагранжа $\lambda_{\text{vib}}, \mu_{\text{vib } 1k}$, а также $\varphi_{\text{vib } k}$ имеют первый порядок малости):

$$\begin{aligned}
 & -\rho r^3 \ddot{U}_{\text{vib}} + (n_{11} - n_0) U''_{\text{vib}} + (n_0 - n_{01}) U_{\text{vib}} + (m_{20} - m_{21} + 2n_0) V'_{\text{vib}} + \lambda_{\text{vib}} = 0 \\
 & -\rho r^3 \ddot{V}_{\text{vib}} + (m_{02} - m_{12} - 2n_0) U'_{\text{vib}} + (n_{12} - n_0) V''_{\text{vib}} + (n_0 - n_{02}) V_{\text{vib}} - \lambda'_{\text{vib}} = 0 \\
 & (1 + U_{\text{vib}} + V'_{\text{vib}})^2 + (U'_{\text{vib}} - V_{\text{vib}})^2 = 1 \rightarrow U_{\text{vib}} = -V'_{\text{vib}} \\
 & -(-1)^k [n_0 (U'_{\text{vib}} - V_{\text{vib}})]_{l(k)} + n_{11} [U'_{\text{vib}}]_k - r \mu_{1k}^\circ \varphi_{\text{vib } k} = 0 \\
 & -(-1)^k [n_0 (U_{\text{vib}} + V'_{\text{vib}}) + \lambda_{\text{vib}}]_{l(k)} + n_{12} [V'_{\text{vib}}]_k - r \mu_{\text{vib } 1k} = 0 \\
 & [U_{\text{vib}}]_k = [V_{\text{vib}}]_k = 0, \quad k = 1, 2
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Взяв производную от обеих частей первого уравнения и складывая его со вторым, используя линеаризованное условие нерастяжимости срединной линии бандажа, получим уравнение и граничные условия

$$\begin{aligned}
 & \rho r^3 \ddot{V}'_{\text{vib}} - \rho r^3 \ddot{V}_{\text{vib}} + a_0 V_{\text{vib}}^{(4)} + a_1 V''_{\text{vib}} + a_2 V_{\text{vib}} = 0 \\
 & V_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ + \varphi_{\text{vib } k}) = 0, \quad V'_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ + \varphi_{\text{vib } k}) = 0; \quad k = 1, 2
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из динамических граничных условий (четвертое соотношение в (2.3)) можно определить $\varphi_{\text{vib } k}$

$$\varphi_{\text{vib } k} = \frac{(-1)^k}{r \mu_{1k}^\circ} (n_0 - n_{11}) V''_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ)$$

Таким образом, зона контакта "пульсирует" на той же частоте, что и функция V''_{vib} .

Однако при определении частоты колебаний шины величину зоны контакта можно принять постоянной, поскольку ее изменение определяет поправки в частоту второго порядка малости в рамках принятой модели. Таким образом, граничные условия в задаче (2.4) эквивалентны следующим:

$$V_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ) + V'_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ) \varphi_{\text{vib } k} \approx V_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ) = 0, \quad V'_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ) + V''_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ) \varphi_{\text{vib } k} \approx V'_{\text{vib}}(\varphi_k^\circ) = 0$$

В дальнейшем для простоты будем писать φ_k вместо φ_k° .

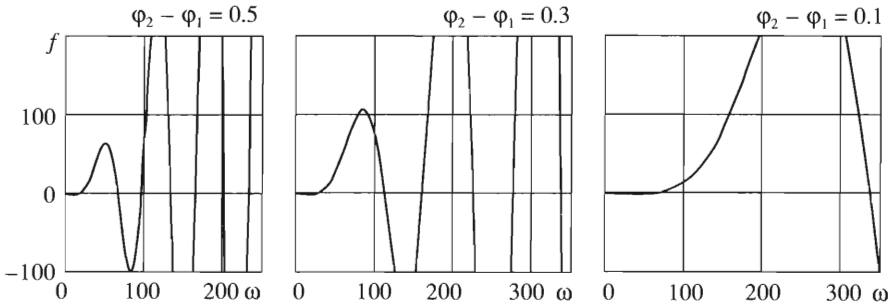
Представим функции, определяющие малые колебания, и множители Лагранжа в виде

$$V_{\text{vib}} = e^{i\omega t} X(\varphi), \quad U_{\text{vib}} = -V'_{\text{vib}} = -e^{i\omega t} X'(\varphi), \quad \lambda_{\text{vib}} = \Delta \lambda e^{i\omega t}, \quad \mu_{\text{vib } 1k} = \Delta \mu_{1k} e^{i\omega t}$$

ω – циклическая частота. Подставив эти выражения в уравнение (2.4), получим уравнение, аналогичное (1.3), с решением, имеющим вид (1.4) и характеристическим уравнением (1.5).

Коэффициенты G_i определяются из граничных условий

$$\begin{aligned}
 & G_1 e^{p_1 \varphi_k} + G_2 e^{p_2 \varphi_k} + G_3 e^{-p_1 \varphi_k} + G_4 e^{-p_2 \varphi_k} = 0 \\
 & G_1 p_1 e^{p_1 \varphi_k} + G_2 p_2 e^{p_2 \varphi_k} - G_3 p_1 e^{-p_1 \varphi_k} - G_4 p_2 e^{-p_2 \varphi_k} = 0; \quad k = 1, 2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$



Фиг. 4

Однородная система (2.5) имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$f(\omega) = 2p_1 p_2 [1 - \text{ch}(p_1(\varphi_2 - \varphi_1)) \text{ch}(p_2(\varphi_2 - \varphi_1))] + (p_1^2 + p_2^2) \text{sh}(p_1(\varphi_2 - \varphi_1)) \text{sh}(p_2(\varphi_2 - \varphi_1)) = 0 \tag{2.6}$$

Выражения для функций $p_1 = p_1(\omega)$ и $p_2 = p_2(\omega)$ даны формулой (1.6). Спектр собственных частот $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется из характеристического уравнения (2.6).

В качестве примера численное решение уравнения (2.6) было проведено для шины размера 175/70 R13 при внутреннем давлении $p = 2$ атм и значениях констант Муни–Ривлина $k_1 = 13\text{Н/см}^2$, $k_2 = 13\text{Н/см}^2$ для трех значений величины зоны контакта (нагрузки).

На фиг. 4 изображены графики функции $f(\omega)$ при значениях параметров $a = 0$ см и $c = 22.62$ см. Точки пересечения графика с осью абсцисс определяют бесконечный спектр частот. Каждой частоте ω_n отвечает своя собственная форма X_n , определяемая выражением (1.4) (постоянные G_i находятся из граничных условий (2.5)). На фиг. 4 изображено три графика, которые показывают, что происходит с частотами для зон контакта разной величины (увеличение зоны контакта связано с увеличением внешней нагрузки). Видно, что увеличение зоны контакта влечет за собой "сгущение" частот. Этот факт хорошо коррелирует с теоремой из теории малых колебаний о поведении собственных частот при наложении связи.

Уравнение (2.6) может давать лишние корни. В частности, легко заметить, что это уравнение имеет нулевые корни: $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$. Однако собственные формы $X(\varphi)$, отвечающие этим случаям, равны нулю.

В случае $p_1 = p_2$ собственные формы следует искать в виде

$$X(\varphi) = (G_1 + G_2\varphi)e^{p_1\varphi} + (G_3 + G_4\varphi)e^{-p_1\varphi} \tag{2.7}$$

Коэффициенты G_i определяются из граничных условий

$$(G_1 + G_2\varphi_k)e^{p_1\varphi_k} + (G_3 + G_4\varphi_k)e^{-p_1\varphi_k} = 0 \tag{2.8}$$

$$(G_1 p_1 + G_2 + G_2 p_1 \varphi_k)e^{p_1\varphi_k} + (-G_3 p_1 + G_4 - G_4 p_1 \varphi_k)e^{-p_1\varphi_k} = 0; \quad k = 1, 2$$

Определитель системы (2.8) представляется в форме

$$\frac{g(\omega)}{2} = 1 + 2p_1^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \text{ch}(2p_1(\varphi_2 - \varphi_1)), \quad p_1^2 = \frac{\rho r^3 \omega^2 - a_1}{2a_0} \tag{2.9}$$

Уравнение $g(\omega) = 0$ имеет единственный корень, отвечающий $p_1 = 0$. Но в этом случае снова получаем, что $X(\varphi) = 0$.

Автор благодарит В.Г. Вильке за советы и замечания, позволившие полнее осветить проблему.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-08-65470-а) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильке В.Г., Кожевников И.Ф. Об одной модели колеса с армированной шиной // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2004. Вып. 4. С. 37-45.
2. Zegelaar P.W.A., Gong S., Pacejka H.B. Tyre Models for the Study of In-Plane Dynamics // 13th IAVSD Symposium of Vehicles on Roads and Tracks, Chengdu, P.R. of China, August 1993. Vehicle System Dynamics. 1993. 23 (Suppl.). P. 324-342.
3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
4. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 2. М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 1997. 160 с.
5. Willumeit H.-P., Böhm F. Wheel vibrations and transient tire forces // Vehicle System Dynamics. 1995. V. 24. № 6/7. P. 525-550.
6. Oden J.T. Finite Elements in Nonlinear Continua. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1972 = Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир. 1976. 464 с.

Москва
e-mail:vano1979@online.ru

Поступила в редакцию
29.III.2005 г.