УДК 531.36:62–50

© 2006 г. Р. Г. Мухарлямов

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ЗАДАННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Предлагается метод построения математической модели динамики механической системы. Строится алгоритм определения выражений управляющих сил и составляющих реакций связей. Приводится модификация уравнений динамики, которая позволяет решить задачу стабилизации связей и обеспечить требуемую точность численного решения соответствующей системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих наложенные на систему связи, ее кинематику и динамику. В силу известных динамических аналогий предлагаемый метод может быть использован для исследования динамики систем различной физической природы. Рассматривается задача моделирования динамики адаптивной оптической системы с двумя степенями свободы.

1. Введение. Уравнения динамики механической системы могут быть построены, если известны ее кинетическая энергия $T^0 = T^0(q^i, \dot{q}^j)$, $\dot{q} \triangleq dq/dt$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, потенциальная энергия $P^0 = P^0(q^i, t)$, диссипативная функция $D^0 = D^0(q^i, \dot{q}^j, t)$, элементарная работа обобщенных непотенциальных внешних сил $Q_s = Q_s(q^i, \dot{q}^j, t)$ и управляющих сил $R_s = R_s(q^i, \dot{q}^j, t)$ $(s = 1, 2, \ldots n)$

$$\delta A = Q_s \delta q^s + R_s \delta q^s \tag{1.1}$$

В равенстве (1.1) и в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Используя известные динамические аналогии [1, 2], соответствующие рассуждения можно провести также для систем различной физической природы. Управляющие силы R_s, действующие на систему, призваны обеспечить выполнение уравнений связей

$$\begin{gathered} f^\mu(q^i, t) = 0, \quad \partial_s f^\mu \dot{q}^s + \partial_t f^\mu = 0, \quad f^\rho(q^i, \dot{q}^j, t) = 0 \\ \partial_s f^\mu \triangleq \frac{\partial f^\mu}{\partial q^s}, \quad \partial_t f^\mu \triangleq \frac{\partial f^\mu}{\partial q^s}; \quad \mu = 1, \ldots, m, \quad \rho = m+1, \ldots, r \end{gathered} \tag{1.2}$$

наложенных на обобщенные координаты q^i и скорости $\dot{q}^j$ системы. Левые части равенств (1.2) дифференцируемы по всем переменным.

Известные классические методы составления уравнений динамики основаны на предположении о том, что уравнения связей (1.2) выполняются при $t = t_0$

$$\begin{gathered} f^\mu(q_0^i, t_0) = 0, \quad \partial_s f^\mu(q_0^i, t_0)\dot{q}_0^s + \partial_t f^\mu(q_0^i, t_0) = 0, \quad f^\rho(q_0^i, \dot{q}_0^j, t_0) = 0 \\ q^i(t_0) = q_0^i, \quad \dot{q}^j(t_0) = \dot{q}_0^j \end{gathered} \tag{1.3}$$

и при всех $t > t_0$. Если же начальные условия (последние два равенства (1.3)) оказались такими, что

$$f^{\mu}(q_0^i, t_0) = c^{\mu}, \quad \partial_s f^{\mu}(q_0^i, t_0)\dot{q}_0^s + \partial_t f^{\mu}(q_0^i, t_0) = c^{m+\mu}, \quad f^{\rho}(q_0^i, \dot{q}_0^j, t_0) = c^{m+\rho}$$

$$c^{\chi} = \mathrm{const}, \quad \chi = 1, \ldots, m+r$$

то численное решение дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений кинематики, динамики и уравнений связей, оказывается неустойчивым, и отклонения от уравнений связей (1.2) возрастают с течением времени. Для стабилизации связей (1.2) необходимо учитывать отклонения от уравнений (1.2) и вводить соответствующую коррекцию в правые части уравнений динамики системы [3, 4]. В последние годы проблема стабилизации связей и построения устойчивых разностных схем решения дифференциально-алгебраических уравнений стала актуальной задачей моделирования динамики механических систем [5, 6].

Ниже предлагается метод построения математической модели динамики. Строится алгоритм определения реакций связей R_s, обеспечивающих выполнение уравнений связей (1.2). Приводится модификация уравнений динамики, которая позволяет решить задачу стабилизации связей и обеспечить требуемую точность численного решения соответствующей системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих наложенные на систему связи, ее кинематику и динамику.

2. Построение уравнений динамики. Для оценки отклонений от уравнений связей (1.2) равенствами

$$y^{\mu} = f^{\mu}(q^i, t), \quad \dot{y}^{\mu} = \partial_s f^{\mu}\dot{q}^s + \partial_t f^{\mu}, \quad \dot{y}^{\rho} = f^{\rho}(q^i, \dot{q}^j, t) \tag{2.1}$$

вводятся [3] в рассмотрение дополнительные параметры – избыточные переменные y^{μ}, $\dot{y}^{\mu}$, $\dot{y}^{\rho}$, для нумерации которых в дальнейшем будут использоваться буквы греческого алфавита. С учетом новых переменных кинематическое состояние системы, соответствующей математической модели, будет определяться обобщенными координатами q^i, y^{μ} и скоростями $\dot{q}^i$, $\dot{y}^{\kappa}$ ($\kappa = 1, \ldots, r$). Кинетическая энергия, потенциальная энергия и диссипативная функция будут также содержать избыточные координаты y^{μ} и скорости $\dot{y}^{\kappa}$: $T = T(q^i, y^{\mu}, \dot{q}^j, \dot{y}^{\kappa})$, $P = P(q^i, y^{\mu}, t)$, $D = D(q^i, y^{\mu}, \dot{q}^j, \dot{y}^{\kappa}, t)$. Предполагается, что функции T, P, D по крайней мере дважды дифференцируемы по всем переменным и при

$$y^{\mu} = 0, \quad \dot{y}^{\kappa} = 0 \tag{2.2}$$

удовлетворяют условиям

$$T = T^0(q^i, \dot{q}^j), \quad \partial_{\mu}T = 0, \quad \dot{\partial}_{\kappa}T = 0, \quad \partial^2_{\mu\nu}T = 0, \quad \partial_{\mu}\dot{\partial}_{\kappa}T = 0, \quad \dot{\partial}^2_{\kappa\eta}T = a_{\kappa\eta}(q^i)$$

$$\partial_{\mu}T \triangleq \frac{\partial T}{\partial y^{\mu}}, \quad \dot{\partial}_{\kappa}T \triangleq \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^{\kappa}}, \quad \partial^2_{\mu\nu}T \triangleq \frac{\partial^2 T}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}, \quad \partial_{\mu}\dot{\partial}_{\kappa}T \triangleq \frac{\partial^2 T}{\partial y^{\mu}\partial \dot{y}^{\kappa}}, \quad \dot{\partial}^2_{\kappa\eta}T \triangleq \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}^{\kappa}\partial \dot{y}^{\eta}}$$

$$P = P^0(q^i, t), \quad \partial_{\mu}P = 0, \quad \partial^2_{\mu\nu}P = k_{\mu\nu}(q^i, t)$$

$$D = D^0(q^i, q^j, t), \quad \dot{\partial}_{\kappa}D = 0, \quad \dot{\partial}^2_{\kappa\eta}D = c_{\kappa\eta}(q^i, \dot{q}^j, t)$$

$$\nu = 1, \ldots, m, \quad \eta = 1, \ldots, r$$

Если значения переменных y^μ, $\dot{y}^\kappa$ достаточно малы: $\|z\| \le \varepsilon$, $z = (y^\mu, \dot{y}^\kappa)$, то, полагая

$$T^0 = \frac{1}{2}m_{ij}(q^s)\dot{q}^i\dot{q}^j \tag{2.3}$$

функции T, P, D можно представить разложением в ряд по степеням y^μ, $\dot{y}^\kappa$:

$$T = \frac{1}{2}m_{ij}(q^s)\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{1}{2}a_{\kappa\eta}(q^s)\dot{y}^\kappa\dot{y}^\eta + T^{(3)} \tag{2.4}$$

$$P = P^0(q^s, t) + \frac{1}{2}k_{\mu\nu}(q^s, t)y^\mu y^\nu + P^{(3)} \tag{2.5}$$

$$D = D^0(q^s, \dot{q}^k, t) + \frac{1}{2}c_{\kappa\eta}(q^s, \dot{q}^k, t)\dot{y}^\kappa\dot{y}^\eta + D^{(3)} \tag{2.6}$$

Здесь $T^{(3)}$, $P^{(3)}$, $D^{(3)}$ – соответствующие слагаемые, которые содержат множители y^μ, $\dot{y}^\kappa$ в степени не ниже третьей. Предполагается, что коэффициенты m_{ij}, $a_{\kappa\eta}$, $k_{\mu\nu}$, $c_{\kappa\eta}$ и все их частные производные ограничены в области Ω изменения переменных q^s, $\dot{q}^j$ и при всех $t \ge t_0$. Силы R_s соответствуют координатам q^s и рассматриваются как управляющие силы, обеспечивающие выполнение равенств (2.1).

Для построения системы дифференциальных уравнений, соответствующей принятым выражениям (2.4)–(2.6) функций T, P, D, можно воспользоваться принципом Даламбера – Лагранжа:

$$\mathcal{E}_i\delta q^i + \mathcal{E}_{n+\kappa}\delta y^\kappa = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &\triangleq E_i(T) + \partial_i P + \dot{\partial}_i D - Q_i - R_i \\ \mathcal{E}_{n+\kappa} &\triangleq E_\kappa(T) + \partial_\kappa P + \dot{\partial}_\kappa D - Q_\kappa - R_\kappa \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$E_i(T) \triangleq (\dot{\partial}_i T)^\cdot - \partial_i T, \quad E_\kappa(T) \triangleq (\dot{\partial}_\kappa T)^\cdot - \partial_\kappa T, \quad (\dot{\partial}_i T) \triangleq \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}, \quad (\dot{\partial}_\kappa T) \triangleq \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}^\kappa}$$

Если вариации избыточных переменных δy^κ определяются из последних двух уравнений (2.2) по правилу

$$\delta y^\kappa = \dot{\partial}_i\dot{y}^\kappa\delta q^i; \ \dot{\partial}_i\dot{y}^\mu = \partial_i f^\mu, \quad \dot{\partial}_i\dot{y}^\rho = \dot{\partial}_i f^\rho \tag{2.8}$$

то возможные перемещения δq^i системы должны быть определены решением системы r линейных алгебраических уравнений (2.8) относительно n неизвестных.

Общее решение системы (2.8) складывается из двух слагаемых:

$$\delta q^i = \upsilon^i\delta s + f_\kappa^{(+)i}\delta y^\kappa \tag{2.9}$$

Первое слагаемое соответствует направлению, касательному к многообразию Φ в фазовом пространстве, которое определяется уравнениями (2.1) при фиксированных значениях переменных y^μ, $\dot{y}^\rho$. Величина υ^i представляет собой соответствующую составляющую векторного произведения $\upsilon = [FC]$ векторов-строк матрицы

$F = (f_i^\kappa)$, $f_i^\kappa \triangleq \dot{\partial}_i f^\rho$

и произвольной матрицы $C = (c_j^\beta)$ ($\beta = r + 2, \ldots, n$), δs – произвольно малая величина. Составляющая υ^i вычисляется как определитель матрицы, образованной единичным вектором $(\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i)$, $(\delta_j^i = 0, i \neq j, \delta_i^i = 1)$ и строками матриц F и C. Второе слагаемое соответствует направлению, нормальному к многообразию Ф. Коэффициенты $f_\kappa^{(+)i}$ составляют матрицу $F^+ = F^T(FF^T)^{-1}$, F^T – матрица, транспонированная к матрице F.

Величина элементарной работы обобщенных управляющих сил при учете выражения (2.9) возможных перемещений системы определяется суммой

$$R_i \delta q^i = R_i \upsilon^i \delta s + R_i f_\kappa^{(+)i} \delta y^\kappa \tag{2.10}$$

Если управляющие силы R_i выбираются из множества функций, удовлетворяющих равенству

$$R_i \upsilon^i = 0 \tag{2.11}$$

то выражение (2.10) принимает вид

$$R_i \delta q^i = \lambda_\kappa \delta y^\kappa \tag{2.12}$$

Действительно, в этом случае $R_i\upsilon^i$ – косое (смешанное) произведение $\{RFC\} = R^T[FC]$ вектора R и векторов, составляющих строки матриц F и C. Величина $\{RFC\}$ вычисляется как определитель, полученный заменой первой строки определителя υ^i составляющими $R_1, \ldots, R_n$ вектора R. Если равенство (2.11) возможно при любой матрице C, то первые $r + 1$ строк определителя $\{RFC\}$ должны быть линейно зависимы. Это означает, что вектор $R = F^T\lambda$ является линейной комбинацией строк матрицы F с произвольными множителями $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$: $R_i = f_i^\kappa \lambda_\kappa$. Такое представление вектора R управляющих сил при $y^\mu = 0$, $\dot{y}^\kappa = 0$ соответствует реакции идеальных связей в классической механике.

Выражение принципа Даламбера – Лагранжа (2.7) при учете равенств (2.9), (2.12) принимает вид

$$\mathcal{E}_i(\upsilon^i \delta s + f_\kappa^{(+)i} \delta y^\kappa) - \lambda_\kappa \delta y^\kappa + \mathcal{E}_{n+\kappa} \delta y^\kappa = 0 \tag{2.13}$$

Вследствие независимости вариаций δs, δy^κ условие (2.13) выполняется только тогда, когда справедливы равенства

$$\mathcal{E}_i \upsilon^i = 0, \quad \mathcal{E}_i f_\kappa^{(+)i} - \lambda_\kappa + \mathcal{E}_{n+\kappa} = 0 \tag{2.14}$$

Так как первое равенство (2.14) аналогично условию (2.11), существуют такие множители λ_κ^*, при которых выполняется равенство

$$\mathcal{E}_i = f_i^\kappa \lambda_\kappa^* \tag{2.15}$$

Используя соотношения (2.15) и $f_i^\kappa f_\eta^{(+)i} = \delta_\eta^\kappa$, из второго равенства (2.14) можно сделать заключение о том, что $\lambda_\kappa^* = \lambda_\kappa$ и

$$\mathcal{E}_{n+\kappa} = 0 \tag{2.16}$$

С учетом принятых обозначений равенства (2.15), (2.16) можно представить в виде системы уравнений Лагранжа

$$(\dot{\partial}_i T)^{\cdot} - \partial_i T = -\partial_i P - \dot{\partial}_i D + Q_i + f_i^{\kappa}\lambda_{\kappa}, \quad (\dot{\partial}_{\kappa} T)^{\cdot} - \partial_{\kappa} T = -\partial_{\kappa} P - \dot{\partial}_{\kappa} D \tag{2.17}$$

Система дифференциально-алгебраических уравнений (2.1), (2.17) позволяет определить неизвестные q^i, $\dot{q}^j$, y^{μ}, $\dot{y}^{\kappa}$, λ_{κ}. Решение этой системы сводится к выражению множителей λ_{κ} и избыточных переменных y^{μ}, $\dot{y}^{\kappa}$ через обобщенные координаты и скорости q^i, $\dot{q}^j$ и интегрированию первой системы уравнений (2.17) при заданных начальных условиях (1.3).

Выражения для λ_{κ} определяются, если уравнения (2.17) представить в виде, разрешенном относительно $\ddot{q}^i$, $\ddot{y}^{\kappa}$. Учитывая выражения (2.4)–(2.6), систему (2.17) запишем в виде

$$m_{ik}\ddot{q}^k = m_i + f_i^{\kappa}\lambda_{\kappa} - m_i^{(2)}, \quad a_{\kappa\eta}\ddot{y}^{\eta} = -b_{\kappa\eta}\dot{y}^{\eta} - k_{\kappa\eta}y^{\nu} - \mathscr{E}_{n+\kappa}^{(2)} \tag{2.18}$$

где

$$m_i = Q_i - \gamma_{i,jk}\dot{q}^j\dot{q}^k - P_i^0 - D_i^0, \quad \gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q^i}\right)$$

$$m_i^{(2)} = \frac{1}{2}((\partial_i a_{\kappa\eta} + \dot{\partial}_i c_{\kappa\eta})\dot{y}^{\kappa}\dot{y}^{\eta} + \partial_i k_{\mu\nu}y^{\mu}y^{\nu}) + \mathscr{E}_i^{(3)}$$

$$\mathscr{E}_i^{(3)} = E_i(T^{(3)}) + \partial_i P^{(3)} + \dot{\partial}_i D^{(3)}$$

$$\mathscr{E}_{n+\kappa}^{(2)} = E_{n+\kappa}(T^{(3)}) + \partial_{\kappa} P^{(3)} + \dot{\partial}_{\kappa} D^{(3)}$$

$$\partial_{\rho} P^{(3)} = 0; \quad b_{\kappa\eta} = \partial_i a_{\kappa\eta}\dot{q}^i + c_{\kappa\eta}$$

Обозначив (m^{ki}) и $(a^{\xi\kappa})$ ($\xi = 1, \ldots, r$) матрицы, обратные к (m_{is}) и $(a_{\kappa\eta})$ соответственно, систему уравнений (2.18) можно представить в виде, разрешенном относительно старших производных:

$$\ddot{q}^k = m^k + f^{k\kappa}\lambda_{\kappa} + m^{k(2)} \tag{2.19}$$

$$\ddot{y}^{\kappa} = b_{\eta}^{\kappa}\dot{y}^{\eta} + k_{\mu}^{\kappa}y^{\mu} + Y^{\kappa(2)} \tag{2.20}$$

Здесь

$$m^k = m^{ki}m_i, \quad f^{k\kappa} = m^{ki}\partial_i f^{\kappa}, \quad m^{k(2)} = -m^{ki}m_i^{(2)}, \quad b_{\eta}^{\kappa} = -a^{\kappa\xi}b_{\xi n}, \quad k_{\mu}^{\kappa} = -a^{\kappa\eta}k_{\eta\mu}$$

$$Y^{\kappa(2)} = -a^{\kappa\eta}\mathscr{E}_{n+\eta}^{(3)} \tag{2.21}$$

3. Определение управляющих воздействий. В разд. 2 выражения обобщенных управляющих сил были построены в виде $R_i = \partial_i f^{\kappa}\lambda_{\kappa}$. Для определения множителей λ_{κ} следует продифференцировать равенства (2.1); получим

$$\ddot{y}^{\kappa} = \partial_k f^{\kappa}\ddot{q}^{k} + h_k^{\kappa}\dot{q}^k + h_t^{\kappa}$$

$$h_k^{\mu} = \partial_k \dot{f}^{\mu}, \quad h_t^{\mu} = \partial_t \dot{f}^{\mu}$$

$$\partial_k \dot{f}^{\mu} = \partial_{ki}^2 f^{\mu}\dot{q}^i + \partial_{kt}^2 f^{\mu}, \quad \partial_t \dot{f}^{\mu} = \partial_{it}^2 f^{\mu}\dot{q}^i + \partial_{tt}^2 f^{\mu} \tag{3.1}$$

$$\partial_{ki}^2 f^{\mu} \triangleq \frac{\partial^2 f^{\mu}}{\partial q^k \partial q^i}, \quad \partial_{kt}^2 f^{\mu} \triangleq \frac{\partial^2 f^{\mu}}{\partial q^k \partial t}, \quad \partial_{tt}^2 f^{\mu} \triangleq \frac{\partial^2 f^{\mu}}{\partial t^2}$$

$$h_k^{\rho} = \partial_k f^{\rho}, \quad h_t^{\rho} = \partial_t f^{\rho}$$

Подстановка в равенство (3.1) значений обобщенных ускорений $\ddot{q}^k$, $\ddot{y}^{\kappa}$ из (2.19), (2.20) приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения множителей Лагранжа λ_{κ}

$$l^{\kappa\eta}\lambda_{\eta} = l^{\kappa}$$

$$l^{\kappa\eta} = \partial_k f^{\kappa} f^{k\eta}, \quad l^{\kappa} = l^{\kappa(0)} + l^{\kappa(1)} + l^{\kappa(2)} \tag{3.2}$$

$$l^{\kappa(0)} = -\partial_k f^{\kappa} m^k - h_k^{\kappa} q^k - h_t^{\kappa}, \quad l^{\kappa(1)} = b_{\eta}^{\kappa}\dot{y}^{\eta} + k_{\mu}^{\kappa} y^{\mu}, \quad l^{\kappa(2)} = Y^{\kappa(2)} - \partial_k f^{\kappa} m^{k(2)}$$

Решение системы (3.2) можно представить в виде суммы трех слагаемых, распределенных по степеням переменных y^{μ}, $\dot{y}^{\kappa}$:

$$\lambda_{\kappa} = \lambda_{\kappa}^{(0)} + \lambda_{\kappa}^{(1)} + \lambda_{\kappa}^{(2)}$$

$$\lambda_{\kappa}^{(0)} = l_{\kappa\eta} l^{\eta(0)}, \quad \lambda_{\kappa}^{(1)} = l_{\kappa\eta} l^{\eta(1)}, \quad \lambda_{\kappa}^{(2)} = l_{\kappa\eta} l^{\eta(2)}; \quad l_{\kappa\eta} l^{\eta\xi} = \delta_{\kappa}^{\xi}$$

При таком выборе распределенных по степеням переменных y^{μ}, $\dot{y}^{\kappa}$ множителей λ_{κ} равенства (1.2) соблюдаются вдоль решений $q^k = q^k(t)$ дифференциальных уравнений динамики системы

$$\begin{aligned} \ddot{q}^k &= p^k + f^{k\kappa}\lambda_{\kappa}^{(1)} + q^{k(2)} \\ p^k &= m^k + f^{k\kappa}\lambda_{\kappa}^{(0)}, \quad q^{\kappa(2)} = m^{k(2)} + f^{k\kappa}\lambda_{\kappa}^{(0)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

если они выполнялись для начальных условий (1.3).

4. Устойчивость. Необходимое условие стабилизации связей (1.2) – асимптотическая устойчивость соответствующего интегрального многообразия системы (3.3). Представим уравнения (3.3), (2.20) в виде систем дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных q^i, q'^j и y^{μ}, y'^{κ}

$$\dot{q}^k = q'^k, \quad \dot{q}'^k = p^k + f^{k\kappa}\lambda_{\kappa}^{(1)} + q^{k(2)}$$

$$p^k = p^k(q^i, q'^j, t), \quad f^{k\kappa} = f^{k\kappa}(q^i, q'^j, t) \tag{4.1}$$

$$\lambda_{\kappa}^{(1)} = \lambda_{\kappa}^{(1)}(q^i, q'^j, y^{\mu}, y'^{\kappa}, t), \quad q^{k(2)} = q^{k(2)}(q^i, q'^j, y^{\mu}, y'^{\kappa}, t)$$

$$\dot{y}^{\mu} = y'^{\mu}, \quad \dot{y}'^{\kappa} = b^{\kappa}_{\eta}y'^{\eta} + k^{\kappa}_{\nu}y^{\nu} + Y^{\kappa(2)}$$
$$b^{\kappa}_{\eta} = b^{\kappa}_{\eta}(q^i, q'^j, t), \quad k^{\kappa}_{\nu} = k^{\kappa}_{\nu}(q^i, q'^j, t), \quad Y^{\kappa(2)} = Y^{\kappa(2)}(q^i, q'^j, y^{\mu}, y'^{\eta}, t) \tag{4.2}$$

$$y^{\mu} = f^{\mu}(q^i, t), \quad y'^{\mu} = \partial_s f^{\mu} q'^s + \partial_t f^{\mu}, \quad y'^{\rho} = f^{\rho}(q^i, q'^j, t) \tag{4.3}$$

В силу равенств (4.3) устойчивость интегрального многообразия (1.2) в новых переменных можно рассматривать как устойчивость по части переменных [7] системы уравнений (4.1), (4.2). Если в пространстве переменных q^i, q'^j расстояние до интегрального многообразия (1.2) определить величиной

$$\|z\|, \quad z = (z^1, \ldots, z^{m+r}), \quad z^{\mu} = y^{\mu}, \quad z^{m+\kappa} = y'^{\kappa}$$

то об устойчивости многообразия (1.2) можно судить по свойствам устойчивости тривиального решения $y^{\mu} = 0$, $y'^{\kappa} = 0$ системы (4.2). Для исследования устойчивости тривиального решения можно воспользоваться методом функций Ляпунова [8]. Если функция $V = V(q^s, q'^j, y^{\mu}, y'^{\kappa}, t)$, $V(q^s, q'^j, 0, 0, t) = 0$, является положительно определенной по переменным y^{μ}, y'^{κ}, то есть $V(q^s, q'^j, y^{\mu}, y'^{\kappa}, t) > 0$ при $y^{\mu}\delta_{\mu\nu}y^{\nu} + y'^{\kappa}\delta_{\kappa\nu}y'^{\nu} > 0$, $t \geq t_0$, а ее производная

$$\dot{V} = \partial_i V q'^i + \partial'_k V p^k + \partial_{\mu} V y'^{\mu} + \partial'_k V f^{k\kappa}\lambda^{(1)}_{\kappa} + \partial'_{\kappa} V Y^{\kappa(2)} + \partial'_k V q^{k(2)} + \partial_t V$$

$$\partial_i V \triangleq \frac{\partial V}{\partial q^i}, \quad \partial_{\mu} V \triangleq \frac{\partial V}{\partial y^{\mu}}, \quad \partial'_k V \triangleq \frac{\partial V}{\partial q'^k}, \quad \partial'_{\kappa} V \triangleq \frac{\partial V}{\partial y'^{\kappa}}, \quad \partial_t V \triangleq \frac{\partial V}{\partial t}$$

вычисленная в силу уравнений (4.1), (4.2), – отрицательно определенная функция, и функции V, y^{μ}, y'^{κ} допускают бесконечно малый высший предел [8], то интегральное многообразие (1.2) системы (4.1) устойчиво асимптотически.

В качестве функции Ляпунова можно использовать положительно определенную квадратичную форму относительно переменных y^{μ}, y'^{κ}

$$2V = u_{\mu\nu}y^{\mu}y^{\nu} + 2\upsilon_{\mu\kappa}y^{\mu}y'^{\kappa} + w_{\kappa\eta}y'^{\kappa}y'^{\eta} \tag{4.4}$$

Коэффициенты $u_{\mu\nu}$, $\upsilon_{\mu\kappa}$, $w_{\kappa\eta}$ формы (4.4) предполагаются непрерывными, дифференцируемыми, ограниченными функциями переменных q^i, q'^j, t во всей области их изменения

$$c_1 \leq u_{\mu\nu}(q^i, q'^j, t) \geq c_2, \quad c_1 \leq \upsilon_{\mu\kappa}(q^i, q'^j, t) \leq c_2, \quad c_1 \leq w_{\kappa\eta}(q^i, q'^j, t) \leq c_2$$

Производная функции (4.4) приводится к виду

$$\dot{V} = u'_{\mu\nu}y^{\mu}y^{\nu} + \upsilon'_{\mu\kappa}y^{\mu}y'^{\kappa} + w'_{\kappa\eta}y'^{\kappa}y'^{\eta} + \dot{V}^{(3)} \tag{4.5}$$

$$2u'_{\mu\nu} = \partial_k u_{\mu\nu}q'^k + \partial'_k u_{\mu\nu}m^k + \partial_t u_{\mu\nu} + 2\upsilon_{\mu\kappa}k^{\kappa}_{\nu} \tag{4.6}$$

$$\upsilon'_{\mu\kappa} = u_{\mu\kappa} + \partial_k \upsilon_{\mu\kappa}q^k + \partial'_k \upsilon_{\mu\kappa}m^k + \partial_t \upsilon_{\mu\kappa} + \upsilon_{\mu\eta}b^{\eta}_{\kappa} + k^{\eta}_{\mu}w_{\eta\kappa} \tag{4.7}$$

$$2w'_{\kappa\eta} = 2\upsilon_{\kappa\eta} + \partial_k w_{\kappa\eta}q'^k + \partial'_k w_{\kappa\eta}m^k + \partial_t w_{\kappa\eta} + 2w_{\kappa\xi}b^{\xi}_{\eta} \tag{4.8}$$

$$u_{\mu\kappa} = 0, \quad \upsilon_{\kappa\eta} = 0, \quad k^{\kappa}_{\nu} = 0, \quad \kappa > m$$

$$\dot{V}^{(3)} = V'_k f^{k\kappa} l_{\kappa\eta}(k^\eta_\mu y^\mu + b^\eta_\xi y'^\xi) + (\upsilon_{\mu\kappa} y^\mu + w_{\eta\kappa} y'^\eta) Y^{\kappa(2)} \tag{4.9}$$

$$2V'_k = \partial'_k u_{\mu\nu} y^\mu y^\nu + 2\partial'_k \upsilon_{\mu\kappa} y^\mu y'^\kappa + \partial'_k w_{\kappa\eta} y'^\kappa y'^\eta$$

В случае, когда

$$\partial'_k u_{\mu\nu} = 0, \quad \partial'_k \upsilon_{\mu\nu} = 0, \quad \partial'_k w_{\mu\nu} = 0, \quad T^{(3)} = 0, \quad P^{(3)} = 0, \quad D^{(3)} = 0$$

вследствие соотношений (2.21), (4.9) выполняется равенство $\dot{V}^{(3)} = 0$, а выражения (4.6)–(4.8) принимают вид

$$2u'_{\mu\nu} = \partial_k u_{\mu\nu} q'^k + \partial_t u_{\mu\nu} + 2\upsilon_{\mu\kappa} k^\kappa_\nu$$

$$\upsilon'_{\mu\kappa} = u_{\mu\kappa} + \partial_k \upsilon_{\mu\kappa} q'^k + \partial_t \upsilon_{\mu\kappa} + \upsilon_{\mu\eta} b^\eta_\kappa + k^\eta_\mu w_{\eta\kappa}$$

$$2w'_{\kappa\eta} = 2\upsilon_{\kappa\eta} + \partial_k w_{\kappa\eta} q'^k + \partial_t w_{\kappa\eta} + 2w_{\kappa\xi} b^\xi_\eta$$

Если в выражениях (2.4)–(2.6) для T, P, D коэффициенты m_{ij}, $a_{\kappa\eta}$, $k_{\mu\nu}$, $c_{\kappa\eta}$ – постоянные и $T^{(3)} = 0$, $P^{(3)} = 0$, $D^{(3)} = 0$, то $Y^{\kappa(2)} = 0$ и система (4.2) состоит из линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае об устойчивости ее тривиального решения можно судить по корням характеристического уравнения $\det(\mu^2\delta^\eta_\kappa - \mu b^\eta_\kappa - k^\eta_\kappa) = 0$.

5. Численное решение. Решение уравнений динамики системы (4.1) при всех $t > t_0$ удовлетворяет равенствам

$$f^\mu(q^i, t) = 0, \quad \partial_s f^\mu q'^s + \partial_t f^\mu = 0, \quad f^\rho(q^i, q'^j, t) = 0 \tag{5.1}$$

если эти равенства выполняются при $t = t_0$. Соответствующим выбором коэффициентов b^κ_η, k^κ_μ правых частей уравнений возмущений связей (4.2), можно добиться стабилизации связей (5.1) при численном решении системы (4.1). Условия, достаточные для стабилизации связей (5.1), определяются построением разностного уравнения, используемого для ее решения.

Пусть

$$\Delta q^i(s) = q^i(s+1) - q^i(s), \quad q^i(s) = q^i(t_0 + \tau s), \quad \tau = \text{const}$$

$$q^i(0) = q^i_0, \quad q^i(s+1) = q^i(s) + \tau q'^i(s)$$

$$\dot{q}^i(0) = q'^i_0, \quad q'^i(s+1) = q'^i(s) + \tau(p^i(s) + f^{i\kappa}(s)\lambda^{(1)}_\kappa(s))$$

Если при $t = t_0 + \tau s$ для оценки отклонения решений системы (4.1) от многообразия, заданного уравнениями связей (5.1), использовать функцию

$$V(s) = V(q^i(s), q'^j(s), y^\mu(s), y'^\kappa(s), s)$$

то значение $V(s + 1)$ может быть определено разложением в ряд

$$V(s+1) = V(s) + \partial_i V(s)\Delta q^i(s) + \partial'_j(s)\Delta q'^j(s) +$$

$$+ \partial_\mu V(s)\Delta y^\mu(s) + \partial'_\kappa V(s)\Delta y'^\kappa(s) + \tau\partial_t V(s) + V^{(2)}(s) \tag{5.2}$$

где $V^{(2)}(s)$ – совокупность членов не ниже второго порядка относительно переменных $\Delta q^i(s)$, $\Delta q'^j(s)$, $\Delta y^\mu(s)$, $\Delta y'^\kappa(s)$, τ. Приращения $\Delta y^\mu(s)$, $\Delta y'^\kappa(s)$ определяются равенствами

$$\Delta y^\mu(s) = \tau y'^\mu(s), \quad \Delta y'^\kappa(s) = \tau(b^\kappa_\eta(s)y'^\eta(s) + k^\kappa_\mu(s)y^\mu(s)) \tag{5.3}$$

При учете соотношений (4.1), (4.2), (5.3) выражение (5.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} V(s+1) &= V(s) + \tau\dot{V}(s) + \tilde{V}(s) \\ \tilde{V}(s) &= V^{(2)}(s) - \tau(\partial'_j V(s) q^{j(2)}(s) + \partial'_\kappa V(s) Y^{\kappa(2)}(2)) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Оценивая правую часть равенства (5.4), можно сформулировать следующие утверждения.

Теорема 1. Если начальные значения $\overset{0}{q_i}$, $q_0^{\prime j}$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} &\|z_0\| \le \varepsilon, \quad z_0 = (z_0^1, \ldots, z_0^{m+r}) \\ &z_0^\mu = f^\mu(q_0^i, t_0), \quad z_0^{m+\mu} = \partial_k f^\mu(q_0^i, t_0) q_0^{\prime k} + \partial_t f^\mu(q_0^i, t_0), \quad z_0^{m+\rho} = f^\rho(q_0^i, q_0^{\prime j}, t_0) \end{aligned} \tag{5.5}$$

и при всех $s = 0, 1, \ldots, S$ выполняются ограничения

$$l_1\|z(s)\|^2 \le V(s), \quad V(s) + \tau\dot{V}(s) \le \alpha l_1\|z(s)\|^2, \quad \tilde{V}(s) \le (1-\alpha)l_1\varepsilon^2$$

$$z(0) = z_0, \quad l_1 > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

то неравенство

$$\|z(s)\| \le \varepsilon \tag{5.6}$$

будет справедливо при всех $s = 1, 2, \ldots, S$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из соотношений (5.4)–(5.6). Действительно, если при соблюдении условий теоремы неравенство (5.6) справедливо для некоторого значения s, то

$$\|z(s+1)\|^2 \le \frac{1}{l_1}V(s+1) = \frac{1}{l_1}(V(s) + \tau\dot{V}(s) + \tilde{V}(s)) \le$$

$$\le \alpha\|z(s)\|^2 + (1-\alpha)\varepsilon^2 \le \alpha\varepsilon^2 + (1-\alpha)\varepsilon^2 = \varepsilon^2$$

Теорема 2. Если начальные значения удовлетворяют условию (5.5) и при всех $s = 0, 1, \ldots, S$ выполняются ограничения

$$\begin{aligned} &l_1\|z(s)\|^2 \le V(s) \le l_2\|z(s)\|^2, \quad \dot{V}(s) \le -l'\|z(s)\|^2, \quad \tilde{V}(s) \le (1-\alpha)l_1\varepsilon^2 \\ &\tau l' < l_2 \le \alpha l_1 + \tau l', \quad l_2 \ge l_1 > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \tag{5.7}$$

то неравенство (5.6) будет выполняться при любом $s = 1, 2, \ldots, S$.

В самом деле, если условие (5.6) верно при некотором значении s, то из соотношений (5.4), (5.7) следует, что

$$\|z(s+1)\|^2 \le \frac{1}{l_1}V(s+1) \le \frac{1}{l_1}(l_2\|z(s)\|^2 - \tau l'\|z(s)\|^2 + \tilde{V}(s)) \le$$

$$\le \frac{1}{l_1}((k_2 - \tau l')\varepsilon^2 + (1-\alpha)l_1\varepsilon^2) \le \alpha\varepsilon^2 + (1-\alpha)\varepsilon^2 = \varepsilon^2$$

Теорема 3. Если функция $V = V(q^i, q'^j, y^\mu, y'^\kappa, t)$ и ее производная $\dot V$, вычисленная в силу системы уравнений (4.1), (4.2), удовлетворяют условиям

$$\dot V = -pV, \quad p > 0, \quad l_1\|z(s)\|^2 \le V(s) \le l_2\|z(s)\|^2$$

и выполняются ограничения

$$\|z_0\| \le \varepsilon\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}, \quad 0 < 1 - \tau p < 1 - \alpha \le 1, \quad \tilde V(s) \le \alpha l_1$$

то неравенство (5.6) будет выполняться при любом $s = 1, 2, \ldots, S$.

Действительно, в этом случае

$$V(s+1) = (1 - \tau p)V(s) + \tilde V(s)$$

и неравенства

$$V(s+1) \le (1-\alpha)V(s) + \alpha l_1\|z_0\|^2 \le (1-\alpha)V(s) + \alpha V(0)$$

означают, что $V(s) \le V(0)$. Следовательно,

$$\|z(s)\|^2 \le \frac{1}{l_1}V(s) \le \frac{1}{l_1}V(0) \le \frac{l_2}{l_1}\|z_0\| \le \varepsilon^2$$

Если в качестве $V(s)$ использовать значения функции Ляпунова и ее производной вида (4.4), (4.5)

$$2V(s) = g_{\chi\varsigma}z^\chi(s)z^\varsigma(s), \quad \dot V(s) = g'_{\chi\varsigma}z^\chi(s)z^\varsigma(s) + \dot V^{(3)}; \quad \chi, \varsigma = 1, \ldots, m + r$$

где

$$g_{\mu\nu} = u_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\kappa} = \upsilon_{\mu\kappa}, \quad g_{\eta\kappa} = w_{\eta\kappa}; \quad g'_{\mu\nu} = u'_{\mu\nu}, \quad g'_{\mu\kappa} = \upsilon'_{\mu\kappa}, \quad g'_{\eta\kappa} = w'_{\eta\kappa}$$

то условия стабилизации связей формулируются следующей теоремой.

Теорема 4. Если начальные значения удовлетворяют условию (5.5), $\tilde V(s) \le (1-\alpha)l_1\varepsilon^2$ и при всех $s = 0, 1, \ldots, S$ выполняются ограничения

$$g_{\chi\zeta}(s)z^\chi(z)z^\gamma(s) \ge 2l_1\|z(s)\|, \quad \tilde g_{\chi\zeta}(s)z^\chi(s)z^\zeta(s) \ge \alpha l_1\|z(s)\|$$

$$2\tilde g_{\chi\zeta} = g_{\chi\zeta} + 2\tau g'_{\chi\zeta}$$

то неравенство (5.6) будет выполняться при любом $s = 1, 2, \ldots, S$.

Доказательство теоремы 4 также непосредственно следует из цепочки неравенств

$$\|z(s+1)\|^2 \le \frac{1}{l_1}V(s+1) \le \frac{1}{l_1}(V(s) + \tau\dot V(s) + \tilde V(s)) \le$$

$$\le \frac{1}{2l_1}\|(g_{\beta\gamma}(s) + 2\tau g_{\beta\gamma}(s))\|\|z(s)\|^2 + \frac{1}{l_1}\tilde V(s) \le \alpha\varepsilon^2 + (1-\alpha)\varepsilon^2 = \varepsilon^2$$

В случае, когда $g_{\chi\zeta} = \mathrm{const}$,

$$\dot z^\beta = p^\beta_\gamma z^\gamma, \quad p^\mu_\nu = 0, \quad p^\mu_{m+\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad p^\mu_{m+\rho} = 0, \quad p^{m+\kappa}_\nu = k^\kappa_\nu, \quad p^{m+\kappa}_{m+\eta} = b^\kappa_\eta$$

выражение $\tilde{g}_{\chi\zeta}$ принимает вид

$$2\tilde{g}_{\chi\zeta} = g_{\chi\theta}(\delta_{\zeta}^{\theta} + 2\tau p_{\zeta}^{\theta}), \quad \theta = 1, 2, \ldots, m + r$$

и оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема 5. Если начальные значения q_0^i, $q_0^{\prime j}$ удовлетворяют условию (5.5), $z(0) = z_0$, $\tilde{V}(s) \le (1-\alpha)l_1\varepsilon^2$ и при всех $s = 0, 1, \ldots, S$ выполняются ограничения

$$2l_1\|z(s)\|^2 \le g_{\beta\gamma}(s)z^{\beta}(s)z^{\gamma}(s), \quad \tilde{g}_{\beta\gamma}z^{\beta}(s)z^{\gamma}(s) \le \alpha l_1\|z(s)\|^2$$

$$2\tilde{g}_{\beta\gamma} = g_{\beta\xi}(\delta_{\gamma}^{\xi} + 2\tau p_{\gamma}^{\xi})$$

то неравенство (5.6) будет выполняться при любом $s = 1, 2, \ldots, S$.

Действительно, пусть условие (5.6) справедливо при некотором значении s. Тогда

$$\|z(s+1)\|^2 \le \frac{1}{l_1}V(s+1) = \frac{1}{l_1}(V(s) + \tau\dot{V}(s) + \tilde{V}(s)) \le$$

$$\le \frac{1}{2l_1}g_{\beta\xi}(\delta_{\gamma}^{\xi} + 2\tau p_{\gamma}^{\xi}(s))z^{\beta}z^{\gamma} + \frac{1}{l_1}\tilde{V}(s) \le \alpha\varepsilon^2 + (1-\alpha)\varepsilon^2 = \varepsilon^2$$

6. Пример. Управление элементом адаптивной оптической системы. Элемент дискретной адаптивной оптической системы [9] может быть сконструирован механизмом, составленным из невесомого кривошипа OA, вращающегося вокруг оси Ox_3, и закрепленного на нем ползуна B (фиг. 1). Положение ползуна B определяется полярными координатами $q^1 = r$, $q^2 = \varphi$. В плоскости Qx_1x_2 движется точка $P^*(x_1, x_2)$: $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, из которой исходит луч света, направленный на зеркало, укрепленное на поверхности ползуна B. Требуется определить величину F реакции $\mathbf{F}$ связи

$$r - R = 0, \quad R = \text{const} \tag{6.1}$$

и выражение момента M, приложенного к кривошипу, при котором луч, отраженный от зеркала, попадает в фиксированную точку $C(c, 0)$ плоскости Ox_1x_2. Цель управления определяется уравнением связи

$$x(t)(2\cos\varphi - R/c) - R = 0 \tag{6.2}$$

где $x(t)$ – значение координаты точки P пересечения прямой BP^* с осью Ox_1.

Ползун B рассматривается как материальная точка, на которую действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная в сторону, противоположную направлению оси Ox_2. Избыточные переменные y^1, y^2, $\dot{y}^1$, $\dot{y}^2$ определяются соотношениями

$$y^1 = r - R, \quad y^2 = x(t)(2\cos\varphi - R/c) - R \tag{6.3}$$

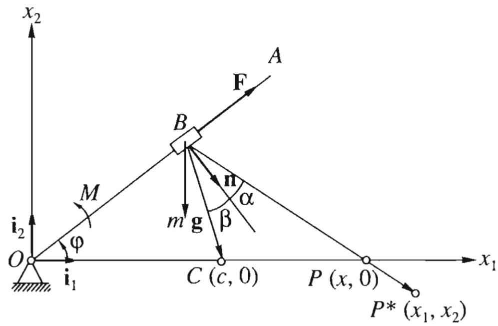
$$\dot{y}^1 = \dot{r}, \quad \dot{y}^2 = \dot{x}(t)(2\cos\varphi - R/c) - 2x(t)\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{6.4}$$

Для рассматриваемой системы

$$2T^0 = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad 2P^0 = mgr\sin\varphi, \quad D^0 = 0$$

Полагая

$$2T = 2T^0 + (\dot{y}^1)^2 + (\dot{y}^2)^2, \quad 2P = 2P^0 + k(y^2)^2, \quad 2D = b(\dot{y}^2)^2; \quad k, b = \text{const}$$



Фиг. 1

уравнения динамики, соответствующие математической модели, можно представить системой дифференциальных уравнений

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg\sin\varphi + F, \quad mr^2\ddot{\varphi} = -m(2r\dot{r}\dot{\varphi} + gr\cos\varphi) + M \tag{6.5}$$

$$\ddot{y}^1 = 0, \quad \ddot{y}^2 = -b\dot{y}^2 - ky^2 \tag{6.6}$$

Выражения для величины силы реакции и управляющего момента в правых частях уравнений (6.5) определяются равенствами

$$F = \lambda_1\frac{\partial f^1}{\partial r} + \lambda_2\frac{\partial f^1}{\partial r} = \lambda_1, \quad M = \lambda_1\frac{\partial f^1}{\partial\varphi} + \lambda_2\frac{\partial f^2}{\partial\varphi} = -2\lambda_2 x(t)\sin\varphi$$
$$f^1 \equiv r - R, \quad f^2 \equiv x(t)(2\cos\varphi - R/c) - R \tag{6.7}$$

Если

$$r(0) = R = \text{const}, \quad \dot{r}(0) = 0$$

то из равенства (6.3) и первого уравнения (6.6) следует, что $y^1(t) \equiv 0$ и $r(t) = R$. Тогда из уравнения (6.5) и первого равенства (6.7) следует, что

$$\lambda_1 = m(g\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2)$$

а второе уравнение (6.6) принимает вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\cos\varphi - \frac{2\lambda_2 x(t)}{mR^2}\sin\varphi \tag{6.8}$$

Остается определить множитель λ_2. Для этого достаточно продифференцировать второе равенство (6.4) с учетом второго уравнения (6.6), уравнения (6.8) и выражений (6.3), (6.4). Имеем

$$\lambda_2 = \frac{mRL(\dot{\varphi}, \varphi, t)}{4x^2(t)\sin^2\varphi}$$

$$L(\dot{\varphi}, \varphi, t) = l_2(\varphi, t)\dot{\varphi}^2 + l_1(\varphi, t)\dot{\varphi} + l_0(\varphi, t)$$
$$l_2(\varphi, t) = 2Rx(t)\cos\varphi, \quad l_1(\varphi, t) = 2R(2\dot{x}(t) + bx(t))\sin\varphi \tag{6.9}$$

$$l_0(\varphi, t) = R(R/c - 2\cos\varphi)(\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t)) - gx(t)\sin 2\varphi + kR^2$$

Подстановка выражения (6.9) в уравнение (6.8) приводит к уравнению относительно φ

$$\ddot{\varphi} = -\frac{L(\dot{\varphi}, \varphi, t)}{2Rx(t)\sin\varphi} - \frac{g}{R}\cos\varphi \tag{6.10}$$

Если начальные условия $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ выбраны так, что

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{R}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{x(0)}\right)\right), \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{R\dot{x}(0)}{2x^2(0)\sin\varphi_0}$$

то функция

$$y = x(t)(2\cos\varphi - R/c) - R, \quad y \equiv y^2 \tag{6.11}$$

сохраняет постоянное значение $y = 0$ на соответствующем решении уравнения (6.10). Из второго уравнения системы (6.6) следует, что его тривиальное решение $y = 0$ устойчиво асимптотически, если $b > 0$, $k > 0$. Остается определить величины коэффициентов b, k для обеспечения стабилизации связи (6.2) при численном решении уравнения (6.10).

Численный эксперимент проведен при следующих данных:

$$R = 3.4641, \quad c = 3, \quad m = 1, \quad \varphi_0 = 0.4685, \quad \dot{\varphi}_0 = -0.005, \quad x(t) = 2c + 0.5\cos t - 1$$

$$\varphi(s+1) = \varphi(s) + \tau\dot{\varphi}(s), \quad \tau = \text{const}$$

$$\dot{\varphi}(s+1) = \dot{\varphi}(s) - \frac{\tau}{R}\left(\frac{L(\dot{\varphi}(s), \varphi(s), s)}{2x(s)\sin\varphi(s)} + g\cos\varphi(s)\right)$$

Пусть при $t = \tau s$ отклонения решений уравнения (6.10) от многообразия, заданного уравнением связи (6.2), оцениваются величиной

$$\|z(s)\| = \sqrt{y^2(s) + y'^2(s)}, \quad z = (y, y'), \quad y' = \dot{y}, \quad \|z_0\| = 0.0412$$

Если для оценки $\|z(s)\|$ использовать функцию

$$V(s) = 3y^2(s) + 4y(s)y'(s) + 3y'^2(s), \quad y(s) = x(s)(2\cos\varphi(s) - R/c) - R$$

то $l_1 = 1$, $l_2 = 5$, и равенство $\dot{V}(s) = -pV(s)$ выполняется при $p = b = -4/3$, $k = -1$.

Разложим функцию $V(s+1)$ в ряд

$$V(s+1) = V(s) + V_y(s)\Delta y(s) + V_{y'}(s)\Delta y'(s) + V^{(2)}(s)$$

Тогда

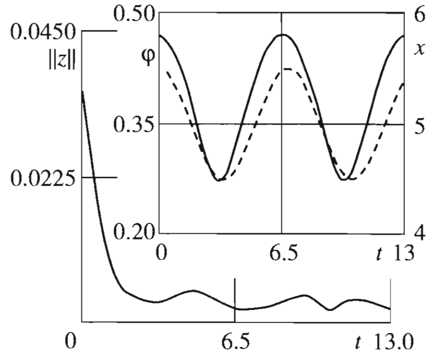
$$V(s+1) = (1 - \tau p)V(s) + \tilde{V}(s) \tag{6.12}$$

Из выражения (6.12) следует, что неравенство $V(s+1) \le V(s)$ выполняется, если

$0 \le \alpha \le p\tau \le 1$, $\tilde{V}(s) \le \alpha l_1\|z_0\|^2$

Полагая $\tilde{V}(s) = (\tau^2/2)W(s)$ и учитывая только члены второго порядка относительно величины τ в выражении (6.12), можно получить оценку $|W(s)| \le 225$. Вычисления, проведенные в соответствии с теоремой 3, дают следующие условия для выбора величины τ:

$$\tau_1 \le \tau \le \tau_2, \quad \tau_1 = 0.75\alpha, \quad \tau_2 = 0.0027\sqrt{2\alpha}$$



Фиг. 2

Условие $\tau_1 < \tau < \tau_2$ выполняется, если $0 < \alpha \leq 2.682 \times 10^{-5}$. Значению $\alpha = 0.2665 \times 10^{-5}$ соответствуют $\tau_1 = 0.1999 \times 10^{-5}$, $\tau_2 = 0.6233 \times 10^{-5}$. Неравенство $\|z_0\| \leq \varepsilon\sqrt{l_1/l_2}$ позволяет определить ограничение на величину ε: $\varepsilon \geq 9.213 \times 10^{-2}$.

На фиг. 2 приведены графики функций $x = x(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\|z(t)\| = \sqrt{y^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ при $\tau = 2 \times 10^{-6}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 03-01-00376) и Министерства образования и науки РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maisser P., Enge O., Freudenberg H., Kielau G.* Electromechanical Interactions in Multibody Systems Containing Electromechanical Drives // Multibody System Dynamics. 1997. V. 1. № 3. P. 281–302.
2. *Layton R.A.* Principles of Analytical System Dynamics. N. Y.: Springer, 1998. 158 p.
3. *Четаев Н.Г.* О вынужденных движениях. // Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 329–335.
4. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 1972. V. 1. № 1. P. 1–16.
5. *Ascher U.M., Hongsheng Chin, Petzold L.R., Reich S.* Stabilization of constrained mechanical systems with DAEs and invariant manifolds // J. Mech. Structures and Machines. 1995. V. 23. № 2. P. 135–158.
6. *Rentrop P., Strehmel K., Weiner R.* Ein Überblick über Einschrittverfaren zur numerischen Integration in der technischen Simulation // GAMM-Mitteilungen. 1966. Bd 19. H. 1. S. 9–43.
7. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
8. *Мухарлямов Р.Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. 1969. Т.5. № 4. С. 688–699.
9. Адаптивная оптика / Под ред. Витриченко Э.А. М.: Мир, 1980. 456 с.

Москва
e-mail: rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru
robgar@mail.ru

Поступила в редакцию
3.VI.2004