УДК 531.36:62–50

© 2006 г. А. Н. Сиротин

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Изучается задача оптимального управления вращением осесимметричного твердого тела. В качестве критерия выбран интегрально-квадратичный функционал, характеризующий энергозатраты для осуществления маневра, граничные условия для вектора угловой скорости произвольны. Управлением служит главный момент приложенных внешних сил. Для решения задачи в случае фиксированного времени окончания используются необходимые условия принципа максимума. Для получаемой канонической системы прямых и сопряженных дифференциальных уравнений устанавливаются новые нетривиальные первые интегралы, которые позволяют параметризовать множество всех экстремалей. Таким образом, задача оптимального управления сводится к задаче нелинейного математического программирования. Показано, что в последней не может быть более двух разных решений, и указано семейство краевых условий, когда оптимальное вращение определяется единственно явным образом.

Ранее многочисленные аналогичные задачи управления исследовались другими авторами при более общих предположениях относительно управляемой системы (несимметрия тензора инерции, наличие геометрических ограничений на вектор управления, критерий быстродействия и др.). Однако считалось, что конечное условие для вектора скорости или кинетического момента обладает свойством симметрии (в частности, полное торможение вращений). Например, задача оптимального управления вращением осесимметричного твердого тела подробно описана [1–3]; в частности, продемонстрировано эффективное применение свойства системы с инвариантной нормой для аналитического решения задачи полного быстрейшего торможения вращающегося тела с динамической симметрией. Однако в силу существенной нелинейности задачи конструктивных результатов для произвольных граничных условий и иных функционалов качества получено не было. В данной работе, благодаря выделению семейства первых интегралов для прямой и сопряженной систем уравнений принципа максимума, удается построить ряд аналитических решений.

1. Формулировка задачи. Изучается задача оптимального управления величиной и направлением скорости вращения осесимметричного твердого тела. В качестве управления используется главный момент внешних сил, приложенных к телу. Основной задачей управления считается изменение вектора угловой скорости от начального значения до требуемого терминального за фиксированное конечное время таким образом, чтобы маневру соответствовали наименьшие энергозатраты. Граничные условия для вектора угловой скорости могут быть произвольными, а изменение ориентации во внимание не принимается. Другими словами, изучается задача управления раскруткой-торможением тела.

Будем полагать, что оси связанной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции тела. Пусть $I_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции в силу осевой симметрии тела

$$I_1 = I_2 = I \tag{1.1}$$

Соответствующие динамические уравнения Эйлера в проекциях на связанные оси покоординатно можно записать в виде

$$\dot{\omega}_j = (-1)^j k\omega_{3-j}\omega_3 + u_j, \quad j = 1, 2; \quad \dot{\omega}_3 = u_3; \quad k = (I_2 - I_3)/I_1 = 1 - I_3/I \qquad (1.2)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ – вектор управления, который связан с вектором главного момента внешних сил $M = (M_1, M_2, M_3)^T$ соотношениями

$$u_i = I_i^{-1} M_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Для изучаемого маневра раскрутки-торможения считаются заданными граничные условия

$$\omega(0) = \upsilon, \quad \omega(T) = w; \quad \upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)^T, \quad w = (w_1, w_2, w_3)^T \qquad (1.3)$$

где $T > 0$ – момент окончания движения, который полагается также известным.

В качестве критерия, характеризующего величину суммарных энергозатрат для осуществления требуемого маневра, выберем интегральный квадратичный функционал (всюду далее интегрирование ведется по отрезку $[0, T]$)

$$J = \frac{1}{2}\int (u_1^2(t) + u_2^2(t) + C^{-1}u_3^2(t))dt \qquad (1.4)$$

где $C > 0$ – весовой коэффициент. В частности, если $C = I^2 I_3^{-2}$, то

$$J = \frac{1}{2} I^{-2} \int \langle M(t), M(t) \rangle dt$$

где $\langle ., . \rangle$ – символ скалярного произведения. Цель управления состоит в минимизации энергозатрат

$$\inf J$$

где нижняя грань ищется по всем допустимым (в смысле краевых условий (1.3)) траекториям и управлениям.

Таким образом, сформулированная задача оптимального управления системой (1.2), (1.3) с целевой функцией (1.4) нелинейна, что существенно затрудняет получение точного аналитического решения. Цель работы – описание новых первых интегралов канонической системы принципа максимума и получение аналитических решений для программного управления.

2. Применение формализма принципа максимума. Задачу оптимального управления будем исследовать с помощью необходимых условий принципа максимума. Основным допущением, которое используется в последующих рассуждениях, будет предположение о существовании решения задачи в классе кусочно-непрерывных управлений. Можно убедиться, что расширение класса управлений до измеримых функций времени не приводит к улучшению результата.

Исследуемая вариационная задача не вырождена, и поэтому сопряженная переменная, соответствующая целевому функционалу J, в силу однородности уравнений считается равной –1. Поэтому положим

$$H(\omega, \gamma, u) = -1/2(u_1^2 + u_2^2 + C^{-1}u_3^2) + k\gamma_1\omega_2\omega_3 - k\gamma_2\omega_1\omega_3 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 \qquad (2.1)$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – вектор сопряженных переменных.

Из условия максимума функции (2.1) по вектору управления получаем

$$u_1 = \gamma_1, \quad u_2 = \gamma_2, \quad u_3 = C\gamma_3 \tag{2.2}$$

После этого выпишем прямую и сопряженную системы

$$\begin{gathered}\dot\omega_j = (-1)^j k\omega_{3-j}\omega_3 + \gamma_j, \quad \dot\gamma_j = (-1)^j k\gamma_{3-j}\omega_3, \quad j = 1, 2; \quad \dot\omega_3 = C\gamma_3, \\ \dot\gamma_3 = (\gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2)k\end{gathered} \tag{2.3}$$

Подстановка выражений (2.2) в равенство (2.1) приводит к следующему выражению для функции Гамильтона:

$$H(\omega, \gamma) = (\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1)k\omega_3 + 1/2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + C\gamma_3^2) \tag{2.4}$$

Как известно, прямая и сопряженная системы (2.3), соответствующие оптимальному управлению (2.2), образуют систему канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона $H(\omega, \gamma)$, определяемой формулой (2.4), т.е.

$$\dot\omega = \partial H(\omega, \gamma)/\partial\gamma, \quad \dot\gamma = -\partial H(\omega, \gamma)/\partial\omega \tag{2.5}$$

Кроме того, из равенств (2.3) и (2.2) можно сделать вывод о том, что оптимальное управление и, следовательно, траектория принадлежат классу бесконечно дифференцируемых функций времени.

Полученная в результате применения формализма принципа максимума гамильтонова система имеет очевидный первый интеграл

$$H(\omega, \gamma) = h_1 = \text{const} \tag{2.6}$$

который отражает свойство постоянства функции Гамильтона для системы канонических уравнений, не зависящих явно от времени.

Далее будет показано, что имеются другие первые интегралы. Это позволяет полностью проинтегрировать систему (2.3) и выписать явные формулы для экстремалей.

3. Первые интегралы. Для системы (2.3) можно указать семейство первых интегралов, являющееся следствием свойств определенной симметрии функции Гамильтона. Более точно для решений системы (2.3) справедливы равенства

$$\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1 = h_2 = \text{const}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = h_3 = \text{const} \tag{3.1}$$

Этот факт легко проверяется непосредственным дифференцированием. Покажем тем не менее, как эти соотношения связаны с имеющимися однопараметрическими группами преобразований координат, которые оставляют функцию Гамильтона без изменений. Заметим, кстати, что первый интеграл (2.6) – следствие инвариантности функции Гамильтона относительно группы сдвигов по времени.

Обозначим матрицу поворота на угол ε на плоскости следующим образом:

$$B(\varepsilon) = \left\|\begin{matrix}\cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{matrix}\right\| \in SO(2), \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

и введем обозначения для векторов и матриц

$$\omega^\varepsilon = (\omega_1^\varepsilon, \omega_2^\varepsilon, \omega_3^\varepsilon)^T = \left\|\begin{matrix}B(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 1\end{matrix}\right\|\omega, \quad \gamma^\varepsilon = (\gamma_1^\varepsilon, \gamma_2^\varepsilon, \gamma_3^\varepsilon)^T = \left\|\begin{matrix}B(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 1\end{matrix}\right\|\gamma$$

$$\tilde\omega = \begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix}, \ \tilde\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{pmatrix}, \ \tilde\omega^\varepsilon = \begin{pmatrix}\omega_1^\varepsilon \\ \omega_2^\varepsilon\end{pmatrix}, \ \tilde\gamma^\varepsilon = \begin{pmatrix}\gamma_1^\varepsilon \\ \gamma_2^\varepsilon\end{pmatrix}, \ \tilde u = \begin{pmatrix}u_1 \\ u_2\end{pmatrix}, \ \tilde\upsilon = \begin{pmatrix}\upsilon_1 \\ \upsilon_2\end{pmatrix}, \ \tilde w = \begin{pmatrix}w_1 \\ w_2\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\Theta = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{\Theta} = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad D(\tilde{\omega}, \tilde{\gamma}) = \det \left\| \begin{matrix} \omega_1 & \gamma_1 \\ \omega_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|$$

Верны равенства

$$D(\tilde{\gamma}^{\varepsilon}, \tilde{\omega}^{\varepsilon}) = D(B(\varepsilon)\tilde{\gamma}, B(\varepsilon)\tilde{\omega}) = \det B(\varepsilon) D(\tilde{\gamma}, \tilde{\omega}) = D(\tilde{\gamma}, \tilde{\omega})$$

$$(\gamma_1^{\varepsilon})^2 + (\gamma_2^{\varepsilon})^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad \omega_3^{\varepsilon} = \omega_3, \quad \gamma_3^{\varepsilon} = \gamma_3$$

Это, в свою очередь, означает, что для любого вещественного ε справедливо соотношение

$$F(\tilde{\gamma}^{\varepsilon}, \tilde{\omega}^{\varepsilon}) k\omega_3^{\varepsilon} + \frac{1}{2}((\gamma_1^{\varepsilon})^2 + (\gamma_2^{\varepsilon})^2 + C(\gamma_3^{\varepsilon})^2) = D(\tilde{\gamma}, \tilde{\omega}) k\omega_3 + \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$$

или, если учесть формулу (2.4),

$$H(\varepsilon) \equiv H(\omega^{\varepsilon}, \gamma^{\varepsilon}) = H(\omega, \gamma) \equiv H(0) \tag{3.4}$$

Другими словами, функция Гамильтона инвариантна относительно однопараметрической группы линейных преобразований, описываемых формулами (3.3).

Дифференцируя обе части равенства (3.4) по ε, получаем

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon} H(\varepsilon)\right|_{\varepsilon = 0} = 0 \tag{3.5}$$

или подробнее, принимая во внимание канонические уравнения (2.5),

$$\left(\frac{\partial H(\omega^{\varepsilon}, \gamma^{\varepsilon})}{\partial \omega^{\varepsilon}}\right)^T \left.\frac{d\omega^{\varepsilon}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} + \left(\frac{\partial H(\omega^{\varepsilon}, \gamma^{\varepsilon})}{\partial \gamma^{\varepsilon}}\right)^T \left.\frac{d\gamma^{\varepsilon}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = 0 \tag{3.6}$$

Из формулы (3.3) следует

$$\left.\frac{d\omega^{\varepsilon}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = \Theta\omega, \quad \left.\frac{d\gamma^{\varepsilon}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = \Theta\gamma$$

Тогда из соотношений (3.3) и (2.5) получаем

$$-\dot{\gamma}^T \Theta \omega + \dot{\omega}^T \Theta \gamma = 0$$

или иначе

$$-\dot{\tilde{\gamma}}^T \tilde{\Theta} \tilde{\omega} + \dot{\tilde{\omega}}^T \tilde{\Theta} \tilde{\gamma} = 0$$

Пользуясь свойством кососимметричности матрицы $\tilde{\Theta}$, приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\omega}^T \tilde{\Theta} \tilde{\gamma}) = \frac{d}{dt} D(\tilde{\gamma}, \tilde{\omega}) = 0$$

откуда и вытекает первое соотношение (3.1).

Для вывода второй формулы (3.1) воспользуемся другой группой линейных преобразований, не меняющей функцию Гамильтона. Для вещественного ε положим

$$\omega_j^\varepsilon = \omega_j + \varepsilon\gamma_j, \quad \gamma_j^\varepsilon = \gamma_j, \quad j = 1, 2; \quad \omega_3^\varepsilon = \omega_3, \quad \gamma_3^\varepsilon = \gamma_3$$

Из выражения (2.4) и элементарных свойств определителя вытекает равенство (3.4), и следовательно, верно равенство (3.5).

Учитывая в формуле (3.6) соотношения

$$\left.\frac{d\omega^\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \mathrm{diag}\{1, 1, 0\}\gamma, \quad \left.\frac{d\gamma^\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

приходим к равенству

$$\dot\gamma^T\mathrm{diag}\{1, 1, 0\}\gamma = 0$$

откуда следует интеграл, определяемый вторым равенством (3.1).

Таким образом, в рассматриваемой задаче наличие у функции Гамильтона двух групп инвариантных преобразований (группы плоских вращений и линейных сдвигов) привело к появлению двух новых первых интегралов. Это позволяет решить исходную задачу оптимального управления аналитически.

4. Семейство экстремалей. Перейдем к интегрированию уравнений (2.3), решения которых – экстремали в исходной задаче.

В силу первого равенства уравнения прямой и сопряженной систем для третьих координат не зависят от остальных, что позволяет исследовать их раздельно. Учитывая первый интеграл, определяемый первым равенством (3.1), получаем

$$\dot\omega_3 = C\gamma_3, \quad \dot\gamma_3 = -h_2k$$

и поэтому выписываем соответствующие решения

$$\gamma_3(t) = a_1t + a_2, \quad \omega_3(t) = \frac{Ca_1t^2}{2} + Ca_2t + a_3$$

где использовано обозначение

$$a_1 = -h_2k \tag{4.1}$$

и a_2, a_3 – некоторые постоянные.

Оставшиеся уравнения системы (2.3) запишем в матричном виде

$$\dot{\tilde\omega} = k\omega_3\tilde\Theta\tilde\omega + \tilde\gamma, \quad \dot{\tilde\gamma} = k\omega_3\tilde\Theta\tilde\gamma \tag{4.2}$$

Пусть $B(t) \in \mathrm{SO}(2)$ – матрица вращения на плоскости, которая является решением задачи Коши

$$B(0) = \mathrm{diag}\{1, 1\}, \quad \dot B = k\omega_3\tilde\Theta B; \tag{4.3}$$

Как известно, справедлива параметризация

$$B \equiv B(t) = B(\varphi(t)) \tag{4.4}$$

где $\varphi(t)$ – угол поворота, который удовлетворяет уравнениям

$$\varphi(0) = 0(\mathrm{mod}2\pi), \quad \dot\varphi = k\omega_3 \tag{4.5}$$

что непосредственно вытекает из выражений (4.3) и (4.4).

Имея в виду, что функция $\omega_3(t)$ к этому моменту уже определена, решение задачи Коши (4.5) можно записать так:

$$\varphi(t) = \frac{Cka_1t^3}{6} + \frac{Cka_2t^2}{2} + ka_3t(\mathrm{mod}2\pi) \tag{4.6}$$

Из уравнений (4.2) и (4.3) вытекают соотношения

$$(B^T\tilde{\omega}) = B^T\tilde{\gamma}, \quad (B^T\tilde{\omega}) = 0$$

откуда

$$\tilde{\omega}(t) = B(\varphi(t))(\tilde{f}t + \tilde{g}), \quad \tilde{\gamma}(t) = B(\varphi(t))\tilde{f}, \quad \tilde{f} = (f_1, f_2)^T, \quad \tilde{g} = (g_1, g_2)^T$$

где $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ – постоянные векторы.

Таким образом, общее решение системы (2.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}(t) = B(\varphi(t))(\tilde{f}t + \tilde{g}), \quad \omega_3(t) = \frac{Ca_1t^2}{2} + Ca_2t + a_3 \\ &\tilde{\gamma}(t) = B(\varphi(t))\tilde{f}, \quad \gamma_3(t) = a_1t + a_2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Угол $\varphi(t)$ описывается уравнением (4.6).

Перейдем к нахождению решения двухточечной краевой задачи (1.3), (2.3). Используя условия (1.3) при $t = 0$, можно определить часть постоянных:

$$g_1 = \upsilon_1, \quad g_2 = \upsilon_2, \quad a_3 = \upsilon_3 \tag{4.8}$$

Имеется возможность уменьшить число неизвестных параметров, воспользовавшись равенством (4.1) и первыми интегралами. Действительно, из первой формулы (3.1) и равенств (4.7) получаем соотношение

$$h_2 = D(\tilde{\gamma}, \tilde{\omega}) = D(B\tilde{f}, B(\tilde{f}t + \tilde{g})) = D(B(\tilde{f}, \tilde{f}t + \tilde{g})) = (\det B)D(\tilde{f}, \tilde{f}t + \tilde{g}) = F(\tilde{f}, \tilde{g})$$

Теперь, используя формулу (4.1), приходим к равенству

$$a_1 = -kD(\tilde{f}, \tilde{\upsilon}) \tag{4.9}$$

которое, в действительности, означает, что постоянная a_1 зависит от неизвестного вектора параметров $\tilde{f}$.

Таким образом, определению подлежат только три постоянные f_1, f_2 и a_2. Для этого воспользуемся вторым краевым условием (1.3) при $t = T$. Преобразования приводят к системе трех уравнений относительно трех неизвестных

$$\tilde{f} = [B^T(\varphi(t))\tilde{w} - \tilde{\upsilon}]T^{-1}, \quad -\frac{kT}{2}D(\tilde{f}, \tilde{\upsilon}) + a_2 = \frac{w_3 - \upsilon_3}{CT} \tag{4.10}$$

где

$$\varphi(T) = -\frac{Ck^2T^3}{6}D(\tilde{f}, \tilde{\upsilon}) + \frac{Cka_2T^2}{2} + k\upsilon_3T$$

Получить общее решение такой задачи не представляется возможным вследствие существенной нелинейности. Однако можно сделать некоторые замечания о свойствах этих решений: 1) решение может быть не единственным, но существует всегда (что следует, например, из механических соображений о характере решаемой задачи), 2) каждому решению соответствует траектория в исходной задаче, которая удовлетворяет необходимым условиям принципа максимума, и наоборот. Следовательно, получаем исчерпывающее описание семейства экстремальных траекторий и соответствующих управлений в изучаемой задаче оптимального управления вращением. Далее будет рассмотрена проблема поиска минимума исходного функционала на полученном множестве экстремалей.

5. Решение задачи оптимального управления вращением. Здесь рассмотрим выбор оптимальной траектории из полученного семейства экстремальных. Поэтому будем исследовать задачу поиска минимума функционала на параметризированном множестве экстремалей и, таким образом, перейдем от вариационной задачи в функциональном пространстве к задаче математического программирования в конечномерном пространстве. Для удобства выкладок введем другую параметризацию экстремальных траекторий и управлений, что позволяет воспользоваться структурой исходного минимизируемого функционала.

Подставив выражения (2.2) в равенство (1.4), получим

$$2J = \int(\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t))dt + C\int\gamma_3^2(t)dt \tag{5.1}$$

Преобразуем первое слагаемое. Используя второе равенство (3.1), имеем

$$\int(\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t))dt = \langle\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(0)\rangle T$$

Из третьей формулы (4.7) следует, что $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{f}$. Поэтому, используя первое равенство и свойства ортогональной матрицы $B(\varphi(t))$, имеем

$$\langle\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(0)\rangle = \langle\tilde{f}, \tilde{f}\rangle = \{\langle B^T(\varphi(T))\tilde{w}, B^T(\varphi(T))\tilde{w}\rangle - 2\langle B^T(\varphi(T))\tilde{w}, \tilde{v}\rangle + \langle\tilde{v}, \tilde{v}\rangle\}T^{-2} =$$
$$= \{\langle\tilde{w}, \tilde{w}\rangle + \langle\tilde{v}, \tilde{v}\rangle\}T^{-2} - 2\langle B^T(\varphi(T))\tilde{w}, \tilde{v}\rangle T^{-2}$$

Допустим, оба вектора $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ ненулевые. Тогда

$$B(\alpha) = \frac{\tilde{v}}{|\tilde{v}|} = \frac{\tilde{w}}{|\tilde{w}|}$$

где α – угол между этими векторами. Будем для удобства выкладок также считать, что если $|\tilde{v}||\tilde{w}| = 0$, то $\alpha = 0$. По определению скалярного произведения векторов записываем

$$\langle B^T(\varphi(T))\tilde{w}, \tilde{v}\rangle = |\tilde{w}||\tilde{v}|\cos B(\varphi(T))\tilde{v}, \quad \tilde{w} = |\tilde{v}||\tilde{w}|\cos(\varphi(T) - \alpha)$$

Таким образом,

$$\int(\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t))dt = (|\tilde{v}|^2 + |\tilde{w}|^2)T^{-1} - 2|\tilde{v}||\tilde{w}|\cos(\varphi(T) - \alpha)T^{-1}$$

Если воспользоваться третьим равенством (4,7), то второе слагаемое в формуле (5.1) можно записать в виде

$$C\int\gamma_3^2(t)dt = C\int(a_1t + a_2)^2dt = C\left(\frac{a_1^2T^3}{3} + a_1a_2T^2 + a_2^2T\right) \tag{5.2}$$

Следовательно, учитывая равенство (4.6), описывающее величину угла $\varphi(t)$, для целевого функционала, определенного на семействе экстремалей, имеем

$$2J = (|\tilde{\upsilon}|^2 + |\tilde{w}|^2)T^{-1} - 2|\tilde{\upsilon}||\tilde{w}|\cos\left(\frac{Cka_1T^3}{6} + \frac{Cka_2T^2}{2} + k\upsilon_3T - \alpha\right)T^{-1} +$$

$$+ C\left(\frac{a_1^2T^3}{3} + a_1a_2T^2 + a_2^2T\right) \tag{5.3}$$

Граничные условия на левом конце для всех координат и условия на правом конце для первых двух компонент вектора угловой скорости учтены посредством соотношений (4.8) и первого равенства (4.10). Из граничного условия (1.3) в конечный момент для оставшейся составляющей угловой скорости, поскольку по построению $CT > 0$, выразим a_2:

$$a_2 = \frac{w_3 - \upsilon_3}{CT} - \frac{a_1T}{2} \tag{5.4}$$

и подставим в равенство (5.3). В результате таких преобразований приходим к выводу, что задача поиска минимального значения функционала на множестве экстремалей сводится к проблеме минимизации функции одной переменной без ограничений:

$$\inf_{a_1} J(a_1);\quad 2J(a_1) = (|\tilde{\upsilon}|^2 + |\tilde{w}|^2)T^{-1} - 2|\tilde{\upsilon}||\tilde{w}|\cos(x + b)T^{-1} + \frac{Ca_1^2T^3}{12} + \frac{(w_3 - \upsilon_3)^T}{CT}$$

$$x = -\frac{kCT^3}{12}a_1,\quad b = \frac{w_3 + \upsilon_3}{2}kT - \alpha(\mathrm{mod}\,2\pi)$$

Тогда сформулированная задача эквивалентна проблеме поиска точной нижней грани функции $F(x)$:

$$\inf_x F(x);\quad F(x) = -2a\cos(x + b) + x^2;\quad a = \frac{Ck^2T^2}{12}|\tilde{\upsilon}||\tilde{w}| \geq 0 \tag{5.5}$$

Напомним, что здесь граничные условия и время окончания считаются фиксированными.

По следствию из теоремы Вейерштрасса ([4], гл. 1, §2, п. 2.3) точная нижняя грань достигается, и следовательно, решение задачи существует:

$$F(x^*) = \min_x F(x)$$

Если

$$|\tilde{\upsilon}||\tilde{w}| = 0 \tag{5.6}$$

то $a = 0$ и приходим к задаче

$$F(x^*) = \min_x x^2$$

которая имеет единственное решение

$$x^* = 0,\quad F(x^*) = 0$$

Поэтому, если $|\tilde{\upsilon}||\tilde{w}| = 0$, то

$$a_1 = 0,\quad a_2 = \frac{w_3 - \upsilon_3}{CT}$$

Используя формулы (4.6), (4.7), теперь получаем соответствующие решения для части переменных

$$\varphi(t) = \frac{w_3 - \upsilon_3}{CT}\frac{kt^2}{2} + k\upsilon_3 t(\mathrm{mod}2\pi),\ u_3(t) = C\gamma_3(t) = \frac{w_3 - \upsilon_3}{T},\ \omega_3(t) = \frac{(w_3 - \upsilon_3)}{T}t + \upsilon_3 \quad (5.7)$$

Решения для оставшихся двух координат вектора угловой скорости и управления выпишем, различая два частных случая, при которых возможно равенство (5.6):

1) $\tilde{\upsilon} = 0 \Rightarrow \tilde{f} = B^T(\varphi(T))\tilde{w}T^{-1},\quad \tilde{u}(t) = \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\omega}(t) = B(\varphi(t) - \varphi(T))\tilde{w}T^{-1}$

2) $\tilde{w} = 0 \Rightarrow \tilde{f} = -\tilde{\upsilon}T^{-1},\quad \tilde{u}(t) = \tilde{\gamma}(t) = -B(\varphi(t))\tilde{\upsilon}T^{-1},\quad \tilde{\omega}(t) = B(\varphi(t))\tilde{\upsilon}(1 - T^{-1})$

Теперь исследуем решение задачи в предположении $|\tilde{\upsilon}||\tilde{w}| \neq 0$, т.е. $a > 0$. Здесь интерес будет представлять наиболее конструктивное и простое описание решения соответствующей общей задачи нелинейного математического программирования (5.5).

Допустим $A = \{x_1, ..., x_n\}$ – множество всех локальных минимумов функции $F(x)$. Другими словами,

$$A = \{x \in \mathbb{R}: F'(x) = 0,\ F''(x) \geq 0\}$$

или подробнее,

$$\sin(x + b) = -a^{-1}x,\quad \cos(x + b) \geq -a^{-1},\quad x \in A \quad (5.8)$$

Конечность числа элементов в множестве A вытекает из первого равенства.

Ясно, что верно соотношение

$$\min_x F(x) = \min_{x \in A} F(x)$$

Для $x \in A$ в силу определения возможно другое описание минимизируемой функции:

$$F(x) = -2a\cos(x + b) + a^2\sin^2(x + b) = a^2 - G(a\cos(x + b))$$

$$G(y) = 2y + y^2$$

Поскольку

$$\min_{x \in A} F(x) = a^2 - \max_{x \in A} G(a\cos(x + b))$$

приходим к задаче

$$\max_{x \in A} G(a\cos(x + b))$$

Функция $G(y)$ имеет единственный глобальный минимум в точке $y^* = -1$. Следовательно, максимум функции $G(a\cos(x + b))$ на $x \in A$ достигается в точках, для которых значения $a\cos(x + b)$ находятся на наибольшем удалении от y^*. В силу второго условия (5.8) это означает, что такая задача эквивалентна задаче вида

$$\max_{x \in A} \cos(x + b)$$

Пусть

$$A_1 = \{x \in A: \cos(x + b) \geq 0\},\quad A_2 = \{x \in A: \cos(x + b) < 0\}$$

Расположим элементы этих множеств в порядке неубывания абсолютных значений

$$A_1 = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k\}, \quad |X_*| \equiv |\bar{x}_1| < |\bar{x}_2| < \ldots < |\bar{x}_k| \le a$$

$$A_2 = \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m\}, \quad |\tilde{x}_1| < |\tilde{x}_2| < \ldots < |\tilde{x}_m| \equiv |X^*| \le a$$

По построению

$$\cos(x+b) = \begin{cases} \sqrt{1-a^{-2}x^2}, & x \in A_1 \\ -\sqrt{1-a^{-2}x^2}, & x \in A_2 \end{cases}$$

и поэтому

$$\max_{x \in A_1} \cos(x+b) = \cos(X_* + b), \quad \max_{x \in A_2} \cos(x+b) = \cos(X^* + b)$$

Так как $A = A_1 \cup A_2$, то

$$\max_{x \in A} \cos(x+b) = \max\{\cos(X_* + b), \cos(X^* + b)\}$$

и следовательно,

$$x^* \in \{X_*, X^*\}$$

$$F(x^*) = a^2 - 2a\max\{\cos(X_* + b), \cos(X^* + b)\} - a^2\max{}^2\{\cos(X_* + b), \cos(X^* + b)\}$$

Вследствие существенной нелинейности исследуемой задачи получить более конструктивное описание решения вряд ли возможно. Тем не менее, некоторые качественные выводы сделать удается.

Действительно, если $a > 0$, то решение задачи (5.5) может оказаться не единственным, но решений может быть не более двух, поскольку $x^* \in \{X_*, X^*\}$. Оптимальная траектория и соответствующее управление описываются уравнениями (4.6)–(4.10), (5.4), в которых надо положить

$$a_1 = -\frac{12}{kCT^3}x^*$$

В общей ситуации $a > 0$ тем не менее есть частный случай, когда имеется возможность получить явное описание оптимальной траектории и доказать единственность решения.

Действительно, пусть

$$b = 0$$

или, подробнее,

$$\frac{w_3 + v_3}{2}kT - \alpha = 0(\mathrm{mod}\, 2\pi) \tag{5.9}$$

Тогда решение задачи (5.5) единственно и имеет вид

$$x^* = 0, \quad F(x^*) = -2a$$

в силу простых оценок сверху

$$\min_x\{-2a\cos x + x^2\} \ge -2a\max_x \cos x + \min_x x^2 = -2a$$

Тогда

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{w_3 - \upsilon_2}{CT} \tag{5.10}$$

и следовательно, $\varphi(t)$, $u_3(t)$ и $\omega_3(t)$ описываются соотношениями (5.7). Теперь из условия (5.9) и первого равенства (4.10) получаем

$$\varphi(T) = \alpha(\mathrm{mod}2\pi), \quad \tilde{f} = (B^T(\varphi(T))\tilde{w} - \tilde{\upsilon})T^{-1} = (B^T(-\alpha)\tilde{w} - \tilde{\upsilon})T^{-1}$$

Используя эти соотношения в общем решении (4.7), находим

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\gamma}(t) = B(\varphi(t) - \alpha)\tilde{w}T^{-1} - B(\varphi(t))\tilde{\upsilon}T^{-1}$$

$$\tilde{\omega}(t) = B(\varphi(t) - \alpha)\tilde{w}T^{-1} + B(\varphi(t))\tilde{\upsilon}(1 - T^{-1}t)$$

Равенство (5.9) имеет место, например, для граничных условий

$$\tilde{\upsilon} = \tilde{w}, \quad \upsilon_3 = -w_3$$

В этом случае

$$\alpha = 0(\mathrm{mod}2\pi); \quad \tilde{u}(t) \equiv 0, \quad \tilde{\omega}(t) \equiv B(\varphi(t))\tilde{\upsilon}$$

Это, в частности, означает, что для общих граничных условий оптимальное вращение, вообще говоря, не подразумевает полной остановки в какой-либо момент. Другими словами, маневр, состоящий из двух этапов (торможение до полной остановки с последующей раскруткой), не является в общем случае оптимальным с точки зрения минимальных энергозатрат.

В заключение покажем, что известное решение задачи оптимального управления вращением сферически симметричного тела получается как частный случай приведенных выше рассуждений. Если $I_1 = I_2 = I_3$, то $k = 0$ и приходим к выводу, что задача поиска минимума функционала на экстремалях сводится к следующей:

$$\min_{a_1} a_1^2$$

откуда делаем вывод, что решение единственно и имеет вид (5.10). Функции $u_3(t)$, $\omega_3(t)$ при этом снова описываются последними двумя соотношениями (5.7), а

$$\varphi(t) \equiv 0(\mathrm{mod}2\pi)$$

Тогда

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{w} - \tilde{\upsilon}}{T}, \quad \tilde{u}(t) = \tilde{\gamma}(t) = \tilde{f}, \quad \tilde{\omega}(t) = \frac{\tilde{w} - \tilde{\upsilon}}{T}t + \tilde{\upsilon}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00050).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
3. *Зубов В.И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. шк., 1982. 285 с.
4. *Minoux M.* Programmation Mathematique. Theorie et Algorithmes. Paris: Dunod, 1983 = *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 486 с.

Москва
e-mail: asirotin2@yandex.ru

Поступила в редакцию
26.I.2005