УДК 531.36

© 2006 г. А. В. Карапетян

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ ГОРЯЧЕВА – ЧАПЛЫГИНА: СУЩЕСТВОВАНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ И ВЕТВЛЕНИЕ

Обсуждаются вопросы существования, устойчивости и ветвления инвариантных множеств в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, подчиненного условиям Горячева – Чаплыгина. Исследуются как тривиальные инвариантные множества, на которых лежат маятникообразные движения волчка Горячева – Чаплыгина, так и нетривиальные, на которых движение волчка описывается эллиптическими функциями времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, подчиненное условиям Горячева – Чаплыгина [1, 2].

Пусть P – вес тела, A, B, C ($A = B = 4C$) – главные моменты инерции тела для неподвижной точки, $x = a > 0$, $y = z = 0$ – координаты центра масс в соответствующих осях, а $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – проекции угловой скорости тела и единичного вектора восходящей вертикали на эти оси.

Вводя обозначение $\omega^2 = Pa/C$ и полагая, без уменьшения общности, $C = 1$, приведем уравнения движения тела в форме Эйлера – Пуассона к виду

$$4\dot{\omega}_1 = 3\omega_2\omega_3, \quad 4\dot{\omega}_2 = -3\omega_3\omega_1 + \omega^2\gamma_3, \quad \dot{\omega}_3 = -\omega^2\gamma_2 \tag{1.1}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 \tag{1.2}$$

Известно, что уравнения (1.1), (1.2) допускают интегралы энергии $H = \text{const}$, площадей $K = \text{const}$, геометрический $\Gamma = 1$ и на нулевом уровне интеграла площадей интеграл Горячева – Чаплыгина $G = \text{const}$:

$$H = \frac{1}{2}[4(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_3^2] + \omega^2\gamma_1 = \omega^2 h \quad (h \in [-1, +\infty)) \tag{1.3}$$

$$K = 4(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + \omega_3\gamma_3 = 0 \tag{1.4}$$

$$\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.5}$$

$$G = (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_3 - \omega^2\omega_1\gamma_3 = \omega^3 g \quad (g \in (-\infty, +\infty)) \tag{1.6}$$

Согласно модифицированной теории Рауса [3–7] критические множества одного из интегралов (1.3) или (1.6) на фиксированных уровнях всех остальных интегралов ((1.4)–(1.6) или (1.3)–(1.5)) соответствуют инвариантным множествам системы (1.1), (1.2). Будем искать критические множества интеграла G на фиксированных уровнях интегралов $H = \omega^2 h$, $K = 0$ и $\Gamma = 1$. Для этого введем функцию

$$W = G + \lambda(H - \omega^2 h) + \mu K + 1/2\nu(\Gamma - 1)$$

где λ, μ и ν – неопределенные множители Лагранжа, и выпишем условия ее стационарности по переменным ω_1, ω_2, ω_3 и γ_1, γ_2, γ_3

$$
\begin{aligned}
&\partial W/\partial\omega_1 = 2\omega_1\omega_3 + 4\lambda\omega_1 + 4\mu\gamma_1 - \omega^2\gamma_3 = 0\\
&\partial W/\partial\omega_2 = 2\omega_2\omega_3 + 4\lambda\omega_2 + 4\mu\gamma_2 = 0\\
&\partial W/\partial\omega_3 = (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \lambda\omega_3 + \mu\gamma_3 = 0\\
&\partial W/\partial\gamma_1 = \lambda\omega^2 + 4\mu\omega_1 + \nu\gamma_1 = 0, \quad \partial W/\partial\gamma_2 = 4\mu\omega_2 + \nu\gamma_2 = 0\\
&\partial W/\partial\gamma_3 = -\omega^2\omega_1 + \mu\omega_3 + \nu\gamma_3 = 0
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Уравнения (1.7) следует дополнить уравнениями (1,3)–(1.5), которые представляют собой условия стационарности функции W по переменным λ, μ и ν.

2. Тривиальные инвариантные множества. Рассмотрим сначала случай, когда все неопределенные множители Лагранжа равны нулю ($\lambda = \mu = \nu = 0$). При этом из уравнений (1.3)–(1.5) и (1.7) следует, что шесть фазовых переменных системы (1.1), (1.2) стеснены пятью соотношениями

$$
\omega_1 = \omega_2 = \gamma_3 = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad 1/2\omega_3^2 + \omega^2\gamma_1 = \omega^2 h \tag{2.1}
$$

Это означает, что соотношения (2.1) определяют семейства одномерных инвариантных множеств, параметризованные безразмерной постоянной h интеграла энергии. При этом тело совершает маятникообразные движения: колебания при $h \in (-1, 1)$ и вращения при $h > 1$. При $h = -1$ тело находится в устойчивом положении равновесия, а при $h = 1$ – либо находится в неустойчивом положении равновесия, либо совершает асимптотические при $t \to \pm\infty$ движения. Действительно, полагая (см. (2.1)) $\gamma_1 = \sin\varphi$, $\gamma_2 = \cos\varphi$, $\omega_3 = \dot\varphi$, имеем (см. уравнения (1.1), (1.2)), что $\varphi = \varphi(t)$ определяется из уравнения

$$
\ddot\varphi + \omega^2\cos\varphi = 0 \tag{2.2}
$$

причем

$$
1/2\dot\varphi^2 + \omega^2\sin\varphi = \omega^2 h \tag{2.3}
$$

Заметим, что при $h \in (-1, 1)$ существует одно семейство инвариантных множеств, на которых лежат колебания тела, а при $h > 1$ – два семейства, соответствующих вращениям тела по часовой стрелке ($\dot\varphi < 0$) или против нее ($\dot\varphi > 0$), причем при любом $h \in [-1, +\infty)$ интеграл G принимает на инвариантных множествах (2.1) нулевое значение ($g = 0$).

Вычисляя вторую вариацию функции W в окрестности инвариантных множеств (2.1) и определяя линейное многообразие $\delta H = \delta K = \delta\Gamma = 0$, имеем

$$
2\delta^2 W = 2\dot\varphi(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2\omega^2\omega_1\gamma_3 \tag{2.4}
$$

$$
\delta K = 4(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi) + \dot\varphi\gamma_3 = 0 \tag{2.5}
$$

Квадратичная форма (2.4) переменных ω_1, ω_2 и γ_3 на линейном многообразии (2.5) в пространстве этих переменных является знакоопределенной (знакопеременной), если положителен (отрицателен) определитель

$$
\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 4\sin\varphi & 4\cos\varphi & \dot\varphi \\ 4\sin\varphi & 2\dot\varphi & 0 & -\omega^2 \\ 4\cos\varphi & 0 & 2\dot\varphi & 0 \\ \dot\varphi & -\omega^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

Здесь $\varphi = \varphi(t)$ – решение уравнения (2.2), для которого справедливо соотношение (2.3). Учитывая последнее, имеем $\Delta = 16\omega^4(h^2 - 1)$. Таким образом, инвариантные множества (2.1) доставляют интегралу (1.6) на фиксированных уровнях интегралов (1.3)–(1.5) седловое значение при $h \in (-1, 1)$ и экстремальное значение при $h \in (1, +\infty)$ (при $\dot{\varphi} > 0$ – минимальное, а при $\dot{\varphi} < 0$ – максимальное, так как главный диагональный минор третьего порядка Δ_3 определителя Δ равен $\Delta_3 = 32\dot{\varphi}$). Следовательно [7], при $h \in (-1, 1)$ инвариантные множества (2.1) неустойчивы, а при $h \in (1, +\infty)$ – устойчивы. Эти выводы полностью согласуются с результатами работы [8], в которой доказана орбитальная неустойчивость колебательных и орбитальная устойчивость вращательных маятникообразных движений волчка Горячева – Чаплыгина.

3. Нетривиальные инвариантные множества. Рассмотрим теперь случай, когда не все неопределенные множители Лагранжа равны нулю ($\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$). Исключая эти множители из уравнений (1.7), приведем последние к виду (с учетом соотношения (1.5))

$$\begin{gathered}\omega_1\gamma_2 \mp \omega_2(1 \pm \gamma_1) = 0, \quad \omega_3\gamma_2\gamma_3 + 4\omega_2(1 \pm \gamma_1 - \gamma_3^2) = 0 \\ 4[3\gamma_3^2 - 2(1 \pm \gamma_1)]\omega_2^2 = \pm\omega^2\gamma_2^2\gamma_3^2\end{gathered} \tag{3.1}$$

При этом соотношение (1.4) выполняется тождественно, а соотношение (1.3) принимает вид

$$h \pm 1 = \pm\frac{3}{2}\frac{\gamma_3^4}{3\gamma_3^2 - 2(1 \pm \gamma_1)} \tag{3.2}$$

Пять соотношений (1.5), (3.1), (3.2), связывающих шесть фазовых переменных системы (1.1), (1.2), определяют две пары семейств одномерных инвариантных множеств этой системы, параметризованных безразмерной постоянной интеграла энергии h. Первая пара отвечает верхнему знаку в соотношениях (3.1), (3.2), и следовательно, существует при $h \in [-1, +\infty)$ (при этом $3\gamma_3^2 > 2(1 + \gamma_1)$), а вторая пара – нижнему знаку, и следовательно, существует при $h \in [1, +\infty)$ (при этом $3\gamma_3^2 < 2(1 - \gamma_1)$). Семейства, входящие в ту или иную пару, различаются направлением вращения (см. соотношения (3.1)).

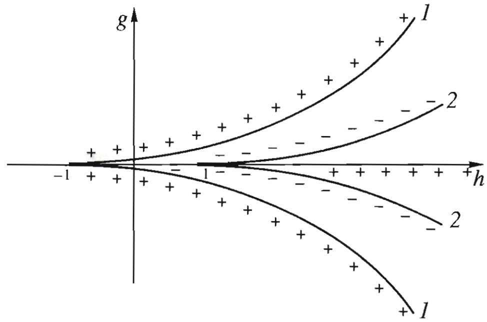
Вычисляя безразмерное значение g интеграла G на инвариантных множествах, определяемых совокупностью соотношений (1.5), (3.1), (3.2), имеем

$$27g^2 = 2(h \pm 1)^3 \tag{3.3}$$

(верхний знак по-прежнему отвечает первой паре семейств, а нижний – второй паре; семейства, входящие в ту или иную пару, различаются знаком g). Заметим, что соотношение вида (3.3) было получено ранее из других соображений [9].

Вспоминая, что на инвариантных множествах (2.1) $g = 0$, построим на плоскости (h, g) бифуркационную диаграмму Пуанкаре – Смейла (см. фигуру). Прямая $g = 0$ соответствует семейству тривиальных инвариантных множеств, а кривые *1* и *2* – первой и второй парам семейств нетривиальных инвариантных множеств. Знаками плюс и минус помечены соответственно устойчивые и неустойчивые инвариантные множества (устойчивость нетривиальных множеств определяется в соответствии с теорией бифуркации).

В заключение отметим, что движение волчка Горячева – Чаплыгина на нетривиальных инвариантных множествах описывается эллиптическими функциями време-



ни. Действительно, из уравнений (1.1), (1.2) при учете соотношений (3.1), (3.2) следует, что

$$\dot{\gamma}_3 = \omega_2; \quad \omega_2^2 = \frac{\omega^2}{96(h \pm 1)} F_{\pm}(\gamma_3) \tag{3.4}$$

$$F_{\pm}(\gamma_3) = 32(h \pm 1)^2 - 12(h \pm 1)(3h \pm 5)\gamma_3^2 \pm 36(h \pm 1)\gamma_3^4 - 9\gamma_3^6$$

Зная $\gamma_3(t)$ (см. уравнения (3.4)), можно найти функцию $\omega_2(t)$ (см. (3.4)), $\gamma_1(t)$ (см. (3.2)) и $\gamma_2(t)$ (см. (3.2), (1.5)), а также $\omega_1(t)$ и $\omega_3(t)$ (см. первые два равенства (3.1)). В частности,

$$\gamma_1 = \mp\left[1 - \frac{3}{2}\gamma_3^2 \pm \frac{3}{4}\frac{\gamma_3^4}{(h \pm 1)}\right], \quad \gamma_2^2 = \frac{\gamma_3^2}{16(h \pm 1)^2} F_{\pm}(\gamma_3) \tag{3.5}$$

Заметим, что соотношения (3.5) определяют нетривиальные инвариантные множества на сфере Пуассона (1.5) (напомним, что соответствующие тривиальные множества имеют вид $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$, $\gamma_3 = 0$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00398) и программы “Университеты России”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горячев Д.Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$. // Мат. сб. кружка любителей мат. наук. 1900. Т. 21. № 3. С. 431–438.
2. *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. 1904. Т. 12. № 1. С. 1–4.
3. *Routh E.J.* A Treatise of Stability of a Given State of Motion. // London: MacMillan, 1877. 108 p.
4. *Levi-Civita T.* Sur la recherche des solution particulières des systèmes differentiels et sur les mouvment stationaires. // Prac. mat.-fis. 1906. V. 17. P. 1–40.
5. *Salvadori L.* Un osservazione su di un criterio di stabilità del Routh. // Reud. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli Ser. 4. 1953. V. 20. № 1–2. P. 269–272.
6. *Пожарицкий Г.К.* О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 145–154.
7. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС. 1998. 165 с.
8. *Маркеев А.П.* О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина. // ПММ. 2004. Т. 68. № 2. С. 282–293.
9. *Харламов М.П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ. 1988. 197 с.

Москва
e-mail: avkarap@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
23.VI.2005