УДК 531.36:521.1

© 2006 г. А. П. Маркеев

О КРАТНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ В СИСТЕМАХ ГАМИЛЬТОНА

Исследуется устойчивость линейной 2π-периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Система зависит от параметров γ_k ($k = 1, 2, ..., s$) и ε. Параметр ε считается малым. При $\varepsilon = 0$ система автономна, а корни ее характеристического уравнения равны $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ (i – мнимая единица, $\omega_1 \geq 0$, $\omega_2 \geq 0$). Изучаются случаи кратного резонанса, когда при некоторых значениях $\gamma_k^{(0)}$ параметров γ_k числа $2\omega_1$ и $2\omega_2$ одновременно являются целыми. Рассмотрены все возможные случаи таких резонансов. Для малых, но отличных от нуля значений ε предложен алгоритм построения областей неустойчивости в окрестности резонансных значений параметров $\gamma_k^{(0)}$. При помощи этого алгоритма исследована линейная задача об устойчивости стационарного вращения динамически симметричного спутника при наличии кратных резонансов. Орбита центра масс предполагается эллиптической, эксцентриситет орбиты мал, в невозмущенном движении ось симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты.

Многие задачи об устойчивости и нелинейных колебаниях механических систем приводят к необходимости исследования линейной, зависящей от малого параметра ε, непрерывной и 2π-периодической по времени t гамильтоновой системы с двумя или бóльшим числом степеней свободы. Пусть функция Гамильтона F этой системы аналитична относительно ε и при $\varepsilon = 0$ не зависит от t. Функция Гамильтона может зависеть еще от некоторых параметров γ_k ($k = 1, 2, ..., s$), причем эта зависимость аналитическая. Примем также, что число степеней свободы системы равно двум. Через ω_1 и ω_2 ($\omega_1 \geq \omega_2 \geq 0$) обозначим частоты малых колебаний системы при $\varepsilon = 0$. Они являются функциями параметров γ_k ($k = 1, 2, ..., s$).

Задача об устойчивости системы при малых, но отличных от нуля значениях параметра ε (задача о параметрическом резонансе) исследована весьма подробно [1]. Получены формулы для нахождения границ областей неустойчивости в первом (а во многих случаях и во втором) приближении. В пространстве параметров ε, γ_k ($k = 1, 2, ..., s$) эти области могут исходить при $\varepsilon = 0$ только из тех точек $\gamma_k = \gamma_k^{(0)}$, в которых реализуются резонансы первого или второго порядка, т.е. когда выполняется соотношение

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = n$$

где k_1, k_2, n – целые числа, причем $|k_1| + |k_2| = 1$ или 2. Исследовались, как правило, однократные резонансы (когда при $\gamma_k = \gamma_k^{(0)}$ выполняется только одно из резонансных соотношений).

В данной работе исследуется кратный параметрический резонанс. Он возможен только тогда, когда при $\gamma_k = \gamma_k^{(0)}$ одновременно выполняются два резонансных соотношения

$$2\omega_1 = n_1, \quad 2\omega_2 = n_2$$

где n_1, n_2 – целые неотрицательные числа. Предложен конструктивный алгоритм получения границ областей устойчивости и неустойчивости для всех возможных случаев кратного резонанса. Некоторые случаи кратных резонансов рассматривались ранее [2, 3].

1. О методе исследования. Уравнения границ областей устойчивости и неустойчивости, примыкающих при $\varepsilon = 0$ к точке $\gamma_k = \gamma_k^{(0)}$, представим в виде рядов

$$\gamma_k = \gamma_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \gamma_k^{(m)}, \quad k = 1, 2, \ldots, s \tag{1.1}$$

При решении конкретных задач вместо рядов (1.1) следует рассматривать многочлены конечной степени относительно ε.

Подставим разложение (1.1) в исходный гамильтониан F и разложим его в ряд по степеням ε. Первый член этого ряда $F_0 = F_0(q_1, q_2, p_1, p_2)$ равен функции F, вычисленной при $\varepsilon = 0$, $\gamma_k = \gamma_k^{(0)}$. Матрицу системы уравнений движения с невозмущенным гамильтонианом F_0 будем обозначать через $\mathbf{A}_0$.

Затем сделаем каноническое преобразование $q_1, q_2, p_1, p_2 \to x_1, x_2, X_1, X_2$, задаваемое постоянной вещественной матрицей и приводящее невозмущенный квадратичный гамильтониан F_0 к его вещественной нормальной форме H_0. В новых переменных гамильтониан задачи запишется в виде следующего ряда:

$$H = H_0(x_1, x_2, X_1, X_2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_m(x_1, x_2, X_1, X_2, t; \gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_1^{(m)}, \ldots, \gamma_s^{(1)}, \ldots, \gamma_s^{(m)}) \tag{1.2}$$

где $H_m (m \geq 1)$ – квадратичные формы относительно канонически сопряженных переменных x_1, x_2, X_1, X_2, коэффициенты которых 2π-периодичны по t.

Список всех возможных нормальных форм H_0 для гамильтониана F_0 можно найти в статье [4] (см. также дополнение 6 в книге [5]). Известны также конструктивные алгоритмы приведения функции F_0 к ее нормальной форме H_0 [6–8].

После приведения гамильтониана к виду (1.2) сделаем близкое к тождественному, τ-периодическое по t каноническое преобразование $x_1, x_2, X_1, X_2 \to y_1, y_2. Y_1, Y_2$ ($\tau = 2\pi$ или 4π в зависимости от конкретного случая кратного резонанса; см. ниже), подобрав его так, чтобы в новом гамильтониане

$$K = H_0(y_1, y_2, Y_1, Y_2) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} K_m(y_1, y_2, Y_1, Y_2, t; \gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_1^{(m)}, \ldots, \gamma_s^{(1)}, \ldots, \gamma_s^{(m)}) \tag{1.3}$$

время было исключено до членов некоторой конечной степени n по ε (n может быть достаточно большим). Если затем в разложении (1.3) пренебречь членами более высокой степени, чем n, то придем к приближенной линейной автономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. Ее характеристическое уравнение является биквадратным и записывается в виде

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0 \tag{1.4}$$

где a и b – многочлены относительно ε, коэффициенты которых зависят от искомых коэффициентов $\gamma_k^{(1)}, \ldots, \gamma_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \ldots, s$) разложений (1.1).

Достаточным условием устойчивости является выполнение неравенств

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0 \tag{1.5}$$

На границах областей устойчивости и неустойчивости выполняются соотношения

$$a \geq 0, \quad b = 0 \quad \text{или} \quad a \geq 0, \quad d = 0 \tag{1.6}$$

Приравняв нулю коэффициенты при ε, ε^2, ..., ε^n в левых частях этих соотношений, получим систему уравнений для коэффициентов $\gamma_k^{(1)}$, ..., $\gamma_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, ..., s$) разложений (1.1).

В некоторых резонансных случаях биквадратное уравнение (1.4) распадается на два квадратных и его анализ еще проще (см. ниже, разд. 3.2, 3.4 и 5).

Для построения замены переменных $x_1, x_2, X_1, X_2 \to y_1, y_2. Y_1, Y_2$ и преобразованного гамильтониана (1.3) будем использовать модификацию метода Депри – Хори, предложенную в статье [9]. Используемую в методе Депри – Хори производящую функцию W преобразования Ли запишем в виде ряда

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} W_{m+1}(y_1, y_2, Y_1, Y_2, t)$$

Для вычисления преобразованного гамильтониана имеем следующие рекуррентные соотношения [6, 9]:

$$\begin{aligned} K_m &= H_m + \sum_{j=1}^{m-1} (C_{m-1}^{j-1} L_j H_{m-j} - C_{m-1}^{j} K_{j,\, m-j}) + L_m H_0 - \frac{\partial W_m}{\partial t} \\ K_{j,\, i} &= L_j K_i - \sum_{s=1}^{j-1} C_{j-1}^{s-1} L_s K_{j-s,\, i}, \quad C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Через $L_i f$ здесь обозначена скобка Пуассона функций f и W_i:

$$L_i f = \sum_{l=1}^{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y_l} \frac{\partial W_i}{\partial Y_l} - \frac{\partial f}{\partial Y_l} \frac{\partial W_i}{\partial y_l} \right)$$

В следующих разделах статьи описанный алгоритм получения границ областей устойчивости и неустойчивости рассматривается более детально применительно к каждому из возможных кратных резонансов. Следует отметить, что в конкретных задачах алгоритм может оказаться довольно громоздким, поэтому его реализация должна, как правило, осуществляться при помощи компьютерных систем аналитических вычислений.

2. Резонанс $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Сначала рассмотрим случай, когда при $\gamma_k = \gamma_k^{(0)}$ обе частоты малых колебаний равны нулю. В приложениях этот случай встречается довольно редко. Но, как будет видно из дальнейшего, с вычислительной точки зрения к нему сводятся многие другие частные случаи кратного резонанса.

В зависимости от значения ранга r матрицы $\mathbf{A}_0$ уравнений движения невозмущенной системы при $\omega_1 = \omega_2 = 0$ следует различать четыре не сводящихся один к другому случая ($r = 3$, 2, 1 или 0). Рассмотрим их последовательно.

2.1. Случай $r = 3$. В этом случае функция H_0 в преобразованном гамильтониане (1.3) имеет вид [7]

$$H_0 = \frac{1}{2}\delta Y_1^2 - y_1 y_2 \ (\delta = \pm 1) \tag{2.1}$$

Согласно соотношениям (1.7), нахождение первого приближения по ε приводит к рассмотрению следующего линейного уравнения в частных производных:

$$K_1 = H_1(y_1, y_2, Y_1, Y_2, t; \gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_s^{(1)}) + (H_0, W_1) - \frac{\partial W_1}{\partial t} \tag{2.2}$$

Входящую в это уравнение квадратичную форму H_1 запишем в виде

$$H_1 = \sum h^{(1)}_{m_1, m_2, n_1, n_2} y_1^{m_1} y_2^{m_2} Y_1^{n_1} Y_2^{n_2}$$

где суммирование проводится по целым неотрицательным числам m_1, m_2, n_1, n_2, сумма которых равна двум. В виде аналогичных сумм представим также и искомые квадратичные формы K_1 и W_1.

Требуется подобрать коэффициенты $w^{(1)}_{m_1, m_2, n_1, n_2}$ формы W_1 так, чтобы они были 2π – периодическими по t, а коэффициенты $k^{(1)}_{m_1, m_2, n_1, n_2}$ формы K_1 – постоянными.

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях y_1, y_2, Y_1, Y_2 в левой и правой частях равенства (2.2), приводит к следующим десяти соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{dw^{(1)}_{0002}}{dt} = h^{(1)}_{0002} - k^{(1)}_{0002}, \quad \frac{dw^{(1)}_{1001}}{dt} = h^{(1)}_{1001} - 2w^{(1)}_{0002} - k^{(1)}_{1001}\\
&\frac{dw^{(1)}_{0011}}{dt} = h^{(1)}_{0011} - \delta w^{(1)}_{1001} - k^{(1)}_{0011}, \quad \frac{dw^{(1)}_{0101}}{dt} = h^{(1)}_{0101} - w^{(1)}_{0011} - k^{(1)}_{0101}\\
&\frac{dw^{(1)}_{2000}}{dt} = h^{(1)}_{2000} - w^{(1)}_{1001} - k^{(1)}_{2000}, \quad \frac{dw^{(1)}_{1010}}{dt} = h^{(1)}_{1010} - 2\delta w^{(1)}_{2000} - w^{(1)}_{0011} - k^{(1)}_{1010}\\
&\frac{dw^{(1)}_{1100}}{dt} = h^{(1)}_{1100} - w^{(1)}_{1010} - w^{(1)}_{0101} - k^{(1)}_{1100}, \quad \frac{dw^{(1)}_{0020}}{dt} = h^{(1)}_{0020} - \delta w^{(1)}_{1010} - k^{(1)}_{0020}\\
&\frac{dw^{(1)}_{0110}}{dt} = h^{(1)}_{0110} - \delta w^{(1)}_{1100} - 2w^{(1)}_{0020} - k^{(1)}_{0110}, \quad \frac{dw^{(1)}_{0200}}{dt} = h^{(1)}_{0200} - w^{(1)}_{0110} - k^{(1)}_{0200}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассматривая эти соотношения последовательно, одно за другим, можно найти удовлетворяющие сформулированным выше требованиям функции $w^{(1)}_{m_1, m_2, n_1, n_2}(t)$ и коэффициенты $k^{(1)}_{m_1, m_2, n_1, n_2}$. Получаем

$$\begin{aligned}
&k^{(1)}_{0002} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{(1)}_{0002}dt, \quad w^{(1)}_{0002} = \int (h^{(1)}_{0002} - k^{(1)}_{0002})dt\\
&k^{(1)}_{1001} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (h^{(1)}_{1001} - 2w^{(1)}_{0002})dt, \quad w^{(1)}_{1001} = \int (h^{(1)}_{1001} - 2w^{(1)}_{0002} - k^{(1)}_{1001})dt\\
&k^{(1)}_{0011} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (h^{(1)}_{0011} - \delta w^{(1)}_{1001})dt, \quad w^{(1)}_{0011} = \int (h^{(1)}_{0011} - \delta w^{(1)}_{1001} - k^{(1)}_{0011})dt
\end{aligned} \tag{2.4}$$

и так далее.

Совершенно аналогично из соотношений (1.7), (2.1) можно получить второе и более высокие приближения. В пределе получим преобразованный гамильтониан (1.3) в виде

$$K = H_0 + \sum k_{m_1, m_2, n_1, n_2} y_1^{m_1} y_2^{m_2} Y_1^{n_1} Y_2^{n_2} \tag{2.5}$$

Функция H_0 определена равенством (2.1), суммирование проводится по целым неотрицательным числам m_1, m_2, n_1, n_2, сумма которых равна 2, а постоянные коэффициенты k_{m_1, m_2, n_1, n_2} вычисляются по формуле

$$k_{m_1, m_2, n_1, n_2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} k^{(m)}_{m_1, m_2, n_1, n_2}(\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_1^{(m)}, \ldots, \gamma_s^{(1)}, \ldots, \gamma_s^{(m)}) \tag{2.6}$$

где $k^{(m)}_{m_1, m_2, n_1, n_2}$ – коэффициент при $y_1^{m_1} y_2^{m_2} Y_1^{n_1} Y_2^{n_2}$ в квадратичной форме K_m.

Ограничиваясь в разложениях (2.5) членами, степень которых по ε не превосходит n, можно из условий (1.6) найти соотношения, которым должны удовлетворять величины $\gamma_k^{(1)}$, ..., $\gamma_k^{(n)}$ (k = 1, 2, ..., s), определяющие границы областей устойчивости и неустойчивости (1.1).

2.2. Случай $r = 2$. С технической стороны, исследование этого случая аналогично проведенному выше исследованию случая $r = 3$, поэтому выпишем только уравнения, определяющие первое приближение. При $r = 2$ имеем [7]

$$H_0 = \frac{1}{2}\delta_1 Y_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2 Y_2^2; \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1 \tag{2.7}$$

и из уравнения (2.2) получаем десять таких соотношений:

$$\begin{gathered}
\frac{dw^{(1)}_{2000}}{dt} = h^{(1)}_{2000} - k^{(1)}_{2000}, \quad \frac{dw^{(1)}_{1100}}{dt} = h^{(1)}_{1100} - k^{(1)}_{1100} \\
\frac{dw^{(1)}_{1010}}{dt} = h^{(1)}_{1010} - 2\delta_1 w^{(1)}_{2000} - k^{(1)}_{1010}, \quad \frac{dw^{(1)}_{1001}}{dt} = h^{(1)}_{1001} - \delta_2 w^{(1)}_{1100} - k^{(1)}_{1001} \\
\frac{dw^{(1)}_{0200}}{dt} = h^{(1)}_{0200} - k^{(1)}_{0200}, \quad \frac{dw^{(1)}_{0110}}{dt} = h^{(1)}_{0110} - \delta_1 w^{(1)}_{1100} - k^{(1)}_{0110} \\
\frac{dw^{(1)}_{0101}}{dt} = h^{(1)}_{0101} - 2\delta_2 w^{(1)}_{0200} - k^{(1)}_{0101}, \quad \frac{dw^{(1)}_{0020}}{dt} = h^{(1)}_{0020} - \delta_1 w^{(1)}_{1010} - k^{(1)}_{0020} \\
\frac{dw^{(1)}_{0011}}{dt} = h^{(1)}_{0011} - \delta_1 w^{(1)}_{1001} - \delta_2 w^{(1)}_{0110} - k^{(1)}_{0011}, \quad \frac{dw^{(1)}_{0002}}{dt} = h^{(1)}_{0002} - \delta_2 w^{(1)}_{0101} - k^{(1)}_{0002}
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Эта система уравнений рассматривается аналогично системе (2.3). Получаем следующие выражения для коэффициентов квадратичных форм K_1 и W_1:

$$\begin{gathered}
k^{(1)}_{2000} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{(1)}_{2000}(dt), \quad w^{(1)}_{2000} = \int (h^{(1)}_{2000} - k^{(1)}_{2000})dt \\
k^{(1)}_{1100} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{(1)}_{1100}dt, \quad w^{(1)}_{1100} = \int (h^{(1)}_{1100} - k^{(1)}_{1100})dt \\
k^{(1)}_{1010} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (h^{(1)}_{1010} - 2\delta_1 w^{(1)}_{2000})dt, \quad w^{(1)}_{1010} = \int (h^{(1)}_{1010} - 2\delta_1 w^{(1)}_{2000} - k^{(1)}_{1010})dt
\end{gathered} \tag{2.9}$$

и так далее.

2.3. Случай $r = 1$. Если $r = 1$, то функция H_0 в (1.3) задается равенством [7]

$$H_0 = \frac{1}{2}\delta_2 Y_2^2; \quad \delta_2 = \pm 1 \tag{2.10}$$

Исследование этого случая почти не отличается от случая $r = 2$. Надо только в уравнениях первого приближения (и в уравнениях последующих приближений, получаемых из соотношения (1.7)) положить $\delta_1 = 0$, а в преобразованном гамильтониане (2.5) функцию (2.7) заменить на функцию (2.10).

2.4. Случай $r = 0$. В этом случае $H_0 = 0$. Уравнение (2.2) первого приближения имеет вид

$$K_1 = H_1(y_1, y_2, Y_1, Y_2, t; \mu_1^{(1)}, \ldots, \mu_s^{(1)}) - \frac{\partial W_1}{\partial t} \tag{2.11}$$

и его решение находится очень просто. Квадратичную форму K_1 с постоянными коэффициентами и 2π-периодическую квадратичную форму W_1 можно взять такими:

$$K_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1 dt, \quad W_1 = \int (H_1 - K_1)dt \tag{2.12}$$

Аналогично можно построить решения уравнений второго и более высоких приближений.

3. Резонанс $2\omega_1 = n_1$, $\omega_2 = 0$. Рассмотрим кратные резонансы, когда частота ω_2 малых колебаний невозмущенной системы равна нулю, а другая частота ω_1 отлична от нуля, но $2\omega_1 = n_1$, где n_1 – натуральное число. Здесь следует различать четыре случая в зависимости от ранга r матрицы $\mathbf{A}_0$ уравнений движения с невозмущенным гамильтонианом F_0 (он может быть равен трем или двум) и от четности или нечетности числа n_1.

3.1. Случай $r = 3$, n_1 – четное число. В функции Гамильтона (1.2) имеем

$$H_0 = \frac{1}{2}\sigma_1(x_1^2 + X_1^2) + \frac{1}{2}\delta_2 X_2^2; \quad \sigma_1 = \delta_1\omega_1, \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1 \tag{3.1}$$

Прежде чем преобразовывать методом Депри – Хори функцию Гамильтона (1.2) к виду (1.3), сделаем каноническое унивалентное преобразование $x_1, x_2, X_1, X_2 \to x_1', x_2', X_1', X_2'$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(\sigma_1 t)x_1' + \sin(\sigma_1 t)X_1', \quad x_2 = x_2' \\ X_1 &= -\sin(\sigma_1 t)x_1' + \cos(\sigma_1 t)X_1', \quad X_2 = X_2' \end{aligned} \tag{3.2}$$

Эта замена переменных исключает из гамильтониана (3.1) слагаемое $\frac{1}{2}\sigma_1(x_1^2 + X_1^2)$. Если опустить штрихи в обозначениях новых переменных, то новая функция Гамильтона запишется в форме (1.2), где $H_0 = \frac{1}{2}\delta_2 X_2^2$, а функции H_m по-прежнему 2π-периодичны по t. И, таким образом, изучаемый случай кратного резонанса свелся к одному из случаев двух нулевых частот, рассмотренному в разд. 2.3.

3.2. Случай $r = 3$, n_1 – нечетное число. Как и в предыдущем случае, функция H_0 задается равенством (3.1) и после замены переменных (3.2) гамильтониан запишется в виде (1.2), где $H_0 = \frac{1}{2}\delta_2 X_2^2$. Таким образом, как и в предыдущем случае, приходим к рассмотренному в разд. 2.3 случаю резонанса при двух нулевых частотах. Но в отличие от предыдущего случая, где n_1 – четное число, здесь при нечетном n_1 функции H_m после замены (3.2) будут, вообще говоря, иметь по t период 4π, а не 2π. При нахождении постоянных коэффициентов квадратичных форм K_m по формулам вида (2.8) (в которых, в соответствии с разд. 2.3, следует положить $\delta_1 = 0$) средние значения соответствующих функций по времени должны вычисляться на периоде 4π.

Преобразованный гамильтониан (2.5) будет содержать не все десять, а только шесть одночленов:

$$K = k_{2000}y_1^2 + k_{1010}y_1Y_1 + k_{0020}Y_1^2 + k_{0200}y_2^2 + k_{0101}y_2Y_2 + \frac{1}{2}(\delta_2 + 2k_{0002}Y_2^2) \tag{3.3}$$

В системе с таким гамильтонианом уравнения для переменных y_1, Y_1 и y_2, Y_2 разделяются. Положим

$$d_1 = k_{1010}^2 - 4k_{2000}k_{0020}, \quad d_2 = k_{0101}^2 - 2k_{0200}(\delta_2 + 2k_{0002}) \tag{3.4}$$

При выполнении хотя бы одного из неравенств $d_1 > 0$ или $d_2 > 0$ имеет место неустойчивость. На границах областей устойчивости и неустойчивости хотя бы одна из величин d_1 или d_2 обращается в нуль. Приравняв нулю коэффициенты разложений функций (3.4) в ряды по степеням ε, получим соотношения, определяющие коэффициенты разложений (1.1).

3.3. Случай $r = 2$, n_1 – четное число. Функция H_0 в выражении (1.2) имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{2}\sigma_1(x_1^2 + X_1^2); \quad \sigma_1 = \delta_1\omega_1, \quad \delta_1 = \pm 1 \tag{3.5}$$

После замены переменных (3.2) придем к гамильтониану (1.2), в котором $H_0 = 0$. И таким образом, изучаемый случай кратного резонанса сводится к одному из случаев резонанса $\omega_1 = \omega_2 = 0$, рассмотренному в разд. 2.4.

3.4. Случай $r = 2$, n_1 – нечетное число. Функция H_0, как и в предыдущем случае, задается равенством (3.5) и после замены (3.2) опять приходим к случаю $H_0 = 0$ из разд. 2.4. Функции H_m в равенстве (1.2) будут иметь, вообще говоря, период, равный 4π. При нахождении квадратичных форм K_m по формулам вида (2.12) средние значения вычисляются на периоде 4π.

Преобразованный гамильтониан (2.5) будет содержать только шесть одночленов и задается равенством (3.3), в котором величину δ_2 следует положить равной нулю.

Как и в случае (3.2), границы областей устойчивости и неустойчивости определяются равенствами $d_1 = 0$ или $d_2 = 0$, где d_1, d_2 – функции (3.4), в которых $\delta_2 = 0$.

4. Резонанс $2\omega_1 = 2\omega_2 = n$. Теперь рассмотрим возможные кратные резонансы, когда ни одна из частот малых колебаний невозмущенной системы не равна нулю. В этом разделе частоты предполагаются равными: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, причем $2\omega = n$, где n –натуральное число. В зависимости от ранга r матрицы $(\mathbf{A}_0 - i\omega\mathbf{E})$(он может равняться трем или двум) здесь возможны два несводящихся один к другому случая.

4.1. Случай $r = 3$. В этом случае для функции H_0 в (1.2) имеем такое выражение

$$H_0 = \frac{1}{2}\delta(X_1^2 + X_2^2) + \omega(x_1X_2 - x_2X_1); \quad \delta = \pm 1 \tag{4.1}$$

Параметрический резонанс в системе с гамильтонианом (4.1) исследовался ранее [3]. Если ввести новые канонически сопряженные переменные x'_j, X'_j ($j = 1, 2$) при помощи унивалентного канонического преобразования

$$x_1 = \cos(\omega t)x_1' - \sin(\omega t)x_2', \quad x_2 = \sin(\omega t)x_1' + \cos(\omega t)x_2'$$
$$X_1 = \cos(\omega t)X_1' - \sin(\omega t)X_2', \quad X_2 = \sin(\omega t)X_1' + \cos(\omega t)X_2' \tag{4.2}$$

то в гамильтониане (4.1) будет уничтожено слагаемое $\omega(x_1X_2 - x_2X_1)$. В новых переменных функция Гамильтона (1.2) остается 2π-периодической по t, а ее невозмущенная часть имеет вид (штрихи в обозначениях новых переменных опускаем)

$$H_0 = \frac{1}{2}\delta(X_1^2 + X_2^2); \quad \delta = \pm 1 \tag{4.3}$$

И, таким образом, приходим к рассмотренному в разд. 3.3 одному из случаев двух нулевых частот. Надо только при проведении вычислений по формулам вида (2.8),(2.9) положить $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.

4.2. Случай $r = 2$. Функция H_0 в выражении (1.2) представляет собой сумму гамильтонианов двух гармонических осцилляторов с одинаковыми частотами ω:

$$H_0 = \frac{1}{2}\sigma_1(x_1^2 + X_1^2) + \frac{1}{2}\sigma_2(x_2^2 + X_2^2); \quad \sigma_1 = \delta_1\omega, \quad \sigma_2 = \delta_2\omega, \quad \delta_1 = \pm 1, \quad \delta_2 = \pm 1 \tag{4.4}$$

Если сделать унивалентную каноническую замену переменных $x_j, X_j \to x_j', X_j'$ $(j = 1, 2)$ по формулам

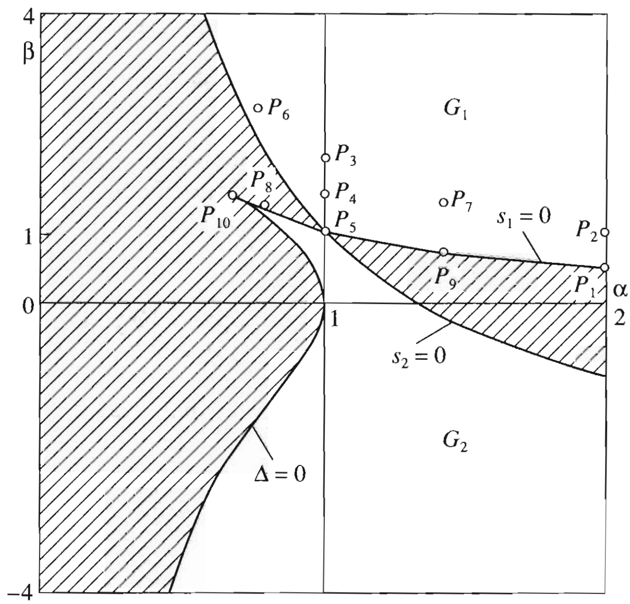
$$x_j = \cos(\sigma_j t)x_j' + \sin(\sigma_j t)X_j', \quad X_j = -\sin(\sigma_j t)x_j' + \cos(\sigma_j t)X_j'; \quad j = 1, 2 \tag{4.5}$$

то придем к 2π-периодическому по t гамильтониану (1.2), в котором $H_0 = 0$, т.е. исследуемый резонансный случай сводится к рассмотренному в разд. 2.4 случаю двух нулевых частот.

5. Резонанс $2\omega_1 = n_1$, $2\omega_2 = n_2$ $(n_1 \neq 0,\ n_2 \neq 0)$. Осталось рассмотреть кратные резонансы, когда частоты невозмущенной системы различны и отличны от нуля. Такие резонансы изучались ранее [2]. Нормальная форма невозмущенного гамильтониана F_0 задается равенством (4.4), в котором $\sigma_1 = \delta_1\omega_1$, $\sigma_2 = \delta_2\omega_2$, $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$. После замены переменных (4.5) приходим к гамильтониану (1.2), в котором $H_0 = 0$. И далее исследование проводится в соответствии с разд. 2.4.

При вычислениях полезно различать два случая. Когда оба числа n_1 и n_2 четны или оба они нечетны, преобразованный гамильтониан K (задаваемый равенством (2.5), в котором $H_0 = 0$), будет содержать, вообще говоря, все десять одночленов и границы областей устойчивости и неустойчивости находятся из соотношений (1.6). Если же одно из чисел n_1 или n_2 четно, а другое нечетно, то гамильтониан K содержит не все десять, а только шесть одночленов и задается равенством вида (3.3), в котором $\delta_2 = 0$. Границы областей устойчивости и неустойчивости определяются из равенств $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, где d_1, d_2 – величины (3.4), в которых $\delta_2 = 0$.

6. Об устойчивости стационарного вращения динамически симметричного спутника на эллиптической орбите. Пусть центр масс спутника движется по эллиптической орбите эксцентриситета e в центральном ньютоновском гравитационном поле. Спутник – твердое тело, центральный эллипсоид которого является эллипсоидом вращения. Экваториальный и полярный моменты инерции спутника обозначим через A и C. Известно [10], что задача о движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов допускает частное решение, для которого ось динамической симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты, а сам спутник вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью r_0.



Фиг. 1

Функция Гамильтона F, соответствующая линеаризованным уравнениям возмущенного движения оси симметрии в окрестности нормали к плоскости орбиты, имеет вид [11]

$$F = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^2\beta^2(1-e^2)^3}{(1+e\cos\nu)^2} - \alpha\beta(1-e^2)^{3/2} + 3(\alpha-1)(1+e\cos\nu)\right]q_1^2 +$$

$$+\left[\frac{\alpha\beta(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\nu)^2} - 1\right]q_1p_2 + \frac{1}{2}\alpha\beta(1-e^2)^{3/2}q_2^2 + q_2p_1 + \frac{1}{2(1+e\cos\nu)^2}(p_1^2+p_2^2) \tag{6.1}$$

Здесь $\alpha = C/A$, $\beta = r_0/\omega_0$ $(0 < \alpha \le 2, -\infty < \beta < \infty)$, ω_0 – среднее движение центра масс по орбите, за независимую переменную принята истинная аномалия ν.

Если ввести обозначения

$$s_1 = \alpha\beta - 1, \quad s_2 = \alpha\beta + 3\alpha - 4, \quad s_3 = \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha - 1 \tag{6.2}$$

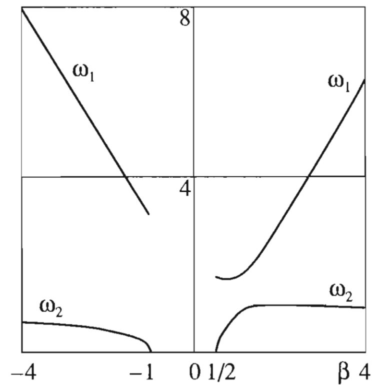
то на круговой орбите ($e = 0$) области G_1 и G_2 (фиг. 1) устойчивости в первом приближении стационарного вращения спутника можно задать неравенствами [12]

$$\dot{s}_1 > 0, \quad s_2 > 0 \quad \text{и} \quad s_1 < 0, \quad s_2 < 0, \quad \Delta > 0 \tag{6.3}$$

соответственно. Здесь

$$\Delta = s_3^2 - 4s_1s_2 = \alpha^4\beta^4 - 4\alpha^3\beta^3 + 6\alpha^3\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 - 24\alpha^2\beta + 24\alpha\beta + 9\alpha^2 + 6\alpha - 15 \tag{6.4}$$

Области неустойчивости на фиг. 1 заштрихованы. Для значений параметров α и β, принадлежащих областям G_1 и G_2 или их границам, частоты ω_1 и ω_2 $(\omega_1 \ge \omega_2 \ge 0)$ ма-



Фиг. 2

лых колебаний оси симметрии в окрестности нормали к плоскости орбиты являются корнями уравнения

$$\omega^4 - s_3\dot{\omega}^2 + s_1 s_2 = 0 \tag{6.5}$$

В областях G_1 и G_2 существует [11] счетное множество кривых, на которых реализуются резонансы первого и второго порядков. При малых значениях эксцентриситета e возможны многие кратные параметрические резонансы. Ниже исследуется устойчивость стационарного вращения спутника только для некоторых из этих резонансов. При малых e найдены области устойчивости и неустойчивости в окрестности десяти точек $P_i(\alpha, \beta)$ (см. фиг. 1). Исследуемые случаи, с одной стороны, представляют самостоятельный интерес, а с другой – они иллюстрируют большинство из рассмотренных в разд. 2–5 возможных кратных параметрических резонансов в 2π-периодической по независимой переменной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. Другие, не рассмотренные в данной статье примеры кратных резонансов в задаче об устойчивости движения динамически симметричного спутника на эллиптической орбите, изучены ранее [3, 13].

6.1. Спутник, геометрия масс которого соответствует пластинке ($2A = C$). В случае пластинки $\alpha = 2$ и гамильтониан (6.1) зависит от двух параметров β и e. Выясним возможность существования кратного параметрического резонанса на орбите малого эксцентриситета для значений параметра β, не принадлежащих интервалу $-1 < \beta < 1/2$ неустойчивости стационарного вращения спутника на круговой орбите (фиг. 1).

На фиг. 2 показана зависимость частот ω_1 и ω_2 от параметра β в случае круговой орбиты. При всех рассматриваемых значениях β справедливы неравенства $\omega_1 > 1.94596$, $0 \le \omega_2 < 1.25996$. Возможны только два случая кратного резонанса: $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0$ (когда $\beta = 1/2$, см. точку P_1 на фиг. 1) и $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$ (когда $\beta = 1$, см. точку P_2 на фиг. 1).

Р е з о н а н с $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0$. Положим в гамильтониане (6.1)

$$\beta = \frac{1}{2} + e\mu_1 + e^2\mu_2 + e^3\mu_3 + e^4\mu_4 + \ldots$$

и разложим его в ряд по степеням e. Невозмущенный гамильтониан F_0 имеет вид

$$F_0 = \frac{3}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + q_2 p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

Унивалентное каноническое преобразование

$$q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}X_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}X_2, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \quad p_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \quad p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}X_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}X_2$$

приводит функцию F_0 к ее вещественной нормальной форме H_0,

$$H_0 = x_1^2 + X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2$$

Далее по алгоритму разд.3.1 можно получить гамильтониан (2.5). С точностью до первых степеней e он будет таким:

$$K = \frac{1}{2}Y_2^2 + e\left(-\frac{3}{16}y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 - \frac{3}{16}Y_1^2 + \frac{\sqrt{6}}{8}Y_1Y_2 + \frac{7}{12}Y_2^2\right)\mu_1 \tag{6.6}$$

Коэффициенты a и b характеристического уравнения (1.4) приближенной системы с гамильтонианом (6.6) имеют вид

$$a = \frac{3}{2}e\mu_1 + O(e^2), \quad b = \frac{27}{128}e^3\mu_1^3 + O(e^4)$$

Отсюда, согласно соотношениям (1.6), следует, что на границах областей устойчивости и неустойчивости должно выполняться равенство $\mu_1 = 0$.

Положив $\mu_1 = 0$ и проведя вычисление гамильтониана (6.6) до членов четвертой степени e включительно, найдем следующие выражения для коэффициентов a, b и величины d, фигурирующей в последнем неравенстве (1.5):

$$a = \frac{3}{2}e^2\mu_2 + O(e^3), \quad b = b^{(6)}e^6 + b^{(7)}e^7 + b^{(8)}e^8 + O(e^9), \quad d = \frac{9}{4}e^4\mu_2^2 + O(e^4)$$

где

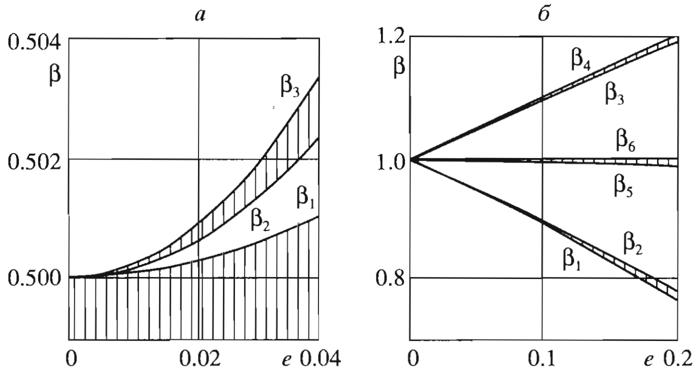
$$b^{(6)} = \frac{27}{128}\mu_2^3 - \frac{27}{32}\mu_2^2 + \frac{4185}{4096}\mu_2 - \frac{729}{2048}, \quad b^{(7)} = \left(\frac{81}{128}\mu_2^2 - \frac{27}{16}\mu_2 + \frac{4185}{4096}\right)\mu_3$$

$$b^{(8)} = \left(\frac{81}{128}\mu_2^2 - \frac{27}{16}\mu_2 + \frac{4185}{4096}\right)\mu_4 + \left(\frac{81}{128}\mu_2 - \frac{27}{32}\right)\mu_3^2 -$$

$$-\frac{873}{2048}\mu_2^4 - \frac{2637}{1024}\mu_2^3 + \frac{1030995}{131072}\mu_2^2 - \frac{256365}{65536}\mu_2 + \frac{167427}{8388608}$$

При $\mu_2 = 0$ и малых e величина b отрицательна, поэтому из соотношений (1.6) следует, что границы областей устойчивости и неустойчивости определяются из условий $a \geq 0$, $b = 0$. Приравняв нулю величину $b^{(6)}$, получим три отвечающих искомым границам положительных значения величины μ_2 : $1 \pm \sqrt{10}/8$, 2. При этих значениях μ_2 из уравнения $b^{(7)} = 0$ находим $\mu_3 = 0$. И теперь уравнение $b^{(8)} = 0$ при $\mu_3 = 0$ и найденных трех значениях μ_2 дает три значения μ_4, соответствующих границам областей устойчивости и неустойчивости. Таким образом, с погрешностью порядка e^5 получаем следующие три уравнения граничных кривых, исходящих в плоскости e, β из точки (0, 1/2):

$$\begin{aligned} \beta_i(e) &= \frac{1}{2} + \left[1 + (-1)^i\frac{\sqrt{10}}{8}\right]e^2 + \left[\frac{79567}{12288} + (-1)^i\frac{5891}{3072}\sqrt{10}\right]e^4, \quad i = 1, 2 \\ \beta_3(e) &= \frac{1}{2} + 2e^2 + \frac{129871}{6144}e^4 \end{aligned} \tag{6.7}$$



Фиг. 3

Кривые (6.7) показаны на фиг. 3, *а*. Области неустойчивости заштрихованы.

Резонанс $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1$. Положим

$$\beta = 1 + e\mu_1 + e^2\mu_2 + e^3\mu_3 + e^4\mu_4 + \dots \tag{6.8}$$

и разложим гамильтониан (6.1) в ряд по степеням e. Для невозмущенного гамильтониана F_0 имеем выражение

$$F_0 = \frac{5}{2}q_1^2 + q_1p_2 + q_2^2 + q_2p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

В переменных x_1, x_2, X_1, X_2, вводимых каноническим преобразованием

$$q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1, \quad q_2 = x_2, \quad p_1 = -x_2 + \sqrt{2}X_1, \quad p_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + X_2$$

функция F_0 принимает свою нормальную форму

$$H_0 = x_1^2 + X_1^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + X_2^2)$$

По алгоритму разд. 5 из гамильтониана (1.2) можно исключить его невозмущенную часть H_0 и получить преобразованный гамильтониан (1.3). Коэффициенты a и b характеристического уравнения (1.4) и величина d из (1.5) представимы в виде рядов по степеням e

$$a = \sum_{k=2}^{\infty} a^{(k)}e^k, \quad b = \sum_{k=4}^{\infty} b^{(k)}e^k, \quad d = \sum_{k=4}^{\infty} d^{(k)}e^k \tag{6.9}$$

где $a^{(k)}, b^{(k)}, d^{(k)}$ – функции от коэффициентов разложения (6.8), причем

$$a^{(2)} = \frac{1}{4}(5\mu_1^2 + 9), \quad b^{(4)} = \frac{1}{64}(4\mu_1^2 - 9)^2, \quad d^{(4)} = \frac{9}{16}\mu_1^2(\mu_1^2 + 18) \tag{6.10}$$

Так как при малых e коэффициент a положителен, согласно соотношениям (1.6), границы областей устойчивости и неустойчивости определяются равенствами $b = 0$ и $d = 0$.

Рассмотрим равенство $b = 0$. Из формул (6.10) видно, что коэффициент $b^{(4)}$ в разложении b в ряд обращается в нуль, если $\mu_1 = \pm 3/2$. Вычисления показывают, что при этом коэффициент $b^{(5)}$ также обращается в нуль, а коэффициенты $b^{(6)}$, $b^{(7)}$ и $b^{(8)}$ будут такими:

$$b^{(6)} = \frac{9}{102400}(160\mu_2 + 57)(160\mu_2 - 3)$$

$$b^{(7)} = \frac{9}{320}(160\mu_2 + 27)\mu_3 \pm \left(\frac{3}{2}\mu_2^3 + \frac{3213}{320}\mu_2^2 - \frac{88209}{25600}\mu_2 - \frac{3420657}{4096000}\right)$$

$$b^{(8)} = \frac{9}{320}(160\mu_2 + 27)\mu_4 + \frac{9}{4}\mu_3^2 \pm \left(\frac{9}{2}\mu_2^2 + \frac{3213}{160}\mu_2 - \frac{88209}{25600}\right)\mu_3 +$$

$$+ \frac{1}{4}\mu_2^4 + \frac{2007}{160}\mu_2^3 - \frac{227097}{12800}\mu_2^2 + \frac{21477969}{1024000}\mu_2 + \frac{5795896401}{655360000}$$

Приравняв величины $b^{(6)}$, $b^{(7)}$, $b^{(8)}$ нулю, получим систему уравнений для нахождения величин μ_2, μ_3, μ_4, определяющих границы областей устойчивости и неустойчивости (на которых $b = 0$) с точностью до членов четвертой степени включительно относительно e. Вычисления показали, что существуют четыре границы $\beta = \beta_i(e)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), причем $\beta_3(e) = \beta_1(-e)$, $\beta_4(e) = \beta_2(-e)$, а

$$\beta_1 = 1 - \frac{3}{2}e - \frac{27}{160}e^2 - \frac{48511}{25600}e^3 - \frac{1876167}{128000}e^4, \quad \beta_2 = 1 - \frac{3}{2}e + \frac{3}{160}e^2 - \frac{27191}{25600}e^3 - \frac{1291167}{128000}e^4$$

Теперь рассмотрим равенство $d = 0$. Согласно последнему из равенств (6.10), коэффициент $d^{(4)}$ в разложении величины d в ряд обращается в нуль, только если $\mu_1 = 0$. Вычисления показывают, что при $\mu_1 = 0$ имеем $d^{(5)} = 0$, а коэффициенты $d^{(6)}$, $d^{(7)}$, $d^{(8)}$ задаются равенствами

$$d^{(6)} = \frac{81}{12800}(40\mu_2 + 17)(40\mu_2 - 3), \quad d^{(7)} = \frac{81}{160}(40\mu_2 + 7)\mu_3$$

$$d^{(8)} = \frac{81}{160}(40\mu_2 + 7)\mu_4 + \frac{81}{8}\mu_3^2 + \frac{9}{16}\mu_2^4 + \frac{5049}{320}\mu_2^3 + \frac{761121}{25600}\mu_2^2 - \frac{4033953}{512000}\mu_2 - \frac{162415233}{20480000}$$

Система уравнений $d^{(6)} = 0$, $d^{(7)} = 0$, $d^{(8)} = 0$ имеет два решения, которые отвечают двум границам областей устойчивости и неустойчивости (на которых $d = 0$). С точностью до членов четвертой степени e включительно эти границы задаются уравнениями

$$\beta_5 = 1 - \frac{17}{40}e^2 - \frac{46033}{576000}e^4, \quad \beta_6 = 1 + \frac{3}{40}e^2 + \frac{13191}{8000}e^4$$

На фиг. 3, *б* в плоскости e, β показаны шесть полученных кривых, разделяющих области устойчивости и неустойчивости в окрестности точки (0, 1) рассматриваемого кратного резонанса. Области неустойчивости отмечены штриховкой.

6.2. Спутник, эллипсоид инерции которого близок к сфере ($A \simeq C$). Если центральный эллипсоид инерции спутника – сфера, то $\alpha = 1$. При $\alpha = 1$ из уравнения частот (6.5) следует, что $\omega_1 = |\beta - 1|$, $\omega_2 = 1$, если $\beta \leq 0$ или $\beta \geq 2$ и $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = |\beta - 1|$, если $0 \leq \beta \leq 2$. На орбите малого эксцентриситета кратный параметрический резонанс возможен в окрестности точек оси $\alpha = 1$, в которых величина 2β – целое число. Рассмотрим только три случая кратного резонанса, иллюстрирующие алгоритмы, описанные в разд. 4.2, 3.4 и 3.3.

Резонанс $\omega_1 = \omega_2 = 1$. При малых значениях e рассмотрим окрестность точки $P_3(1, 2)$ (фиг. 1). Для нахождения поверхностей, разделяющих в пространстве α, β, e области устойчивости и неустойчивости, положим

$$\alpha = 1 + e\nu_1, \quad \beta = 2 + e\mu_1 + e^2\mu_2 + e^3\mu_3 + e^4\mu_4 + \ldots \; (\nu_1 \neq 0) \tag{6.11}$$

Подставим величины (6.11) в гамильтониан (6.1), разложим в ряд по степеням e и сделаем унивалентную каноническую замену переменных

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2, \quad p_1 = -x_2 + X_1, \quad p_2 = -x_1 + X_2$$

приводящую невозмущенный гамильтониан

$$F_0 = q_1^2 + q_1p_2 + q_2^2 + q_2p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

к нормальной форме

$$H_0 = \frac{1}{2}(x_1^2 + X_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + X_2^2)$$

Далее вычисления проводятся по алгоритму разд. 4.2. Для коэффициента a характеристического уравнения (1.4) получаем выражение

$$a = \frac{1}{16}[(4\mu_1 + 11\nu_1)^2 + 27\nu_1^2]e^2 + O(e^3)$$

Так как $a > 0$, то, в соответствии с условиями (1.6), границы областей устойчивости и неустойчивости находятся из соотношений $b = 0$ или $d = 0$.

Вычисления показывают, что равенство $b = 0$ определяет две совокупности выражений коэффициентов разложения (6.11) величины β в ряд через величину ν_1:

$$\mu_1 = -2\nu_1, \quad \mu_2 = 2\nu_1^2, \quad \mu_3 = -2\nu_1^3 - 3\nu_1, \quad \mu_4 = 2\nu_1^4$$

и

$$\mu_1 = -2\nu_1, \quad \mu_2 = 2\nu_1^2, \quad \mu_3 = -2\nu_1^3 - 9\nu_1, \quad \mu_4 = 2\nu_1^2(\nu_1^2 + 12)$$

Следовательно, равенство $b = 0$ определяет две поверхности, разделяющие области устойчивости и неустойчивости в пространстве α, β, e. В параметрической форме (роль параметров играют величины ν_1 и e) уравнения граничных поверхностей задаются равенствами (6.11), в которых величины μ_1, μ_2, ... выражены через ν_1. Исключив из этих уравнений параметр ν_1, можно найти уравнения граничных поверхностей в явном виде $\beta = \beta_i(\alpha, e)$ $(i = 1, 2)$. С точностью до членов четвертой степени включительно относительно e и $(\alpha - 1)$ получаем

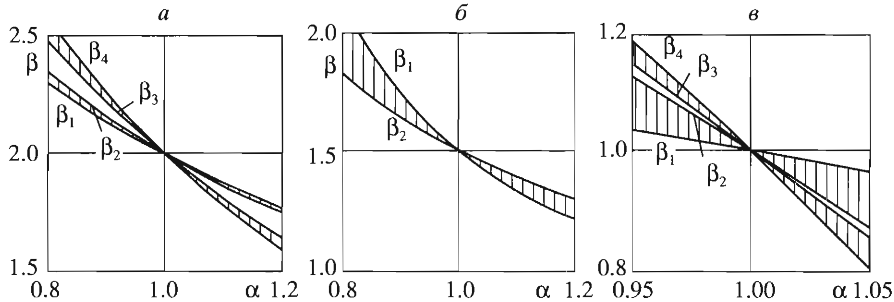
$$\beta_1 = 2 - (2 + 3e^2)(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)^2 - 2(\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1)^4$$

$$\beta_2 = 2 - (2 + 9e^2)(\alpha - 1) + (2 + 24e^2)(\alpha - 1)^2 - 2(\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1)^4$$

Аналогично из равенства $d = 0$ можно получить две граничные поверхности $\beta = \beta_i(\alpha, e)$ $(i = 3, 4)$:

$$\beta_3 = 2 + (-3.5 + 4.6443e^2)(\alpha - 1) + (3.5 - 4.9459e^2)(\alpha - 1)^2 -$$
$$- 3.5(\alpha - 1)^3 + 3.8164(\alpha - 1)^4$$

$$\beta_4 = 2 + (-3.5 - 9.1443e^2)(\alpha - 1) + (3.5 + 25.9459e^2)(\alpha - 1)^2 -$$
$$- 3.5(\alpha - 1)^3 + 3.8164(\alpha - 1)^4$$



Фиг. 4

Для иллюстрации проведенного исследования на фиг. 4, *а* показано сечение областей устойчивости и неустойчивости в окрестности точки P_3 плоскостью e = 0.2. Области неустойчивости заштрихованы.

О р е з о н а н с е $\omega_1 = 1/2$, $\omega_2 = 0$. Рассмотрим окрестность точки $P_4(1, 3/2)$. Величины α и β представим разложениями вида (6.11)(заменив число 2 на число 3/2 в разложении β), подставим в функцию Гамильтона (6.1) и разложим ее в ряд по степеням e. Невозмущенный гамильтониан имеет вид

$$F_0 = \frac{3}{8}q_1^2 + \frac{1}{2}q_1p_2 + \frac{3}{4}q_2^2 + q_2p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

а частоты малых колебаний равны 1 и 1/2.

Сделаем последовательно две канонические унивалентные замены переменных по формулам

$$q_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2), \quad q_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2), \quad p_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}\tilde{X}_2, \quad p_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2}\tilde{x}_1 \tag{6.12}$$

$$\tilde{x}_1 = \cos\nu x_2 + \sin\nu X_2, \quad \tilde{x}_2 = x_1; \quad \tilde{X}_1 = -\sin\nu x_2 + \cos\nu X_2, \quad \tilde{X}_2 = X_1 \tag{6.13}$$

Замена (6.12) приводит F_0 к сумме гамильтонианов двух гармонических осцилляторов с частотами 1 и 1/2

$$H_0 = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1^2 + \tilde{X}_1^2) + \frac{1}{4}(\tilde{x}_2^2 + \tilde{X}_2^2)$$

а замена (6.13) исключает из него часть, соответствующую осциллятору с частотой, равной единице. (Кроме того, эта замена производит перенумерацию осцилляторов.)

После замен переменных (6.12) и (6.13) невозмущенный гамильтониан принимает вид

$$H_0 = \frac{1}{4}(x_1^2 + X_1^2)$$

Этому гамильтониану отвечают новые частоты $\omega_1 = 1/2$, $\omega_2 = 0$, т.е. формально пришли к случаю кратного резонанса из разд. 3.4.

Преобразованный по методу Депри – Хори гамильтониан (1.2) задается равенством (3.3) (в котором $\delta_2 = 0$). Вычисления показали, что для величины d_2 из формул (3.4) имеет место равенство $d_2 = -e^2\nu_1^2 + O(e^3)$. Так как при малых e величина d_2 отрицательна, то границы областей устойчивости и неустойчивости определяются только равенством $d_1 = 0$. Как показали вычисления, это равенство определяет две граничные поверхности в пространстве α, β, e. Пренебрегая величинами, степень которых относительно e и $(\alpha - 1)$ выше четвертой, уравнения этих поверхностей можно записать в виде

$$\beta_1(\alpha, e) = \frac{3}{2} - \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2}e + \frac{3}{2}e^2 - \frac{123}{16}e^3\right)(\alpha - 1) + \left(\frac{11}{2} + \frac{25}{2}e - \frac{339}{40}e^2\right)(\alpha - 1)^2 -$$

$$-\left(\frac{23}{2} + \frac{31}{2}e\right)(\alpha - 1)^3 + \frac{29}{2}(\alpha - 1)^4, \quad \beta_2(\alpha, e) = \beta_1(\alpha, -e)$$

На фиг. 4, *б* показано сечение областей устойчивости и неустойчивости в окрестности точки P_4 плоскостью $e = 0.2$. Области неустойчивости отмечены штриховкой.

Резонанс $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$. Изучим окрестность точки $P_5(1, 1)$. При $e = 0$ к этой точке примыкают (см. фиг. 1) две области неустойчивости. Одна из областей (для которой $\alpha < 1$) задается (см. соотношения (6.2), (6.3)) неравенствами $\alpha\beta - 1 > 0$, $\alpha\beta + 3\alpha - 4 < 0$, а другая (для которой $\alpha > 1$) – неравенствами $\alpha\beta - 1 < 0$, $\alpha\beta + 3\alpha - 4 > 0$. К точке P_5 примыкают также (см. статью [11]) кривые $\omega_1 + \omega_2 = 1$ и $\omega_1 - \omega_2 = 1$, проходящие в областях G_1 и G_2 фиг. 1 соответственно. На фиг. 1 эти кривые не показаны.

Для исследования устойчивости при малых e представим α и β разложениями вида (6.11) (заменив в разложении β число 2 на 1). Невозмущенный гамильтониан F_0 будет таким:

$$F_0 = \frac{1}{2}q_2^2 + q_2 p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

Каноническое преобразование

$$q_1 = x_2 - X_1, \quad q_2 = x_1 - X_2, \quad p_1 = X_2, \; p_2 = X_1$$

приводит функцию F_0 к ее нормальной форме

$$H_0 = \frac{1}{2}(x_1^2 + X_1^2)$$

т.е. имеем случай кратного резонанса из разд. 3.3.

Следуя алгоритму разд. 3.3 и 2.4, приведем возмущенный гамильтониан к виду (2.5) (где $H_0 = 0$). Для коэффициентов a и b уравнения (1.4) получаются оценки

$$a = \frac{1}{4}(2\mu_1 + 5\nu_1)^2 e^2 + O(e^3), \quad b = \frac{9}{4}(\mu_1 + \nu_1)(\mu_1 + 4\nu_1)\nu_1^2 e^4 + O(e^5)$$

Отсюда и из соотношений (1.6) следует, что границы областей устойчивости и неустойчивости в пространстве α, β, e определяются из уравнений $b = 0$ и $d = 0$.

Вычисления показали, что уравнение $b = 0$ определяет две граничные поверхности, параметрические уравнения которых имеют вид

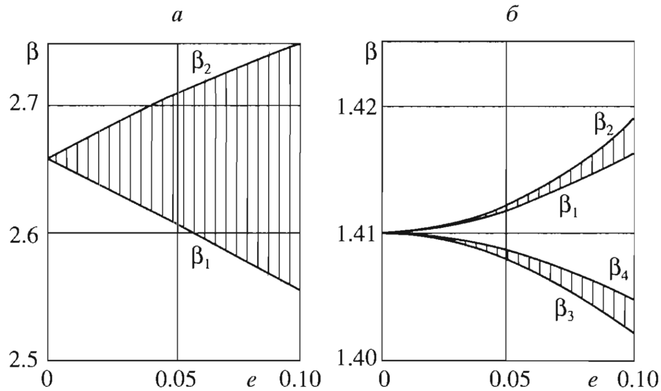
$$\alpha = 1 + e\nu_1, \quad \beta_1 = 1 - e\nu_1 + e^2\nu_1^2 - e^3\nu_1^3 + e^4\nu_1^4 + \ldots \tag{6.14}$$

и

$$\alpha = 1 + e\nu_1, \quad \beta_2 = 1 - 4e\nu_1 + 4e^2\nu_1^2 - e^3\nu_1(4\nu_1^2 - 3) + e^4\nu_1^2(4\nu_1^2 - 21) + \ldots \tag{6.15}$$

С погрешностью, порядок которой относительно e и $(\alpha - 1)$ не меньше пятого, уравнения (6.14) и (6.15) граничных поверхностей можно записать в следующем явном виде:

$$\alpha\beta_1 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha\beta_2 + 3\alpha - 4 + 3e^2\alpha(\alpha - 1)(8 - 7\alpha) = 0 \tag{6.16}$$



Фиг. 5

Уравнение $d = 0$ также дает две граничные поверхности. С той же точностью их уравнения $\beta_3(\alpha, e)$ и $\beta_4(\alpha, e)$ можно записать в таком виде:

$$\beta_3(\alpha, e) = 1 - (4.6213 - 3.0133e + 3.0455e^2 - 8.3017e^3)(\alpha - 1) - (0.0152 - 19.7160e +$$

$$+ 52.5933e^2)(\alpha - 1)^2 - (16.9242 - 26.8478e)(\alpha - 1)^3 - 48.9268(\alpha - 1)^4 \quad (6.17)$$

$$\beta_4(\alpha, e) = \beta_3(\alpha, -e)$$

На фиг. 4, *в* показано сечение областей устойчивости и неустойчивости в окрестности точки P_5 плоскостью $e = 0.2$. Области неустойчивости заштрихованы. Области неустойчивости, лежащие на фиг. 4, *в* между кривыми β_1 и β_2 – это несколько сузившиеся при малых e области неустойчивости, существовавшие на круговой орбите, а области неустойчивости, лежащие между кривыми β_3 и β_4, возникли при малых e из кривых $\omega_1 + \omega_2 = 1$ и $\omega_1 - \omega_2 = 1$.

6.3. Некоторые другие примеры кратных резонансов. О резонансе, когда одно из чисел $2\omega_1$ или $2\omega_2$ четно, а другое нечетно. Рассмотрим окрестности двух точек P_6 (3/4, 8/3) и P_7 (17/12, 24/17) из области G_1 фиг. 1. При $e = 0$ в точке P_6 имеем $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1/2$, а в точке P_7 $\omega_1 = 3/2$, $\omega_2 = 1$. Для каждой из этих точек зафиксируем параметр α и при малых e по алгоритму разд. 5 построим области устойчивости и неустойчивости в плоскости e, β.

Преобразованный по методу Депри – Хори гамильтониан приведется к виду (3.3), когда уравнения для переменных y_1, Y_1 и y_2, Y_2 разделяются. Из условий $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$ (см. равенства (3.4) при $\delta_2 = 0$) для каждой из двух рассматриваемых точек находятся по две области неустойчивости.

Оказалось, что для точки P_6 одна из областей неустойчивости лежит внутри другой. И в итоге получается область неустойчивости $\beta_1 < \beta < \beta_2$, где $\beta_1(e)$ и $\beta_2(e)$ с точностью до членов четвертой степени e включительно задаются равенствами

$$\beta_1(e) = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}e - \frac{301}{160}e^2 + \frac{117047}{12800}e^3 - \frac{17349077}{1433600}e^4, \quad \beta_2(e) = \beta_1(-e)$$

На фиг. 5, *а* область неустойчивости заштрихована.

В окрестности же точки P_7 две области неустойчивости, получаемые из условий $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$, не пересекаются. С точностью до четвертой степени e включительно они задаются неравенствами $\beta_1 < \beta < \beta_2$ и $\beta_3 < \beta < \beta_4$, где

$$\beta_1(e) = \frac{24}{17} + \frac{17685}{7616}e^2 - \frac{40285}{8704}e^3 - \frac{693927925}{67436544}e^4, \quad \beta_2(e) = \beta_1(-e)$$

$$\beta_3(e) = \frac{24}{17} - \frac{820}{357}e^2 + \frac{20267165}{1416933}e^4, \quad \beta_4(e) = \frac{24}{17} - \frac{180}{119}e^2 + \frac{610475}{52479}e^4$$

Эти области неустойчивости на фиг. 5, *б* отмечены штриховкой.

О резонансе $2\omega_1 = n_1$, $\omega_2 = 0$ (n_1 – нечетное число). Рассмотрим еще две точки P_8 (3/4, 4/3) и P_9 (17/12, 12/17), в окрестности которых преобразованный по методу Депри – Хори гамильтониан имеет форму (3.3), допускающую разделение переменных. Как и в предыдущем разделе, для каждой из этих точек зафиксируем параметр α и построим области устойчивости и неустойчивости в плоскости e, β.

Обе рассматриваемые точки лежат на границах областей устойчивости изучаемого стационарного вращения спутника: P_8 на границе области G_2, а P_9 на границе области G_1 (фиг. 1).

Для точки P_8 невозмущенный гамильтониан F_0 имеет вид

$$F_0 = -\frac{3}{8}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + q_2p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

У невозмущенной системы с этим гамильтонианом $\omega_1 = 1/2$, $\omega_2 = 0$. Каноническая унивалентная замена переменных

$$q_1 = -\sqrt{2}X_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}X_2, \quad q_2 = 2\sqrt{2}x_1 - \sqrt{3}x_2, \quad p_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x_1 + \sqrt{3}x_2, \quad p_2 = \sqrt{2}X_1 + \sqrt{3}X_2$$

приводит F_0 к нормальной форме вида

$$H_0 = \frac{1}{4}(x_1^2 + X_1^2) - \frac{1}{2}X_2^2$$

Для точки P_9 имеем такой невозмущенный гамильтониан:

$$F_0 = \frac{5}{8}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + q_2p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

Ему отвечают частоты $\omega_1 = 3/2$, $\omega_2 = 0$. При помощи канонической унивалентной замены переменных

$$q_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}X_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}X_2, \quad q_2 = \frac{2\sqrt{6}}{9}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_2, \quad p_1 = \frac{5\sqrt{6}}{18}x_1 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_2, \quad p_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}X_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}X_2$$

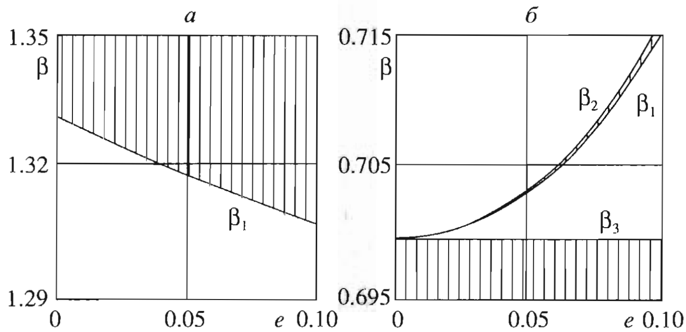
функция F_0 приводится к нормальной форме

$$H_0 = \frac{3}{4}(x_1^2 + X_1^2) + \frac{1}{2}X_2^2$$

Таким образом, оба рассматриваемых случая отвечают кратным резонансам из разд.3.2. При этом в соотношениях (3.3), (3.4) для точек P_8 и P_9 следует положить $\delta_2 = -1$ и $\delta_2 = 1$ соответственно.

В окрестности точки P_8 по алгоритму разд. 3.2 из условий $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$ можно найти две области неустойчивости $\beta_1 < \beta < \beta_2$ и $\beta > \beta_3$. Функции $\beta_i(e)$ (i = 1, 2, 3) с точностью до членов порядка e^4 включительно задаются следующими равенствами:

$$\beta_1(e) = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}e + \frac{127}{96}e^2 - \frac{4597}{4608}e^3 + \frac{2272399}{1843200}e^4, \quad \beta_2(e) = \beta_1(-e), \quad \beta_3(e) = \frac{4}{3} + \frac{9}{40}e^4$$



Фиг. 6

При малых e эти области неустойчивости пересекаются, в результате чего область неустойчивости в окрестности точки P_8 задается одним неравенством $\beta > \beta_1$. На фиг. 6, *а* эта область заштрихована. При $\beta < \beta_1$ имеет место устойчивость.

В окрестности точки P_9 аналогично можно найти две области неустойчивости:

$\beta_1 < \beta < \beta_2$ и $\beta < \beta_3$

где

$$\beta_1(e) = \frac{12}{17} + \frac{2673}{1088}e^2 - \frac{7545}{8704}e^3 + \frac{10299697641}{272957440}e^4, \ \beta_2(e) = \beta_1(-e), \ \beta_3(e) = \frac{12}{17} - \frac{405}{952}e^4$$

При малых e эти области не пересекаются. На фиг. 6, *б* они отмечены штриховкой.

Резонанс $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Исследуем устойчивость стационарного вращения спутника для значений параметров α, β, лежащих в малой окрестности точки P_{10} (2/3, 3/2) (фиг. 1). Положим

$$\alpha = \frac{2}{3} + e^2\nu_2, \quad \alpha\beta = 1 + e^2\mu_2 + e^3\mu_3 + e^4\mu_4 + e^5\mu_5 + \ldots \tag{6.18}$$

Невозмущенный гамильтониан имеет вид

$$F_0 = -\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + q_2p_1 + \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2$$

Ему отвечают нулевые частоты малых колебаний $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Каноническая унивалентная замена переменных

$$q_1 = -x_1 - \frac{1}{2}x_2, \quad q_2 = -\frac{1}{2}X_1 + X_2, \quad p_1 = -\frac{1}{2}X_1 - X_2, \quad p_2 = x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

приводит функцию F_0 к ее нормальной форме

$$H_0 = \frac{1}{2}X_1^2 - x_1x_2$$

Следовательно, имеет место кратный параметрический резонанс, рассмотренный в разд. 2.1.

Вычисления по алгоритму разд. 2.1 показали, что для коэффициентов a и b характеристического уравнения (1.4) и величины d из соотношений (1.5) имеют место следующие выражения:

$$a = 3(3+\nu_2)e^2 + O(e^4), \quad b = -e^2\mu_2 - e^3\mu_3 - \left[\mu_4 - \mu_2^2 + \mu_2\left(\frac{65}{2} - 3\nu_2\right) - \frac{27}{128}\right]e^4 -$$

$$-\left[\mu_5 - \mu_3\left(3\nu_2 + 2\mu_2 - \frac{65}{2}\right)\right]e^5 + O(e^6)$$

$$d = 4e^2\mu_2 + 4e^3\mu_3 + \left[4\mu_4 - 4\mu_2^2 + 2\mu_2(65 - 6\nu_2) + (3\nu_2 + 9)^2 - \frac{27}{32}\right]e^4 +$$

$$+[4\mu_5 - 2\mu_3(4\mu_2 + 6\nu_2 - 65)]e^5 + O(e^6)$$

Области устойчивости и неустойчивости находятся из соотношений (1.5). При малых значениях e из уравнений $b = 0$ и $d = 0$ получаем $\mu_1 = \mu_2 = \mu_5 = 0$, а $\mu_4 = 27/128$ (в случае $b = 0$) и $\mu_4 = 27/128 - (3\nu_2 + 9)^2/4$ (в случае $d = 0$). Отсюда и из разложений (6.18) следует, что в пространстве параметров α, β, e величины b и d обращаются в нуль на поверхностях $f_b = 0$ и $f_d = 0$, где функции f_b и f_d с погрешностью порядка e^6 можно записать в виде

$$f_b = s_1 - \frac{27}{128}e^4, \quad f_d = \Delta + 54\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)e^2 + \frac{2565}{32}e^4$$

Здесь s_1 и Δ – величины, определяемые равенствами (6.2) и (6.4).

В общих точках $P_*(\alpha_*, \beta_*)$ поверхностей $f_b = 0, f_d = 0$ имеем

$$\alpha_* = \frac{2}{3} - 3e^2 + O(e^4), \quad \beta_* = \frac{3}{2} + \frac{27}{4}e^2 + O(e^4) \tag{6.19}$$

В этих точках оба коэффициента a и b характеристического уравнения (1.4) обращаются в нуль.

Если величина e достаточно мала, то при $\alpha > \alpha_*$ коэффициент a положителен, и область устойчивости задается системой неравенств

$$f_b < 0, \quad f_d > 0 \tag{6.20}$$

Вне этой области имеет место неустойчивость.

При $e = 0$ неравенства (6.20) переходят в неравенства $s_1 < 0$, $\Delta > 0$, задающие (см. соотношения (6.3)) часть области G_2 устойчивости стационарного вращения спутника на круговой орбите в окрестности точки P_{10} (фиг. 1). При фиксированном малом значении e границы этой части области G_2 деформируются, а точка P_{10} переходит в точку P_* с координатами (6.19).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00386) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1477.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
2. *Маркеев А.П.* О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Докл. РАН. 2005. Т. 402. № 3. С. 339–343.

3. *Маркеев А.П.* Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в “Астрон. журнал”. 2005. Т. 31. № 5. С. 388–394.
4. *Брюно А.Д.* Нормальная форма системы Гамильтона // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43. Вып. 1. С. 23–56.
5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
6. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
7. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае нулевых частот // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 441–449.
8. *Маркеев А.П., Медведев С.В., Сокольский А.Г.* Методы и алгоритмы нормализации дифференциальных уравнений. М.: МАИ, 1985. 74 с.
9. *Kamel A.A.* Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter // Celest. Mech. 1969. Vol. 1. № 2. P.190–199.
10. *Сарычев В.А.* Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // Космич. иссл. 1965. Т. 3. Вып. 5. С. 667–673.
11. *Маркеев А.П.* О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите // Космич. иссл. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 530–539.
12. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
13. *Маркеев А.П.* Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в “Астрон. журнал”. 2005. Т. 31. № 9. С. 701–708.

Москва
e-mail: markeev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
6.VI.2005