

УДК 539.3+624.07

© 2006 г. В. А. Андрущенко, В. А. Головешкин, В. В. Зуев, Н. Н. Холин

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СТЕРЖНЯ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ  
МЕТОДАМИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ**

Методами технической теории устойчивости исследуется поведение модельного стержня на деформируемом основании под действием сжимающей и боковой нагрузок за пределом упругости. При заданных ограничениях абсолютной величины боковой нагрузки и монотонном возрастании сжимающей строится траектория нагружения, приводящая к наибольшему прогибу, выясняется возможность появления предельного состояния.

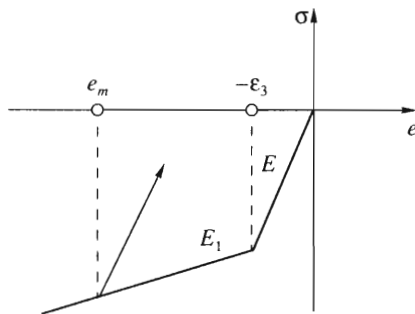
Для описания устойчивости сжатого стержня за пределом упругости существует два подхода – Кармана [1] и Шенли [2], приводящие к различным значениям критических нагрузок, названных приведенно- и касательно-модульными соответственно. Суть этих подходов в случае прямолинейного стержня такова: критерием, приводящим к первому типу критической нагрузки, служит условие появления других состояний равновесия, отличных от прямолинейного, при неизменной сжимающей силе; критерием, приводящим ко второму типу, служит условие возможности появления искривления при возрастании сжимающей нагрузки.

Идея выяснения роли каждой из этих критических нагрузок без непосредственного использования понятия устойчивости, впервые высказанная А.А. Ильюшиным и В.А. Ломакиным, опирается на понятие технической теории устойчивости и состоит в следующем. В реальных условиях можно оценить величину изменения сжимающей нагрузки и максимального значения поперечных возмущений, действующих на данный стержень, и на основании этого оценить максимально возможный прогиб стержня. Так, при действии сжимающей нагрузки  $P$  и боковой возмущающей нагрузки  $N$  стержень называется устойчивым в смысле технической устойчивости, если для любых процессов нагружения  $P(t), N(t)$  ( $t$  – параметр нагружения), для которых  $0 < P(t) \leq P_m, |N(t)| \leq N_0$  ( $P_m, N_0$  – известные величины), максимально возможный прогиб не превышает заданную величину  $\epsilon$ .

Один из способов изучения задачи технической устойчивости состоит в построении экстремальной траектории нагружения, на которой стержень достигает наибольшего прогиба, и ее последующее исследование. Отметим, что определение максимального прогиба в указанной выше постановке представляет не только теоретический, но и практический интерес для реальной конструкции. Для модельного стержня Шенли и идеализированного двутавра экстремальные траектории построены ранее [3], на такой траектории для этих моделей сначала прикладывается максимальная боковая нагрузка, а затем увеличивается до максимального значения сжимающая сила. В геометрически линейной постановке получается, что величина максимального прогиба конечна до тех пор, пока сжимающая нагрузка меньше приведенно-модульной и стремится к бесконечности при стремлении сжимающей нагрузки к приведенно-модульной. Однако результаты, полученные для модельного стержня, не удастся перенести на реальный аналог из-за отсутствия у модельного стержня центрального слоя. Поэтому процесс снятия в нем боковой нагрузки с последующим ее приложением описывается в большинстве случаев упругим законом, что приводит к потере пластического эффекта накопления прогиба.

Рассматривается модель стержня на деформируемом слое аналогичная, предложенной В.Д. Ключниковым [4]; эта модель учитывает эффект пластического накопления прогибов.

Отметим, что в этом случае соответствующие критерии потери устойчивости получены [4] в предположении, что сжимающая нагрузка превышает пластическую, т.е. в момент потери устойчивости сечение стержня находится в пластическом состоянии. Метод упругопластической трени-



Фиг. 1

ровки [5, 6] позволил увеличить пластическую нагрузку до величины, превышающей приведенно-модульную. Однако при учете влияния боковой возмущающей нагрузки возможно предельное состояние, при котором отсутствуют квазистатические состояния равновесия при росте некоторых параметров процесса нагружения.

Предполагается, что максимальное значение неубывающей сжимающей нагрузки превышает приведенно-модульную нагрузку, но меньше соответствующей пластической нагрузки. В предположении, что известна максимальная величина боковой нагрузки, решается задача нахождения наибольшего прогиба, а также выясняется вопрос о возможности достижения предельного состояния. Относительно свойств материала стержня принимается гипотеза линейного упрочнения с упругой разгрузкой и без учета влияния вторичных пластических деформаций.

Для удобства записи зависимости между напряжениями и деформациями введем понятие минимальной деформации

$$e_m : e_m = \min_{0 \leq \tau \leq l} \{e(\tau), -\varepsilon_s\}$$

Тогда уравнение связи  $\sigma - e$  имеет вид

$$\sigma = -E\varepsilon_s + E_1(e_m + \varepsilon_s) + E(e - e_m) \quad (1)$$

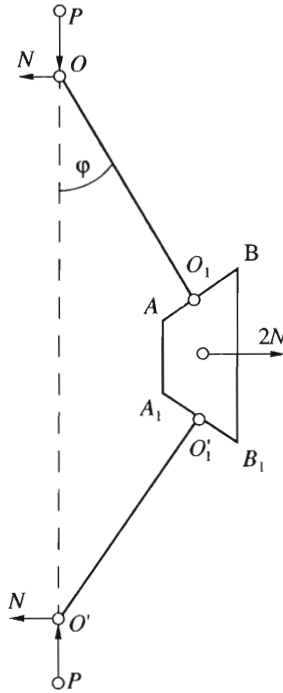
$E$  – модуль Юнга,  $E_1$  – модуль упрочнения,  $e$  – деформации,  $e_m$  – минимальные деформации,  $\varepsilon_s$  – предел упругости (фиг. 1, стрелкой показано направление упругой разгрузки).

Схема модельного стержня приведена на фиг. 2. Обозначим:  $2l$  – длина стержня ( $OO_1 = O'O'_1 = l$ ),  $\varphi$  – угол наклона,  $2h$ ,  $2s$ ,  $b$  – начальные размеры деформируемого слоя  $ABB_1A_1$ ;  $2h = AB$  – ширина слоя,  $2s$  – начальная высота,  $b$  – размер слоя в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка.

Учитывая выражение (1), в геометрически линейной постановке уравнения равновесия стержня на деформируемом слое запишем в виде

$$\begin{aligned} 2bhEe(0) &= -P + 2bh\Delta E\varepsilon_s + b\Delta E \int_{-h}^h e_m(z) dz \\ \left(\frac{2bh^3 E}{3s} - Pl\right)\varphi &= Nl + b\Delta E \int_{-h}^h e_m(z) z dz \end{aligned} \quad (2)$$

$\Delta E = E - E_1$ ,  $e(z)$ ,  $e_m(z)$  – распределения деформаций и минимальных деформаций в сечении стержня (начало оси  $z$  находится в центре деформируемого слоя).



Фиг. 2

Согласно гипотезе плоских сечений имеем

$$e(z) = e(0) + \varphi z/s \tag{3}$$

Из уравнений (2) при неубывании  $P$  получаем, что  $e(0)$  – не возрастающая функция параметра нагружения. Из условия (3) следует, что  $e(z)$  – выпуклая функция  $z$  (отметим, что в начальный момент можно положить  $e_m(z) = -\varepsilon_s$ ).

Сформулируем критерии предельного состояния стержня. Для рассматриваемой модели критические силы: Эйлера  $P_l$ , приведенно-модульная  $P_k$ , касательно-модульная  $P_r$ , а также пластическая нагрузка  $P_s$  соответственно равны [4]

$$P_l = 2bh^3 E/(3sl), \quad P_k = 4\alpha^2 P_l/(1 + \alpha)^2, \quad P_r = \alpha^2 P_l, \quad P_s = 2bhE\varepsilon_s; \quad \alpha^2 = E_1/E$$

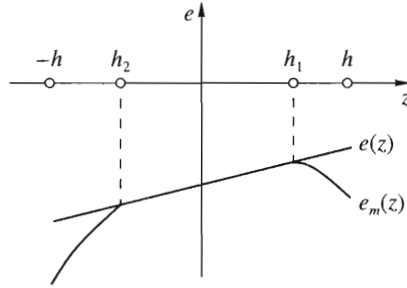
В самом общем случае в сечении стержня имеются три зоны (фиг. 3): 1)  $-h < z < h_2$ , где  $e_m(z) < e(z)$ ; 2)  $h_2 < z < h_1$ , где  $e_m(z) = e(z)$ ; 3)  $h_1 < z < h$ , где  $e_m(z) < e(z)$ . Для первой и третьей зон связь приращений напряжений и деформаций определяется упругим законом, для второй зоны она зависит от направления изменения деформации. Для формулирования критериев предельного состояния введем функцию

$$G(h_1, h_2) = \frac{b}{12s} \{ 4[2h^3 E - (h_1^3 - h_2^3)\Delta E] - 3(h_1^2 - h_2^2)^2 \Delta E^2 / [2hE - (h_1 - h_2)\Delta E] \}$$

Отметим, что  $\partial G/\partial h_1 \leq 0, \partial G/\partial h_2 \geq 0$

В приведенных ниже утверждениях 1–3 формулируются критерии предельного состояния (схема их доказательства приведена ранее [7]).

*Утверждение 1.* Если  $G(h_1, h_2) - Pl > 0$ , то возможны любые достаточно малые квазистатические продолжения процесса нагружения  $\Delta P(t), \Delta N(t)$ .



Фиг. 3

Утверждение 2. Если

$$G(h_1, h_2) - Pl < 0, \quad G(h^+, h_2) - Pl > 0, \quad G(h_1, h^-) - Pl > 0$$

где  $h^\pm \in [h_2, h_1]$  – корень соответствующего уравнения  $\pm 4hh^\pm E - (h^\pm - h_i)^2 \Delta E = 0$  ( $i = 1$  в случае  $h^+$ ,  $i = 2$  в случае  $h^-$ ), то возможны любые достаточно малые продолжения процесса нагружения  $\Delta P(t), \Delta N(t)$ .

Утверждение 3. Если  $G(x, h_2) - Pl < 0$ , где  $x = h^+$ , если  $h^+ \in [h_2, h_1]$  и  $x = h_1$  – в противном случае, то существуют квазистатические состояния равновесия, которые характеризуются неограниченным ростом прогиба стержня при неизменной сжимающей и невозрастающей боковой силах.

Утверждения 1–3 имеют простой механический смысл: если при простом увеличении боковой нагрузки существуют квазистатические состояния равновесия и прогиб при этом растет, то возможны любые достаточно малые продолжения процесса нагружения.

Для построения экстремальной траектории нагружения и нахождения максимального прогиба рассматриваются два случая.

Случай  $G(0, -h) - P_m l < 0$  (достаточно большие значения сжимающей силы); здесь  $P_m$  – максимальное возможное значение сжимающей силы. Тогда

$$P_m > bh^3(E^2 + 14EE_1 + E_1^2)/(12lsQ_4) = P_m^*, \quad Q_4 = E + E_1$$

Пусть  $P_m = G(y, -h)/l, y \in (-h, 0)$ . Покажем, что экстремальный прогиб достигается приложением максимальной боковой нагрузки  $N_m$  к стержню, сжатому силой  $P_m$ . Пусть  $\varphi_m$  – соответствующий угол наклона. Для достаточно больших значений  $N_m$  имеем следующее распределение минимальных деформаций  $e_m(z)$  (штриховая ломаная на фиг. 4):

$$e_m(z) = \begin{cases} e(z), & z \in [-h, h_1] \text{ (пластическая зона)} \\ -\varepsilon_s < e(z), & z \in [h_1, h] \text{ (упругая зона)} \end{cases} \quad (4)$$

$$e(z) = -\varepsilon_s + \varphi_m(z - h_1)/s$$

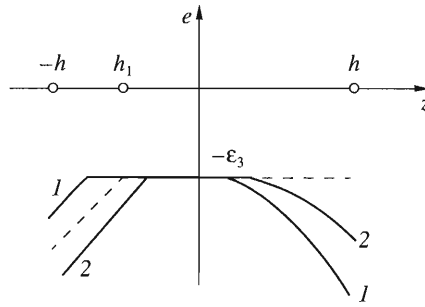
Используя уравнения равновесия (2) и (4), получим систему уравнений для определения  $\varphi_m$  и  $h_1$  как функций от  $N_m$  при заданном значении  $P_m$

$$\varphi_m = 2s\Delta Pl/(b(Q - Q_1)), \quad N_m l = \Delta P_s f(h_1, P_m) \quad (5)$$

где

$$f(h_1, P_m) = \{b[(2h + h_1)Q + (2h - h_1)Q_1] - GP_m ls\}/(3b(Q - Q_1))$$

$$\Delta P_s = P_s - P_m, \quad Q = (h - h_1)^2 E, \quad Q_1 = (h + h_1)^2 E_1$$



Фиг. 4

Из условия  $h_1 > -h$  получаем, что пластические деформации достигаются при

$$N_m l > \Delta P_s (2bh^3 Q_4 - 6P_m l s) / (3bh^2 \Delta E)$$

Систему уравнений (5) можно рассматривать как параметрическое (параметр  $h_1$ ) задание  $\varphi_m$  и  $N_m$ .

Поскольку

$$\partial f / \partial h_1 = 4sQ_2 [G(h_1, -h) - P_m l] / (b(Q - Q_1))$$

где

$$Q_2 = (h - h_1)E + (h + h_1)E_1$$

то

$$dN_m / dh_1 > 0 \text{ при } h_1 \in [-h, y], \quad dN_m / dh_1 < 0 \text{ при } h_1 \in [y, h]$$

**Утверждение 4.** Если  $N_m l = \Delta P_s f(h_1, P_m)$ ,  $h_1 \in [-h, y)$ , то для любых процессов нагружения  $P(t)$ ,  $N(t)$  из рассматриваемого класса углов наклона стержня  $\varphi(t)$  удовлетворяет условию

$$|\varphi(t)| \leq \varphi_m, \quad \varphi_m = 2s\Delta P_s / (b(Q - Q_1))$$

**Доказательство.** Рассмотрим класс процессов нагружения  $P(t)$ ,  $N(t)$ , удовлетворяющий условиям

$$dP/dt \geq 0, \quad P(t) \in [0, P_m], \quad |N(t)| \leq N_{m1}, \quad N_{m1} < N_m$$

Покажем методом от противного, что  $\varphi(t) < \varphi_m$ . Пусть найдется такое  $t = t_1$ , что  $P_1 = P(t_1) \leq P_m$ ,  $N_1 = N(t_1) < N_m$ ,  $\varphi(t_1) = \varphi_m$ . При этом  $\varphi(\tau) < \varphi_m$ ,  $\tau \in [0, t_1]$ . Пусть при  $t = t_1$  распределение минимальных деформаций по сечению стержня задано функцией  $e_m(z, t_1) = e_{m1}(z)$ . Распределение минимальных деформаций, определяемое формулами (4), обозначим  $e_{m0}(z)$ .

Возможны два варианта.

**Вариант 1.**  $e_{m1}(z, h_1) = -\varepsilon_s$  (линия 1 на фиг. 4). Тогда

$$e_{m0}(z) \leq e_{m1}(z) \text{ при } z \in [-h, 0], \quad e_{m0}(z) \geq e_{m1}(z) \text{ при } z \in [0, h]$$

Обозначим

$$P_m - P_1 = \Delta P, \quad N_m - N_1 = \Delta N, \quad e_{m0}(z) - e_{m1}(z) = \Delta e_m(z), \quad I(a, b) = \int_a^b \Delta e_m(z) z dz$$

Заметим, что  $\text{sign} \Delta e_m(z) = \text{sign} z$ .

Из уравнений (2) имеем

$$-\Delta P l \varphi_m = \Delta N l + b \Delta E I(-h, h)$$

Так как  $\Delta P \geq 0$ ,  $\Delta N > 0$ ,  $I(-h, h) > 0$ , получили противоречие.

*Вариант 2.*  $e_m(z, h_1) < -\varepsilon_s$  (линия 2 на фиг. 4).

Обозначим  $\Delta e = e_0(0) - e_1(0)$  – разность деформаций в точке  $z = 0$ . Заметим, что  $\Delta e_m(z) = \Delta e$  при  $z \in [-h, h_1]$ ,  $\Delta e_m(z)$  – вогнутая функция на отрезке  $[h_1, h]$ , возрастающая на отрезке  $[0, h]$ .

Из первого уравнения системы (2) имеем

$$b Q_2 \Delta e = b \Delta E \int_{h_1}^h \Delta e_m(z) dz - \Delta P \quad (6)$$

Из соотношения (6) следует

$$\int_{h_1}^h \Delta e_m(z) dz > \Delta e (h - h_1) \quad (7)$$

Нетрудно показать, что  $\Delta e_m(z) \leq \Delta e$  при  $z \in [h_1, 0]$ . Тогда

$$\int_{h_1}^0 \Delta e_m(z) z dz \geq -\Delta e h_1^2 / 2$$

Так как  $\Delta e_m(z)$  – вогнутая функция и  $\Delta e_m(0) \leq \Delta e$ , то из соотношения (7) следует  $I(0, h) \geq \Delta e h^2 / 2$ . Тогда из второго уравнения системы (2) получаем

$$-\Delta P \varphi_m l = \Delta N l + b \Delta E I(-h, h)$$

Преобразуя это соотношение с учетом полученных оценок, имеем

$$\begin{aligned} -P \varphi_m l - \Delta N l &= b \Delta E [I(-h, h_1) + I(h_1, 0) + I(0, h)] \geq \\ &\geq b \Delta E [(h_1^2 - h^2) \Delta e / 2 - h_1^2 \Delta e / 2 + h^2 \Delta e / 2] = 0 \end{aligned}$$

Получили противоречие, так как  $\Delta P \geq 0$ ,  $\Delta N > 0$ .

Устремляя  $N_{m1}$  к  $N_m$ , приходим к выводу, что на любой траектории нагружения из рассматриваемого класса  $\varphi(t) \leq \varphi_m$ , и следовательно, в силу симметрии  $|\varphi(t)| \leq \varphi_m$ .

*Утверждение 5.* Если  $N_m l = \Delta P_s f(h_1, P_m)$ , где  $h_1 \in [-h, y)$ , то для любых процессов нагружения из рассматриваемого класса невозможно достижение предельного состояния.

Доказательство этого утверждения следует из утверждения 3, поскольку возможен неограниченный рост угла наклона при уменьшении боковой нагрузки.

*Случай*  $G(0, -h) - P_m l > 0$ .

Пусть

$$P_m = G(y, -h) / l, \quad y \in (0, h_k), \quad h_k = h(1 - \alpha) / (1 + \alpha)$$

*Утверждение 6.* Пусть  $N_m l = \Delta P_s g(h_1, P_m)$ , где

$$g(h_1, P_m) = f(h_1, P_m) \times (P_l - P_m) / [\Delta E b h^2 f(h_1, P_m) / (s l) + P_m - P_l]$$

$$h_1 \in [0, y], \quad \Delta P_s = (P_s - P_m)$$

Тогда при любой траектории нагружения из рассматриваемого класса угол наклона стержня  $\varphi$  не превосходит  $\varphi_m$ .

*Утверждение 7.* Величина  $\varphi_m$  угла наклона стержня представляет собой точную верхнюю грань возможных прогибов, т.е. существуют траектории нагружения, приводящие к углу наклона, сколь угодно близкому к  $\varphi_m$ .

*Утверждение 8.* Если  $N_m l = \Delta P_{sg}(h_1, P_m)$ ,  $h_1 \in [0, y)$ , то достижение предельного состояния при любой траектории нагружения из рассматриваемого класса невозможно. Если  $N_m l > \Delta P_{sg}(y, P_m)$ , то достижение предельного состояния возможно.

Доказательство утверждений 6–8 опускаем.

*Выводы.* В случае, когда пластическая нагрузка превышает критическую силу Кармана, может быть достигнуто предельное состояние, которое характеризуется отсутствием квазистатических продолжений процесса нагружения при росте нагрузки.

При достаточно больших сжимающих усилиях максимальный прогиб достигается приложением боковой нагрузки (БН) к сжатому стержню. На этой же траектории нагружения достигается минимальное значение предельной БН.

При меньших значениях сжимающей нагрузки, но превышающих критическую силу Кармана, наибольший прогиб достигается на двух режимах: при достаточно малом значении БН максимальный прогиб достигается приложением БН к сжатому стержню; при больших значениях БН максимальному прогибу соответствует такой режим нагружения сжатого стержня, при котором БН неоднократно меняет знак по специальному закону и происходит накопление прогиба.

Аналогичная траектория нагружения приводит стержень в предельное состояние при минимальном значении БН.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ в рамках целевой программы “Интеграция”.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Karman Th.* Von. Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitt. Forschungsarb. Geb. Ingenieurwesen. 1910. Н. 81.
2. *Shenleu F.* Inelastic column theory // J. Aeronaut. Sci. 1947. V. 14. № 5. P. 261–267.
3. *Головешкин В.А.* Оценка максимального прогиба стержня за пределом упругости при различных процессах нагружения // Математическое моделирование нестационарных задач механики сплошных сред. М.: Изд-во ВЗМИ, 1985. С. 26–34.
4. *Клюшников В.Д.* Устойчивость процесса сжатия идеализированного упругопластического стержня // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 6. С. 59–68.
5. *Зубчанинов В.Г.* Об использовании временных поддерживающих связей для повышения устойчивости конструкции за пределом упругости // Вопросы механики. Калинин: Изд-во КПИ, 1972. С. 140–142.
6. *Зубчанинов В.Г.* Общая теория устойчивости оболочек и пластин за пределом упругости при сложном нагружении // Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. Тверь: Изд-во ТГТУ, 2001. С. 3–18.
7. *Головешкин В.А.* Критерии предельного состояния стержня за пределом упругости // Математическое моделирование нестационарных процессов в механике сплошных сред. М.: Изд-во МИП, 1989. С. 64–75.

Москва  
e-mail: v\_vzouev@rinet.ru

Поступила в редакцию  
27.04.2005