

УДК (539.3 + 624.07):534.1

© 2006 г. А. П. Малышев

## ПРОДОЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТЕРЖНЯ ПРИ ФРИКЦИОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ОБЖИМАЮЩИМ ТЕЛОМ

Рассматривается деформирование стержня, заключенного в неподвижную внешнюю обойму. Силы трения на контактной поверхности связаны с деформацией стержня степенной зависимостью. Исследуется широкий диапазон изменения параметров трения и предварительного натяга, с которым стержень вставлен в обойму, выявляются характерные особенности распределения напряжений и смещений. Рассматривается рассеяние энергии за счет трения и формирование петли гистерезиса на зависимости напряжений на нагруженном торце от его смещения. Задача решается в квазистатической постановке. Для ряда важных случаев найдены аналитические зависимости. Другие результаты получены численным интегрированием исходной дифференциальной задачи.

Модель стержня, заключенного во внешнюю обойму, позволяет описать многие механические объекты, характерная особенность которых – зависимость трения на боковой поверхности от их расширения или сужения, сопровождающих продольные деформации. Подобная расчетная схема соответствует, например, условиям работы закладных резиновых элементов отдельных типов амортизаторов, многожильных проводов в оплетке, тросов с обжимными обоймами. Широкое внедрение тросовых систем в космическую технику делает ее особенно актуальной. Наконец, на ее основе можно исследовать нагружение обсадных труб и протягивание нити через толщу материала. Большой практический интерес представляет рассеяние энергии при фрикционном взаимодействии стержня с обжимающим телом, поскольку именно оно часто определяет демпфирование колебаний.

Несмотря на широкий круг моделируемых расчетных случаев, механика стержня, фрикционно взаимодействующего с внешней обоймой, изучена недостаточно. Работы, посвященные этой проблеме, затрагивают только случаи, когда силы трения постоянны или прямо пропорциональны напряжениям в стержне, бесконечном в одном направлении [1–4]. В настоящей работе класс возможных фрикционных усилий на контактной поверхности существенно расширен, а длина стержня полагается конечной.

**1. Постановка задачи.** Напряженно-деформированное состояние тонкого упругого стержня постоянного сечения при взаимодействии с жесткой неподвижной обоймой описывается следующей системой уравнений:

$$\sigma' = p, \quad u' = \sigma \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma$  и  $u$  – напряжения в поперечных сечениях и смещения самих сечений вдоль продольной оси, штрих означает дифференцирование по осевой координате  $x$ ,  $p$  – приведенное усилие трения между стержнем и обоймой. Напряжения отнесены к модулю упругости  $E$ , а смещения и координата  $x$  – к длине стержня  $l$ . Тогда  $p = q(l/EF)$ , где  $q$  – погонное усилие трения на боковой поверхности стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения.

Определяя условия взаимодействия обоймы и стержня, примем, что сила трения подчиняется закону Амонтона – Кулона, а нормальное давление в общем случае нелинейно зависит от осадки стержня. Такая ситуация возникает, например, когда боковая поверхность негладкая и в процессе деформирования изменяется площадь контакта. Пусть

нормальное давление меняется с деформацией стержня по степенному закону. Тогда фрикционное взаимодействие можно описать следующим образом:

$$\sigma' = |p|k, \quad |p| = \xi |g + \eta |u|^{\theta+1} \text{sign} u'$$

Здесь  $g$  – давление, создаваемое за счет предварительного обжатия стержня обоймой,  $\xi$  – коэффициент трения,  $\eta$  и  $\theta$  – параметры, связывающие величину нормального давления с продольной деформацией стержня. Параметр  $k$ , вообще говоря, может принимать любые значения, не превышающие по модулю единицу. В деформируемом стержне с плоскими сечениями в отличие от абсолютно жесткого тела любое изменение осевой силы сопровождается проскальзыванием боковой поверхности относительно неподвижного основания. Будем считать, что сила меняется монотонно как при нагрузке, так и при разгрузке. В первом случае  $k = 1$ , во втором случае  $k = -1$ .

Контакт стержня с обоймой сохраняется, пока  $g + \eta |u|^{\theta+1} \text{sign} u' < 0$ . Учитывая это обстоятельство и связь упругих деформаций с напряжениями, запишем уравнения равновесия стержня в окончательном виде

$$\sigma' = \begin{cases} -k\Phi(\sigma), & \Phi(\sigma) < 0 \\ 0, & \Phi(\sigma) \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\Phi(\sigma) = f + \lambda |\sigma|^{\theta+1} \text{sign} \sigma, \quad f = \xi g, \quad \lambda = \xi \eta$$

Для определения смещений используется второе уравнение системы (1.1). Полагаем, что внешняя осевая сила создает напряжения  $\sigma(0)$  на торце  $x = 0$ , а другой торец стержня закреплен неподвижно:  $u(1) = 0$ . До приложения внешней нагрузки напряжения и смещения в стержне отсутствуют.

**2. Расчетные зависимости.** Сначала рассмотрим случай, когда стержень вставлен в обойму свободно, без предварительного натяга. Контакт и фрикционное взаимодействие возникают при сжатии стержня и отсутствуют при растяжении. Условие сохранения контакта принимает вид  $\text{sign} \sigma < 0$ , а уравнения равновесия можно записать следующим образом:

$$\sigma' - k\lambda(-\sigma)^{\theta+1} = 0, \quad \text{sign} \sigma < 0, \quad \sigma' = 0, \quad \text{sign} \sigma \geq 0 \quad (2.1)$$

Прежде всего будет рассматриваться первое уравнение, соответствующее наличию контакта. При  $\theta = 0$  и постоянном значении  $k$  оно линейное. С учетом принятых граничных условий для первого сжатия стержня и  $\sigma(0) = -a$  получим

$$\sigma = -ae^{-\lambda x}, \quad u = \frac{a}{\lambda}(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda}) \quad (2.2)$$

При разгрузке, когда напряжения на торце  $x = 0$  уменьшаются от максимального значения  $a_m$  до нуля, наблюдается фронт разгрузки с координатой  $x_-$ . Для краткости будем называть фронтами границы, разделяющие участки стержня с разными состояниями. Конечно, такой термин в квазистатической задаче условен, вместе с тем указанные границы проявляют некоторые свойства, делающие их похожими на настоящие фронты. Например, они движутся с изменением нагрузки.

Если фронт разгрузки остается в пределах стержня, то

$$\sigma = -ae^{\lambda x}, \quad u = \frac{1}{\lambda}(2\sqrt{aa_m} - a_me^{-\lambda} - ae^{\lambda x}), \quad x \leq x_-$$

$$\sigma = -a_me^{-\lambda x}, \quad u = \frac{a_m}{\lambda}(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda}), \quad x_- < x \leq 1 \quad (2.3)$$

$$x_- = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{a_m}{a} \leq 1$$

Если  $x_- > 1$ , то выражение для  $\sigma$  остается прежним и соответствующим первой из приведенных выше областей, а перемещения во всем стержне описываются второй формулой (2.2) при замене  $\lambda$  на  $-\lambda$ .

В соответствии со сказанным, когда  $\theta = 0$ , остаточные напряжения и смещения после снятия внешней нагрузки отсутствуют. Энергия, рассеянная за один цикл нагружения, определяется работой, которую совершила внешняя сила на торце  $x = 0$ . Отнеся ее к максимальной энергии упругой деформации стержня, получим коэффициент поглощения, который часто используется для оценки демпфирования колебаний [4]; в рассматриваемом случае он имеет вид

$$\psi = \frac{2}{3\lambda} \left[ 1 - \frac{1}{2}(3e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}) \right]$$

Для полубесконечного стержня подобное взаимодействие с обоймой рассматривалось ранее [1].

Обратимся теперь к случаю, когда  $\theta \neq 0$ . Решение первого уравнения системы (2.1) имеет вид

$$\sigma = -ar^{-1/\theta}, \quad r = 1 + \theta k \lambda a^\theta x \tag{2.4}$$

где учтено граничное условие на торце  $x = 0$ .

Выполнив интегрирование равенства (2.4) по  $x$ , получаем выражение для смещений

$$u = \frac{a^{1-\theta}}{k\lambda(1-\theta)} r^{(\theta-1)/\theta} + C \tag{2.5}$$

Постоянная  $C$  определяется на основе соответствующих граничных условий.

Зависимость (2.5) оказывается непригодной, когда  $\theta = 1$ , и этот случай будет рассмотрен отдельно.

Если в решение ввести параметр  $\alpha$ , определяемый зависимостью

$$\alpha = a\lambda^{1/\theta} \tag{2.6}$$

то получим выражения

$$\sigma \lambda^{1/\theta} = -\alpha r_\alpha^{-1/\theta}, \quad u \lambda^{1/\theta} = \frac{\alpha^{1-\theta}}{k(1-\theta)} r_\alpha^{(\theta-1)/\theta} + C$$

$$r_\alpha = 1 + \theta k \alpha^\theta x$$

Следовательно, если изменять масштаб нагрузки умножением ее на  $\lambda^{1/\theta}$ , то масштаб решения изменяется точно так же.

Очевидно, что

$$\frac{\sigma}{a_m} = \frac{\sigma}{\alpha_m} \lambda^{1/\theta}, \quad \frac{u}{a_m} = \frac{u}{\alpha_m} \lambda^{1/\theta}, \quad \alpha_m = a_m \lambda^{1/\theta}$$

Напряжения и смещения, нормированные по  $a_m$ , при заданном значении  $\theta \neq 0$  можно выразить через один параметр  $\alpha$ , отражающий совместное влияние нагрузки и трения, причем величина  $\psi$  определяется значением  $\alpha_m$ , которое соответствует максимальной нагрузке. Когда  $\theta = 0$ , параметр  $\alpha$  использовать нельзя, однако в этом случае  $\psi$  и так зависит только от одного параметра  $\lambda$ , характеризующего уровень трения.

Сначала рассмотрим интервал  $\theta < 0$ . При сжатии, когда  $k = 1$  и  $\theta < 0$ , величина  $r$  может менять знак. Если она становится отрицательной,  $u$  и  $\sigma$  остаются действительными только для некоторых значений  $\theta$ . С другой стороны, с ростом внешней силы, т.е. на этапе нагрузки, перемещения увеличиваются. Поэтому при сжатии стержня и  $k = 1$  должно выполняться условие  $du/da > 0$ . Дифференцируя зависимость (2.5), получим

$$du/da = 1/(k\lambda a^\theta r^{1/\theta})$$

Когда  $r < 0$ , условие  $du/da > 0$  выполняется тоже только для отдельных значений  $\theta < 0$ . Наконец, если  $r < 0$ , зависимость (2.4) при  $\theta = -1$ , т.е. при постоянном сухом трении, предполагает возможность появления зон растяжения в ходе первого сжатия, хотя известно, что такие зоны отсутствуют [1, 4]. Вместе с тем действительное решение должно существовать для любого  $\theta < 0$ . То же самое относится и к условию  $du/da > 0$ . Когда  $\theta = -1$ , должны получаться уже известные результаты для постоянного трения. Поэтому логично положить, что ветвь решения, соответствующая  $r < 0$ , не имеет физического смысла и должна быть отброшена. При  $r > 0$  указанные противоречия отсутствуют. Из условия равенства нулю минимального значения  $r$  следует, что при сжатии стержня область распространения возмущений конечна и ограничена интервалом  $0 \leq x \leq x_+$ , где  $x_+ = -a^{-\theta}/\theta$  – координата фронта первого сжатия, который формируется здесь, как и в случае  $\theta = -1$ .

Далее для определенности примем, что  $\theta = -1/2$ . Тогда в соответствии с формулой (2.6)  $\alpha = \alpha/\lambda^2$  и  $\alpha_m = \alpha_m/\lambda^2$ .

$$\text{Введем обозначения: } A_x = \sqrt{\alpha} + x/2, B_x = \sqrt{\alpha_m} + x/2.$$

При первом сжатии, если  $x_+ = 2\sqrt{\alpha} \leq 1$ , то

$$\sigma = -\lambda^2 A_{-x}^2, \quad u = \frac{2}{3}\lambda^2 A_{-x}^3, \quad x \leq x_+; \quad \sigma = 0, \quad u = 0, \quad x_+ < x \leq 1$$

Если  $x_+ > 1$ , то выражение для напряжений остается тем же, а для перемещений оно принимает вид

$$u = \frac{2}{3}\lambda^2 (A_{-x}^3 - A_{-1}^3), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Область распространения возмущений зависит от максимальной величины внешней силы и ограничена координатой  $x_{m+} = 2\sqrt{\alpha_m}$ , когда  $x_{m+} < 1$ . С уменьшением сжатия в стержне возникает область разгрузки. Она лежит в интервале  $0 < x \leq x_-$ . Координата фронта разгрузки  $x_-$  и постоянная интегрирования  $C$  находятся из условий непрерывности напряжений и смещений. На этапе разгрузки  $k = -1$  и, если  $x_{m+} \leq 1$ , то

$$\sigma = -\lambda^2 A_x^2, \quad u = -\frac{2}{3}\lambda^2 \left[ A_x^3 - \frac{1}{4}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha_m})^3 \right], \quad x \leq x_-$$

$$\sigma = -\lambda^2 B_{-x}^2, \quad u = \frac{2}{3}\lambda^2 B_{-x}^3, \quad x_- < x \leq x_{m+}$$

$$\sigma = 0, \quad u = 0, \quad x_{m+} < x \leq 1; \quad x_- = \sqrt{\alpha_m} - \sqrt{\alpha}$$

Если  $x_{m+} > 1$ , но  $x_- \leq 1$ , то

$$\sigma = -\lambda^2 A_x^2, \quad u = -\frac{2}{3}\lambda^2 \left[ A_x^3 - \frac{1}{4}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha_m})^3 + B_{-1}^3 \right], \quad x \leq x_-$$

$$\sigma = -\lambda^2 B_{-x}^2, \quad u = \frac{2}{3}\lambda^2 (B_{-x}^3 - B_{-1}^3), \quad x_- < x \leq 1$$

Наконец, когда  $x_- > 1$ ,

$$\sigma = -\lambda^2 A_x^2, \quad u = -\frac{2}{3}\lambda^2 (A_x^3 - A_1^3), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Анализ приведенных выше зависимостей показывает, что после снятия внешней нагрузки в стержне наблюдаются остаточные смещения и напряжения. Петля на зависимости напряжений от смещений на торце  $x = 0$  остается незамкнутой. В связи с этим рассмотрим повторное сжатие стержня. Фронт повторного сжатия определяется координатой  $x_{++} = \sqrt{\alpha}$ . Его максимальное удаление от нагруженного торца совпадает с крайним положением фронта разгрузки  $x_{m-}$ . В зависимости от предыстории нагружения возможно несколько вариантов распределения напряжений и смещений вдоль стержня.

Если  $x_{m+} \leq 1$  и  $x_{m-} \leq 1$ , то

$$\sigma = -\lambda^2 A_{-x}^2, \quad u = \frac{2}{3}\lambda^2 \left[ A_{-x}^3 - \frac{1}{4}(\alpha^{3/2} - \alpha_m^{3/2}) \right], \quad x \leq x_{++}$$

$$\sigma = -\frac{1}{4}\lambda^2 x^2, \quad u = -\frac{1}{6}\lambda^2 \left( \frac{x^3}{2} - \alpha_m^{3/2} \right), \quad x_{++} < x \leq x_{m-}$$

$$\sigma = -\lambda^2 B_{-x}^2, \quad u = \frac{2}{3}\lambda^2 B_{-x}^3, \quad x_{m-} < x \leq x_{m+}$$

$$\sigma = 0, \quad u = 0, \quad x_{m+} < x \leq 1$$

По достижении максимального сжатия напряжения и смещения принимают те же значения, что и в конце первого сжатия. Теперь на зависимости  $\sigma - u$  для  $x = 0$  образуется замкнутая петля гистерезиса, которая повторяется при последующих циклах нагружения. Рассеяние энергии характеризуется коэффициентом поглощения

$$\Psi = \frac{11}{30}\alpha_m \tag{2.7}$$

Когда  $x_{m+} > 1$ , деформирование охватывает весь стержень и предпоследняя область расширяется вплоть до  $x = 1$ . Если  $x_{m-} \leq 1$ , то распределение напряжений в трех оставшихся областях описывается прежними зависимостями, однако выражения для перемещений изменяются. Имеем

$$u = \frac{2}{3}\lambda^2 \left[ A_{-x}^3 - \frac{1}{4}(\alpha^{3/2} - \alpha_m^{3/2}) - B_{-1}^3 \right], \quad x \leq x_{++}$$

$$u = -\frac{2}{3}\lambda^2 \left( \frac{x^3}{8} - \frac{\alpha_m^{3/2}}{4} + B_{-1}^3 \right), \quad x_{++} < x \leq x_{m-}$$

$$u = \frac{2}{3}\lambda^2 (B_{-x}^3 - B_{-1}^3), \quad x_{m-} < x \leq 1$$

Коэффициент поглощения в этом случае по-прежнему определяется зависимостью (2.7).

Когда  $x_{m-} > 1$ , фронт повторного сжатия с ростом нагрузки выходит за пределы стержня, а распределение напряжений и смещений зависит от положения только этого фронта.

Пока  $x_{++} \leq 1$ ,

$$\sigma = -\lambda^2 A_{-x}^2, \quad u = \frac{2}{3}\lambda^2 \left[ A_{-x}^3 - \frac{1}{4} \left( \alpha^{3/2} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad x \leq x_{++}$$

$$\sigma = -\frac{1}{4}\lambda^2 x^2, \quad u = \frac{1}{12}\lambda^2 (1 - x^3), \quad x_{++} < x \leq 1$$

После того как фронт повторного сжатия исчезает, выйдя за пределы стержня, и  $x_{++} > 1$ ,

$$\sigma = -\lambda^2 A_{-x}^2, \quad u = \frac{2}{3}\lambda^2 (A_{-x}^3 - A_{-1}^3), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Если  $x_{m-} > 1$ , коэффициент поглощения при циклическом сжатии определяется выражением

$$\psi = \frac{1}{30\alpha_m^2} (40\alpha_m^{3/2} - 40\alpha_m + 15\alpha_m^{1/2} - 4)$$

Перейдем теперь к случаю, когда  $\theta > 0$ , и положим  $\theta = 1$ . Тогда  $\alpha = a\lambda$ ,  $\alpha_m = a_m\lambda$ . Уже отмечалось, что выражение (2.5) при таком значении  $\theta$  непригодно для описания смещений.

Распределение напряжений и смещений в этом случае соответствует зависимостям

$$\sigma = -\frac{\alpha}{\lambda(1 + k\alpha x)}, \quad u = -\frac{1}{k\lambda} \ln(1 + k\alpha x) + C$$

Для этапа сжатия имеем

$$\sigma = -\frac{\alpha}{\lambda(1 + \alpha x)}, \quad u = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha x}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Фронт первичной нагрузки здесь отсутствует, как и при  $\theta = 0$ . Заметим, что это свойство сохраняется для всех значений  $\theta > 0$ , так как  $r > 0$  при  $k = 1$  для любых координат  $x \geq 0$ . Напомним, что этот фронт определялся из условия  $r = 0$ .

Если после достижения максимума нагрузка начинает уменьшаться, в стержне возникает фронт разгрузки с координатой  $x_- = (\alpha_m - \alpha)/(2\alpha\alpha_m)$ . В той части стержня, где  $x > x_-$ , напряжения и смещения сохраняют величину, достигнутую на этапе сжатия, а при  $x \leq x_-$  наблюдается процесс разгрузки. Когда  $x_- < 1$ ,

$$\sigma = -\frac{\alpha}{\lambda(1 - \alpha x)}, \quad u = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{4\alpha\alpha_m(1 + \alpha_m)(1 - \alpha x)}{(\alpha + \alpha_m)^2}, \quad x \leq x_-$$

$$\sigma = -\frac{\alpha_m}{\lambda(1 + \alpha_m x)}, \quad u = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1 + \alpha_m}{1 + \alpha_m x}, \quad x_- < x \leq 1$$

Если  $x_- \geq 1$  и фронт разгрузки пропадает, выходя за пределы стержня, формулы для напряжений и смещений в зоне разгрузки имеют такой же вид, как на этапе сжатия, но в них величины  $\alpha$  и  $\lambda$  меняются на  $-\alpha$  и  $-\lambda$ .

После снятия внешней нагрузки остаточные напряжения и смещения в стержне отсутствуют. Замкнутая петля гистерезиса на зависимости  $\sigma(0)$  от  $u(0)$  образуется уже по-

сле первого цикла нагрузка – разгрузка и остается неизменной при дальнейшем нагружении. Рассеяние энергии характеризуется следующим коэффициентом поглощения:

$$\Psi = \frac{2}{\alpha_m^2} \left[ 2\alpha_m - \ln(1 + 2\alpha_m) + 2\alpha_m \ln \frac{1 + \alpha_m}{1 + 2\alpha_m} \right]$$

Обратимся теперь к ситуации, когда еще до приложения нагрузки обжимающее тело создает на контактной поверхности нормальное давление. Например, стержень обжат обоймой, надетой на него с натягом. Тогда в уравнении (1.2)  $f \neq 0$ . Положим, что цикл внешней нагрузки начинается с растяжения.

Как и при  $f = 0$ , начнем со случая  $\theta = 0$ . Для него решение уравнения (1.2) имеет достаточно простое аналитическое выражение. При первом растяжении, когда  $0 \leq a \leq a_m$  и  $x_+ \leq 1$ ,

$$\sigma = (a + b)e^{\lambda x} - b, \quad u = b(x_+ - x) + \frac{a + b}{\lambda} \left( e^{\lambda x} - \frac{b}{a + b} \right), \quad x \leq x_+$$

$$\sigma = 0, \quad u = 0, \quad x_+ < x \leq 1$$

$$b = \frac{f}{\lambda}, \quad x_+ = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{b}{a + b}$$

где  $x_+$  – координата фронта первичной нагрузки, который образуется здесь в отличие от стержня без предварительного обжатия. Если этот фронт выходит за пределы стержня, т.е.  $x_+ > 1$ , то напряжения определяются прежней зависимостью, а выражение для смещений принимает вид

$$u = b(1 - x) - \frac{a + b}{\lambda} (e^{\lambda x} - e^\lambda), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{2.8}$$

В дальнейшем будем считать, что растяжение охватило весь стержень. Обобщение результатов на случай более слабого растяжения достаточно очевидно.

На этапе разгрузки и возможного последующего сжатия  $a_m > a \geq a_n$ , где может быть  $a_n \leq 0$ . Фронт разгрузки имеет координату

$$x_- = \frac{1}{2\lambda} \ln \zeta_-, \quad \zeta_- = \frac{a + b}{a_m + b} \tag{2.9}$$

Если на этапе растяжения наблюдалась потеря контакта между стержнем и обжимающим телом, то  $a_m + b \geq 0$  и координату  $x_-$  нельзя определить, так как по формуле (2.9) либо получается деление на нуль, либо требуется найти логарифм отрицательного числа. Физически это означает, что даже после временной потери контакта фронт разгрузки не возникает.

При наличии фронта разгрузки и  $x_- \leq 1$

$$\sigma = (a + b)e^{-\lambda x} - b$$

$$u = b(1 - x) - \frac{a + b}{\lambda} \left( e^{-\lambda x} + \frac{e^\lambda}{\zeta_-} - \frac{2}{\sqrt{\zeta_-}} \right), \quad x \leq x_-$$

$$\sigma = (a_m + b)e^{\lambda x} - b$$

$$u = b(1 - x) + \frac{a_m + b}{\lambda} (e^{\lambda x} - e^\lambda), \quad x_- < x \leq 1$$

Если фронт разгрузки отсутствует ввиду того, что пропал контакт стержня с облой-мой или  $x_- \geq 1$ , напряжения во всем стержне определяются так же, как в первой из приведенных выше областей. Смещения при этом описываются выражением (2.8) при замене  $\lambda$  на  $-\lambda$ .

Анализ приведенных зависимостей указывает на наличие остаточных напряжений и смещений к моменту полного снятия внешней силы.

Крайнее положение фронта сжатия определяется координатой

$$x_{n-} = \frac{1}{2\lambda} \ln \zeta_{n-}, \quad \zeta_{n-} = \frac{a_n + b}{a_m + b}$$

В случае повторного растяжения  $a_n < a \leq a_m$  и возникает еще один фронт с координатой

$$x_{++} = \frac{1}{2\lambda} \ln \zeta_{++}, \quad \zeta_{++} = \frac{a_n + b}{a + b}$$

Когда оба фронта остаются в пределах стержня, т.е.  $x_{++} \leq 1$  и  $x_{n-} \leq 1$ ,

$$\sigma = (a + b)e^{\lambda x} - b$$

$$u = b(1 - x) + \frac{a_n + b}{\lambda} \left( \frac{e^{\lambda x}}{\zeta_{++}} - \frac{e^{\lambda}}{\zeta_{n-}} - \frac{2}{\sqrt{\zeta_{++}}} + \frac{2}{\sqrt{\zeta_{n-}}} \right), \quad x \leq x_{++}$$

$$\sigma = (a_n + b)e^{-\lambda x} - b$$

$$u = b(1 - x) - \frac{a_n + b}{\lambda} \left( e^{-\lambda x} + \frac{e^{\lambda}}{\zeta_{n-}} - \frac{2}{\sqrt{\zeta_{n-}}} \right), \quad x_{++} < x \leq x_{n-}$$

$$\sigma = (a_m + b)e^{\lambda x} - b$$

$$u = b(1 - x) + \frac{a_m + b}{\lambda} (e^{\lambda x} - e^{\lambda}), \quad x_{n-} < x \leq 1$$

Если  $x_{n-} \geq 1$  или фронт разгрузки вообще отсутствовал, вторая область из трех приведенных выше занимает полностью часть стержня с координатами  $x > x_{++}$ . Формулы для напряжений в двух оставшихся областях прежние, а зависимости, описывающие смещения, принимают вид

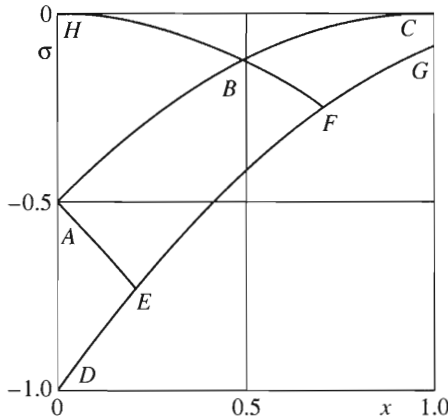
$$u = b(1 - x) + \frac{a_n + b}{\lambda} \left( \frac{e^{\lambda x}}{\zeta_{++}} + e^{-\lambda} - \frac{2}{\sqrt{\zeta_{++}}} \right), \quad x \leq x_{++}$$

$$u = b(1 - x) + \frac{a_n + b}{\lambda} (e^{-\lambda} - e^{-\lambda x}), \quad x_{++} < x \leq 1$$

Наконец, когда  $x_{++} > 1$ ,

$$\sigma = (a + b)e^{\lambda x} - b, \quad u = b(1 - x) + \frac{a + b}{\lambda} (e^{\lambda x} - e^{\lambda}), \quad 0 \leq x \leq 1$$

При  $a = a_m$  напряжения и смещения достигают тех же значений, что и при первом растяжении. Далее при циклическом нагружении картина деформирования будет повто-



Фиг. 1

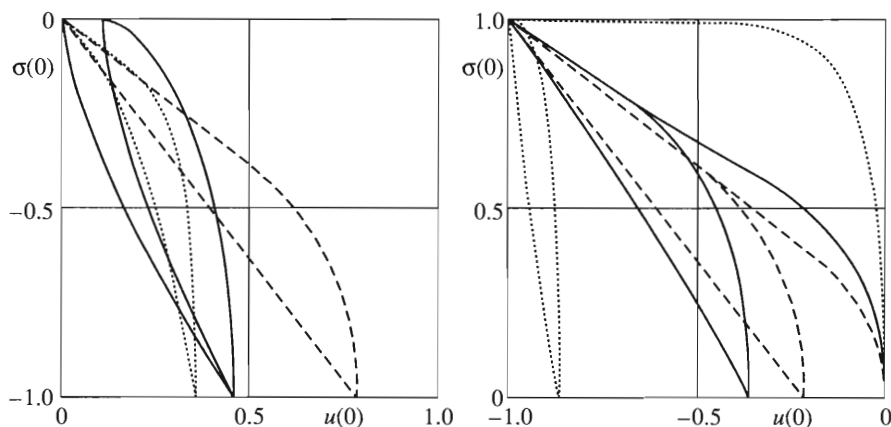
ряться. Важный частный случай  $a_n \geq 0$  соответствует нагружению нитей, тросов, проводов и т.п.

Когда  $\theta \neq 0$  и  $f \neq 0$ , получить аналитические выражения для  $\sigma$  и  $u$  либо не удастся вовсе, либо для этого требуется привлечение малоупотребительных высших трансцендентных функций. В этих случаях исходная дифференциальная задача интегрировалась численными методами. Для уравнения (1.2) задача Коши с начальным условием  $\sigma(0)$  решалась методом Рунге – Кутты четвертого порядка, а необходимые интегралы при определении смещений и коэффициента поглощения вычислялись по формуле Симпсона [5]. Во всех случаях использован шаг, равный 0.001. Контрольные расчеты с шагом, в 5 раз меньшим, а также сравнение с результатами, полученными по аналитическим зависимостям, показали совпадение не менее четырех значащих цифр.

**3. Анализ результатов и примеры.** Напряжения и смещения на всех иллюстрациях нормированы по максимальной величине внешней нагрузки  $a_m = 0.003$ . На фиг. 1 показано распределение напряжений в стержне, помещенном в обойму без предварительного обжатия, при действии переменной сжимающей силы на торце  $x = 0$ . Фрикционное взаимодействие характеризуется параметрами  $\theta = -1/2$  и  $\lambda = 0.0775$  ( $\alpha_m = 1/2$ ). Кривые AC и DG описывают распределение напряжений на этапе первого сжатия при  $\sigma(0) = -a_m/2$  и  $\sigma(0) = -a_m$  соответственно. В точке C находится фронт нагрузки, который с усилением сжатия выходит за пределы стержня. После разгрузки от  $-a_m$  до  $-a_m/2$  уровень напряжений меняется по линии AEG, причем положение фронта разгрузки определяется осевой координатой точки E. Линия HFG описывает распределение напряжений в момент, непосредственно предшествующий полному снятию внешней силы, когда фронт разгрузки достигает координаты точки F.

Наличие фронта первичного сжатия, а также остаточных напряжений и смещений, как было установлено в предыдущем разделе, является характерной особенностью фрикционного взаимодействия данного типа, когда  $\theta < 0$ .

При повторном сжатии до половины максимальной нагрузки напряжения распределены в соответствии с линией ABFG, а фронт вторичной нагрузки движется с точкой B по направлению к точке F. По достижении максимальной нагрузки он сливается с фронтом предыдущей разгрузки – точки B и F совпадают. Распределение напряжений становится таким же, как при первом сжатии, и в случае циклического нагружения картина деформирования повторяется. Отметим, что даже если внешняя нагрузка изменяется равномерно, фронты перемещаются с переменной скоростью. Например, фронт разгрузки сначала движется медленно, а затем его скорость возрастает.



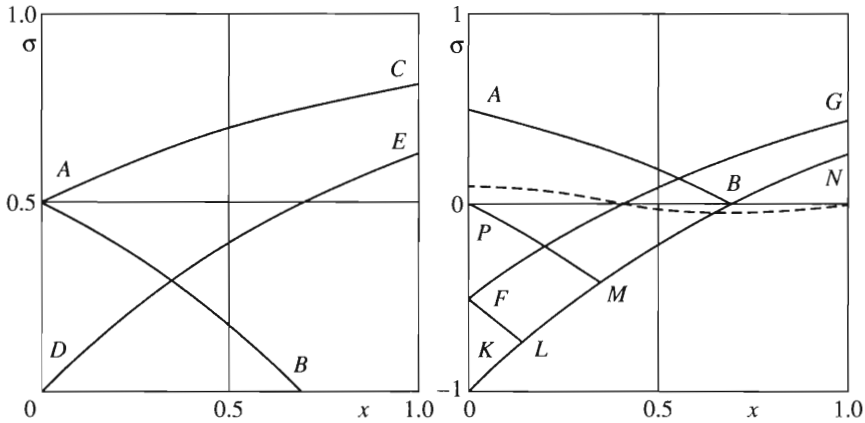
Фиг. 2

На фиг. 2 показано формирование петли гистерезиса на зависимости  $\sigma(0)$  от  $u(0)$  при пульсационных циклах нагружения. Слева приведены результаты для сжимающей нагрузки, действующей на стержень, который помещен в обойму без предварительного обжатия, при  $\theta = -1/2$ ,  $\lambda = 0.0775$  (сплошная линия),  $\theta = 0$ ,  $\lambda = 1$  (штриховая линия),  $\theta = 1$ ,  $\lambda = 1667$  ( $a_m = 5$ , пунктирная линия). Когда  $\theta = -1/2$ , видны значительные остаточные смещения после первой разгрузки, но затем петля становится замкнутой и стабилизируется. В случаях  $\theta = 0$  и  $\theta = 1$  остаточные смещения отсутствуют и замкнутая петля гистерезиса образуется уже после первого цикла. При  $\theta = 0$  часть петли, соответствующая увеличению силы трения, демонстрирует линейную связь  $\sigma(0)$  и  $u(0)$ . В двух других случаях часть петли, которая формируется при нарастающем трении, перестает быть прямой, однако ее кривизна существенно меньше, чем остальной части, и имеет разный знак при  $\theta = -1/2$  и  $\theta = 1$ .

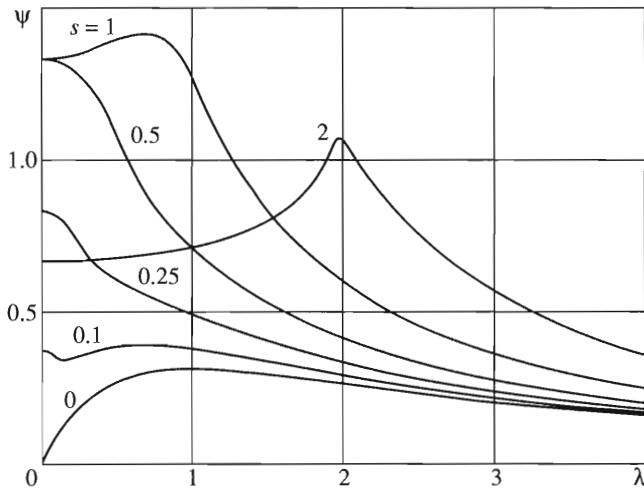
Справа на фиг. 2 показаны результаты растяжения стержня, зажатого в обойме. Внешняя нагрузка изменялась в интервале от 0 до  $a_m$ . Предварительное обжатие задавалось в соответствии с зависимостью  $f = -\lambda|a_m|^\theta + 1$  и обеспечивало полное раскрытие стыка между стержнем и обоймой при максимальном растяжении.

Когда  $\theta = 0$ , если отбросить первое растяжение, сопровождаемое появлением остаточных смещений, петля гистерезиса имеет те же форму и размер, что и при пульсационном сжатии. Правда, здесь линейная зависимость напряжения от смещения соответствует этапу разгрузки, а не нагрузки, однако в обоих случаях она наблюдается, когда сила трения нарастает. Когда  $\theta \neq 0$ , такое подобие петель гистерезиса отсутствует. Об этом можно судить по виду двух других петель. Их форма и размеры существенно отличаются от приведенных на фиг. 2 слева, хотя они построены для тех же характеристик трения. Однако и здесь зависимость напряжения на нагруженном торце от смещения при нарастании трения ближе к линейной, чем при убывании.

На фиг. 3 приведено распределение напряжений в предварительно зажатом стержне при действии знакопеременной нагрузки. Сначала стержень растягивается до  $\sigma(0) = a_m$ , а затем сжимается до  $\sigma(0) = -a_m$ . В качестве примера рассматривается фрикционное взаимодействие, когда  $\theta = 0$  и  $\lambda = 1$ . Начальное обжатие задавалось так же, как в предыдущем случае. Слева кривая  $AB$  соответствует первому растяжению до  $\sigma(0) = a_m/2$ . По достижении  $\sigma(0) = a_m$  контакт между стержнем и обоймой пропадает и во всем стержне устанавливаются одинаковые напряжения, в нормированном виде равные единице. Раскрытие стыка между стержнем и обоймой происходит одновременно по всей длине. Кривая  $AC$  соответствует  $\sigma(0) = a_m/2$ , но уже на этапе разгрузки. После временной потери контакта стержня с обоймой фронт разгрузки не образуется. Этот эффект обсуждал-



Фиг. 3

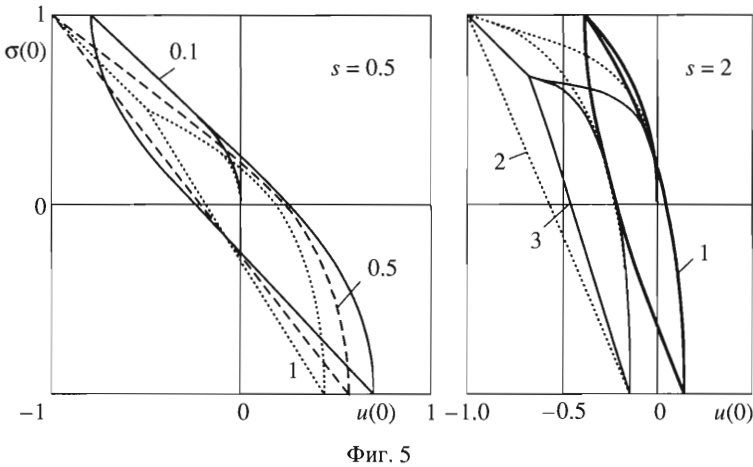


Фиг. 4

ся в предыдущем разделе. Линия *DE* описывает распределение остаточных напряжений после полупериода нагрузка – разгрузка, соответствующего растяжению.

Распределение напряжений при переходе к сжатию показано на фиг. 3 справа кривыми *FG* и *KN* для  $\sigma(0) = -a_m/2$  и  $\sigma(0) = -a_m$  соответственно. С уменьшением сжатия формируется фронт вторичной разгрузки, положение которого при разгрузке до  $\sigma(0) = -a_m/2$  и  $\sigma(0) = 0$  определяется координатами  $x$  соответственно точек *L* и *M*. Величина остаточных напряжений после первого полного цикла изменения нагрузки показана линией *PMN*. После снятия сжимающей нагрузки в стержне остаются как сжатые, так и растянутые участки. Остаточные смещения показаны штриховой линией. При повторном растяжении до  $\sigma(0) = a_m/2$  напряжения опять описываются кривой *AB*, которая продублирована на фиг. 3 справа и слева. Затем процесс деформирования приобретает периодический характер.

На фиг. 4 приведены результаты расчета коэффициента поглощения при  $\theta = 0$  и начальном обжатии  $f = sf_0$ , где  $f_0 = -0.003$ . Кривая  $s = 0$  соответствует стержню, помещенному в обойму без предварительного обжатия; в этом случае зависимость  $\psi(\lambda)$  имеет ха-



Фиг. 5

рактерный для внешнего трения вид: с ростом  $\lambda$  сначала рассеиваемая энергия увеличивается, а при большом трении начинает убывать за счет быстрого уменьшения смещений.

Объяснить характер зависимости  $\psi(\lambda)$  при наличии предварительного обжатия помогает анализ формы петель гистерезиса. На фиг. 5 приведены такие петли для двух уровней начального обжатия. Числа, которыми они помечены, указывают величину параметра  $\lambda$ . По своей сути он определяет чувствительность силы трения к осевым деформациям стержня. С его увеличением, т.е. с ростом этой чувствительности, при тех же растягивающих усилиях наблюдается более заметное ослабление трения и, как следствие, увеличение перемещений торца. При дальнейшем росте  $\lambda$  происходит потеря контакта стержня с обоймой. Впервые она возникает при  $\lambda = s$ , и одна из вершин петли оказывается в точке с координатами  $(-1, 1)$  на плоскости  $u(0) - \sigma(0)$ . Затем по мере увеличения  $\lambda$  все большая часть фазы растяжения стержня проходит без соприкосновения с обоймой. Площадь петли, а следовательно, и рассеиваемая энергия начинают быстро уменьшаться. При  $s = 2$  подобная эволюция петли гистерезиса послужила причиной появления остроконечного пика на зависимости  $\psi(\lambda)$ . В целом начальное обжатие сказывается на рассеянии энергии сильнее, чем величина  $\lambda$ , особенно при небольших значениях этого параметра.

Расчетная схема стержня, заключенного в обойму, позволяет моделировать широкий круг проблем, связанных с фрикционным взаимодействием, и полученные результаты могут быть использованы при их решении.

Автор благодарит Л.В. Никитина за обсуждение данной работы и предложенные уточнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Моск. лицей, 1998. 272 с.
2. Султанов К.С. Волны в обжатом стержне при движении обжимающего тела // Изв. АН. МТТ. 1995. № 5. С. 123–133.
3. Филиппов А.Н. Распространение продольных упругих волн в стержне, окруженном средой типа Винклера // Вест. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1983. № 1. С. 74–78.
4. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 430 с.