

УДК (539.3+624.07):534.1

© 2006 г. А. И. Муницын

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С НЕПОДВИЖНЫМИ ШАРНИРНЫМИ ОПОРАМИ

Аналитически и численно исследуются свободные и вынужденные изгибные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами. Учитывается геометрическая нелинейность, обусловленная изменением длины средней линии стержня при его пространственном движении. Рассматриваются колебания стержня с различными собственными частотами в двух взаимно перпендикулярных направлениях вследствие несовпадения изгибных жесткостей стержня либо жесткости опор в разных направлениях. Для свободных колебаний показано, что наряду с двумя плоскими формами движения при превышении определенного порогового значения существует форма, соответствующая движению сечений стержня по окружности. Построены и качественно исследованы амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики системы в окрестности главного резонанса.

В исследованиях колебаний струны с закрепленными опорами [1–3] обнаружена взаимосвязь колебаний в различных направлениях, что приводит к существованию как плоских форм движения струны, так и пространственных, при которых точки струны совершают движение по кругу. Для вынужденных колебаний в окрестности главного резонанса существует диапазон частот, при которых возникают устойчивые параметрические колебания в плоскости, ортогональной действию вынуждающей силы, и суммарное движение точек происходит по эллипсу.

При численном исследовании пространственных колебаний нерастяжимой [4] и упругой [5] нити с натяжным устройством также обнаружено существование плоских и пространственных форм движения, с той разницей, что система имеет мягкую, а не жесткую упругую характеристику.

Уравнения, описывающие плоские и изгибные колебания стержня и струны с неподвижными опорами, приводятся к одному виду в безразмерных переменных [6], и в этом случае качественные результаты будут теми же. Нелинейные колебания пологих криволинейных стержней в плоскости кривизны рассматривались ранее [7].

1. Постановка задачи. Пусть центральная ось стержня в недеформированном состоянии совпадает с осью x прямоугольной системы координат, главные оси инерции поперечного сечения параллельны осям y и z . Концам стержня соответствуют координаты $x = 0$ и $x = L$. Обозначим через u , v , w перемещения точек средней линии стержня. В технической теории изгиба стержней продольная деформация в точке сечения с координатами y и z равна

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - yv'' - zw'', \quad \varepsilon_0 = u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \quad (1.1)$$

Штрихом обозначена производная по x , ε_0 – деформация средней линии стержня, слагаемым $u'^2/2$ пренебрегаем. Принятая зависимость позволяет учесть удлинение средней линии, вызываемое перемещениями вдоль осей y и z . Выражения для потенциальной и кинетической энергии стержня имеют вид

$$U = \frac{EF}{2} \int_0^L \varepsilon_0^2 dx + \frac{EJ_z}{2} \int_0^L v''^2 dx + \frac{EJ_y}{2} \int_0^L w''^2 dx$$

$$T = \frac{\rho F}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx$$
(1.2)

где E, ρ – модуль упругости и плотность материала стержня, F – площадь поперечного сечения, J_y, J_z – осевые моменты инерции сечения, точкой обозначена производная по времени. Кручение не учитывается, поскольку в дальнейшем рассматриваются преимущественно изгибные колебания тонкого стержня в окрестности первой собственной частоты.

Воспользуемся принципом Гамильтона – Остроградского и получим систему трех уравнений в частных производных

$$\rho F \ddot{u} - EF \varepsilon_0' = 0, \quad \rho F \ddot{v} + EJ_z v^{IV} - EF(\varepsilon_0 v')' = 0, \quad \rho F \ddot{w} + EJ_y w^{IV} - EF(\varepsilon_0 w')' = 0$$
(1.3)

Система (1.3) должна быть дополнена граничными условиями, в частности для стержня с неподвижными шарнирными опорами на концах имеем граничные условия

$$u = v = w = v'' = w'' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L$$
(1.4)

2. Свободные колебания. Для тонкого стержня собственные частоты продольных и изгибных колебаний разнесены: $\omega_x \gg \omega_y, \omega_x \gg \omega_z$. Следовательно, при исследовании колебаний в окрестности первой частоты в первом из уравнений (1.3) можно пренебречь величиной \ddot{u} , откуда следует независимость ε_0 от координаты x . Предполагая отсутствие относительного продольного смещения опор согласно граничным условиям (1.4), получаем

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \int_0^L (v'^2 + w'^2) dx$$
(2.1)

Подставляя это выражение в остальные два уравнения (1.3), имеем два интегриродифференциальных уравнения в безразмерных переменных

$$\pi^4 \ddot{v} + v^{IV} - 4\gamma \varepsilon_0 v'' = 0, \quad \pi^4 \ddot{w} + c w^{IV} - 4\gamma \varepsilon_0 w'' = 0$$
(2.2)

Здесь

$$\gamma = FL^2/(4J_z), \quad c = J_y/J_z$$

Все перемещения и координата x отнесены к длине стержня L , точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени, которое получается из исходного умножением на частоту малых свободных колебаний в плоскости xy

$$\omega_1 = (\pi/L)^2 [EJ_z/(\rho F)]^{1/2}$$

Ограничимся случаем одномодового приближения и представим решение в виде

$$v(x, t) = \varphi_1(t) \sin \pi x, \quad w(x, t) = \varphi_2(t) \sin \pi x$$

Подстановка в систему (2.2) приводит к системе с двумя степенями свободы

$$\ddot{\varphi}_k + [1 + (k-1)\varepsilon\delta]\varphi_k + \varepsilon\gamma(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_k = 0, \quad k = 1, 2 \quad (2.3)$$

где введен малый параметр ε и произведена замена $c = 1 + \varepsilon\delta$, т. е. нелинейность системы и разность собственных частот предполагаются асимптотически малыми, что позволяет применить эффективные методы нелинейной механики [8, 9].

Система (2.3) имеет жесткую кубическую нелинейность и ввиду малости $\varepsilon\delta$, для нее характерны явления типа внутреннего резонанса. Было приведено [10] подробное исследование аналогичной системы методом многих масштабов.

Произведя в системе (2.3) замену переменных

$$\varphi_k = a_k \cos(t + \alpha_k), \quad k = 1, 2 \quad (2.4)$$

и применяя метод усреднения, получим достаточно простую систему уравнений в медленных переменных

$$\dot{a}_k = \frac{1}{8}\varepsilon\gamma a_1^k a_2^{3-k} S_1, \quad \dot{\alpha}_k = \frac{1}{2}\varepsilon\delta(k-1) + \frac{3}{8}\varepsilon\gamma a_k^2 + \frac{1}{8}\varepsilon\gamma a_{3-k}^2(2 + S_2) \quad (2.5)$$

$$S_1 = \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2), \quad S_2 = \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2), \quad k = 1, 2$$

где a_k и α_k – амплитуды и фазы парциальных колебаний, свободные колебания рассматриваются в малой окрестности единичной частоты. Система (2.5) имеет три решения.

1) $a_2 \equiv 0$. В этом случае система (2.5) принимает вид

$$\dot{a}_1 = 0, \quad \dot{\alpha}_1 = \frac{3}{8}\varepsilon\gamma a_1^2$$

и ее решением является

$$a_1 = \text{const}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{8}\varepsilon\gamma a_1^2 t + \alpha_{10}$$

Подставляя найденные значения a_1 и α_1 в соотношения (2.4), получаем колебания стержня в плоскости xy

$$\varphi_1 = a_1 \cos((1 + \varepsilon\lambda)t + \alpha_{10}), \quad \varphi_2 \equiv 0 \quad (2.6)$$

где введено обозначение

$$\lambda = \frac{3}{8}\varepsilon\gamma a_1^2 \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) описывает известную зависимость амплитуды от частоты свободных колебаний стержня в плоскости [6, 9], представленную на фиг. 1 кривой 1 для $\gamma = 1$.

2) $a_1 \equiv 0$. Решением системы (2.5) является

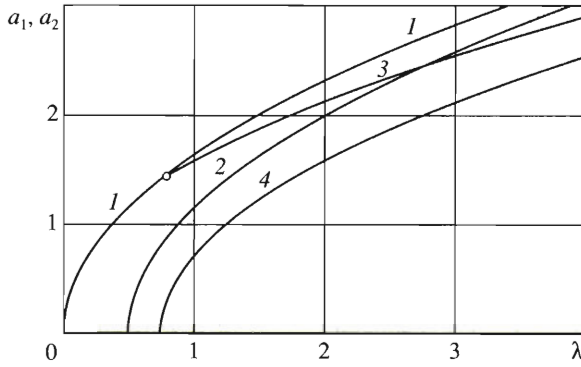
$$a_2 = \text{const}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\varepsilon\delta + \frac{3}{8}\varepsilon\gamma a_2^2 t + \alpha_{20}$$

Подставляя a_2 и α_2 в соотношения (2.4), получаем колебания стержня в плоскости xz

$$\varphi_2 = a_2 \cos((1 + \varepsilon\lambda)t + \alpha_{20}), \quad \varphi_1 \equiv 0 \quad (2.8)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon\delta + \frac{3}{8}\varepsilon\gamma a_2^2 \quad (2.9)$$



Фиг. 1

Зависимости (2.9) на фиг. 1 соответствует кривая 2 ($\gamma = 1, \delta = 1$).

Решения (2.6) и (2.8) соответствуют плоским колебаниям стержня в двух взаимно ортогональных плоскостях. Поскольку изгибные жесткости различны ($J_y \neq J_z$), собственные частоты различаются на величину $\delta/2$.

3) $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\pi/2$. В этом случае в системе (2.5) $S_1 = 0, S_2 = -1$, и ее решение имеет вид

$$a_k = \text{const}, \quad \alpha_k = (1 + \varepsilon\lambda)t + \alpha_{k0}, \quad k = 1, 2$$

Параметр λ определяется из системы уравнений

$$\lambda = \frac{1}{2}\delta(k-1) + \frac{3}{8}\gamma a_k^2 + \frac{1}{8}\gamma a_{3-k}^2, \quad k = 1, 2$$

решение которой дает амплитудно-частотную зависимость пространственных колебаний стержня, соответствующую движению точек средней линии по эллипсу в плоскости yz

$$a_1(\lambda) = (2(\lambda + \delta/4)/\gamma)^{1/2}, \quad a_2(\lambda) = (2(\lambda - 3\delta/4)/\gamma)^{1/2} \tag{2.10}$$

Действительным значениям a_2 соответствует область частот, превышающих $\lambda = 3\delta/4$, и для возникновения пространственных колебаний необходимо, чтобы амплитуда a_1 превышала критическое значение $a_* = (2\delta/\gamma)^{1/2}$.

На фиг. 1 зависимостям (2.10) соответствуют кривые 3 ($a_1(\lambda)$) и 4 ($a_2(\lambda)$). При $a_1 < a_*$ в рассматриваемой системе возможны только плоские колебания, при $a_1 > a_*$ наряду с плоскими существует пространственная форма движения стержня. Таким образом, в зависимости от начальных условий свободные колебания стержня это либо независимые между собой колебания во взаимно ортогональных плоскостях с двумя разными частотами, либо к ним добавляется еще и пространственная форма движения с третьей частотой колебаний. В общем случае в результирующем движении присутствуют три гармоники с близкими частотами. В случае $\delta = 0$ качественная картина колебаний соответствует решению, полученному для колебаний струны [1, 4], которое может быть представлено как сумма плоского и пространственного движений.

3. Вынужденные колебания. Пусть на стержень действуют внешние гармонические нагрузки во взаимно перпендикулярных направлениях с разностью фаз $\psi = \psi_2 - \psi_1$. Нормированные внешние воздействия, соответствующие первой моде $\varepsilon f_1 \cos[(1 + \varepsilon\lambda)t + \psi_1]$ – в плоскости xy и $\varepsilon f_2 \cos[(1 + \varepsilon\lambda)t + \psi_2]$ – в плоскости xz , полагаем малыми и ограничимся

рассмотрением колебаний в малой окрестности главного резонанса. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_k + \varepsilon\eta\dot{\varphi}_k + [1 + (k-1)\varepsilon\delta]\varphi_k + \varepsilon\gamma(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_k = \\ = \varepsilon f_k \cos((1 + \varepsilon\lambda)t + \psi_k), \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где η – безразмерный коэффициент диссипации.

Произведя в системе (3.1) замену переменных

$$\varphi_k = a_k \cos[(1 + \varepsilon\lambda)t + \alpha_k], \quad k = 1, 2$$

в первом приближении метода усреднения получим уравнения

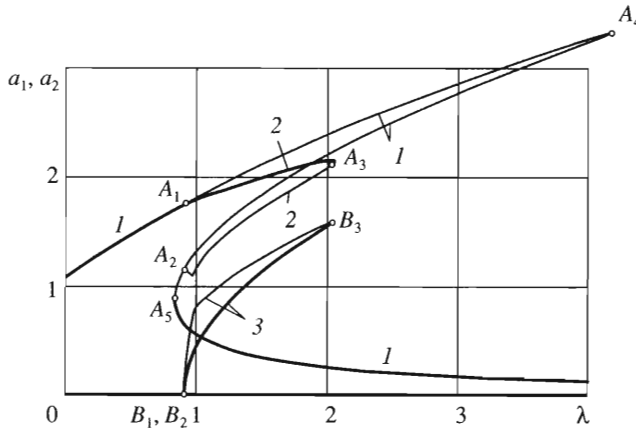
$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= -\frac{1}{2}\varepsilon f_k \sin(\alpha_k + \psi_k) + \frac{1}{8}\varepsilon\gamma a_1^k a_2^{3-k} S_1 - \frac{1}{2}\varepsilon\eta a_k \\ \dot{\alpha}_k &= \frac{1}{2}\varepsilon[\delta(k-1) - 2\lambda] - \frac{1}{2a_k}\varepsilon f_k \cos(\alpha_k - \psi_k) + \\ &+ \frac{3}{8}\varepsilon\gamma a_k^2 + \frac{1}{8}\varepsilon\gamma a_{3-k}^2(2 + S_2); \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Далее будем рассматривать установившиеся вынужденные колебания, что соответствует нулевым левым частям уравнений (3.2). Аналитическое решение системы (3.2) может быть получено только в отдельных частных случаях. Для численного решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений воспользуемся методом продолжения решения по параметру. Если при некотором значении λ^k известно приближенное решение системы уравнений $r = (a_1^k, a_2^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k)^T$, то для значения $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda^k$ приближенное решение представляется в виде $r^{k+1} = r^k + \Delta r^k$. Подставляя в систему (3.2) и линеаризуя полученные уравнения, определяем приращения неизвестных из системы

$$G^k \Delta r^k = p^k + R^k \quad (3.3)$$

где R^k – вектор невязки на предыдущем шаге решения, $p^k = (0, 0, \lambda^k, \lambda^k)^T$, элементы матрицы G имеют вид (далее индекс k опускаем)

$$\begin{aligned} g_{ii} &= \frac{(-1)^{i+1}}{8}\gamma a_{3-i}^2 S_1 - \frac{1}{2}\eta \\ g_{i, i+2} &= \frac{1}{4}\gamma a_1^i a_2^{3-i} S_2 - \frac{1}{2}f_i \cos(\alpha_i + \psi_i) \\ g_{i+2, i} &= \frac{1}{2a_i^2}f_i \cos(\alpha_i + \psi_i) + \frac{3}{4}\gamma a_i \\ g_{i+2, i+2} &= \frac{(-1)^i}{4}\gamma a_{3-i}^2 S_1 + \frac{1}{2a_i}f_i \sin(\alpha_i + \psi_i) \\ g_{i, 3-i} &= \frac{(-1)^{i+1}}{4}\gamma a_1 a_2 S_1, \quad g_{i, 5-i} = -\frac{1}{4}\gamma a_i a_{3-i}^2 S_2 \\ g_{i+2, 3-i} &= \frac{1}{4}\gamma a_{3-i}(2 + S_2), \quad g_{i+2, 5-i} = \frac{(-1)^{i+1}}{4}\gamma a_{3-i}^2 S_1; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.4)$$



Фиг. 2

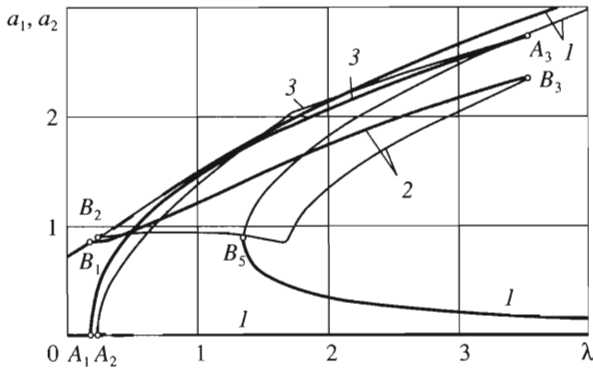
Таким образом, решение системы нелинейных уравнений (3.2) сводится к решению последовательности систем линейных уравнений (3.3). На каждом шаге вычислений контролируется величина невязки, и если относительная погрешность превышает заданную точность, то шаг варьируемой переменной уменьшается. В точках ветвления решений за независимый параметр принимается переменная, имеющая наибольшее по модулю приращение на предыдущем шаге, что позволяет найти все существующие решения и построить многозначные амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики.

Для исследования устойчивости полученных решений на основе второго метода Ляпунова рассмотрим некоторое возмущенное решение системы уравнений (3.2) $\hat{r}(t) = r(t) + \Delta r(t)$. После подстановки в систему (3.2) и линеаризации получаем уравнения возмущенного движения первого приближения $\Delta r = G\Delta r$, где матрица G совпадает с матрицей, входящей в уравнение (3.3). Согласно теоремам об устойчивости по первому приближению знак действительной части всех собственных значений матрицы G позволяет сделать вывод об устойчивости решения. Поскольку матрица несимметрична, для решения проблемы собственных значений использовался QR-алгоритм [11].

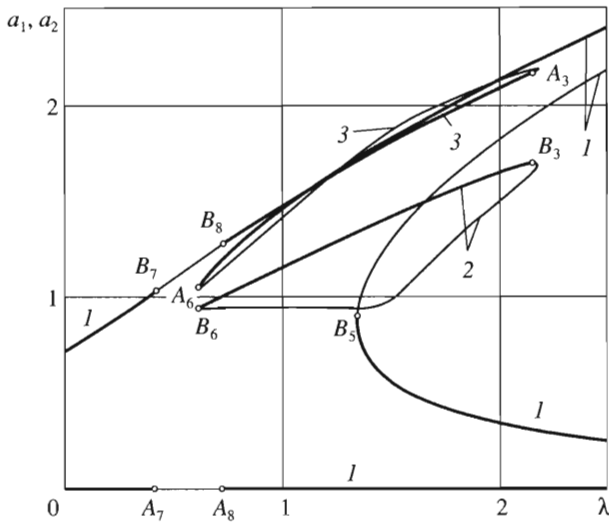
4. Результаты численного моделирования. Все вычисления проводились для значений параметров $\gamma = 1, \delta = 1$. На фиг. 2 представлены зависимости $a_1(\lambda)$ и $a_2(\lambda)$ при $f_1 = 1, f_2 = 10^{-6}, \eta = 0.3, \psi = 0$, что соответствует случаю возбуждения плоских колебаний, отвечающих меньшей изгибной жесткости. Значение f_2 принято отличным от нуля во избежание ошибки переполнения порядка в уравнениях (3.2) и (3.4) при делении на a_2 . Участки, соответствующие устойчивым решениям, показаны жирными линиями.

Кривой 1 представлена известная зависимость $a_1(\lambda)$, соответствующая плоским колебаниям ($a_2(\lambda) \equiv 0$). Ее построение начиналось с достаточно малой расстройки частот и нулевых начальных приближений для амплитуды a_2 и фазы α_2 . На кривой 1 существуют две точки ветвления: A_1 и A_2 , которым соответствуют точки B_1 и B_2 зависимости $a_2(\lambda)$ (на фиг. 2 точки B_1 и B_2 сливаются).

В случае, когда одна из двух точек, например (A_1, B_1) , принята в качестве начального приближения, построено решение $a_1(\lambda)$ – кривая 2 и $a_2(\lambda)$ – кривая 3, соответствующее пространственной форме движения осевой линии стержня. При увеличении частоты возбуждения плоские колебания плавно переходят в пространственные, при которых точки осевой линии стержня описывают эллипсы в плоскости, ортогональной оси x , и разность фаз $\alpha_1 - \alpha_2$ равна $\pi/2$. Дальнейшее увеличение частоты приводит к срыву в



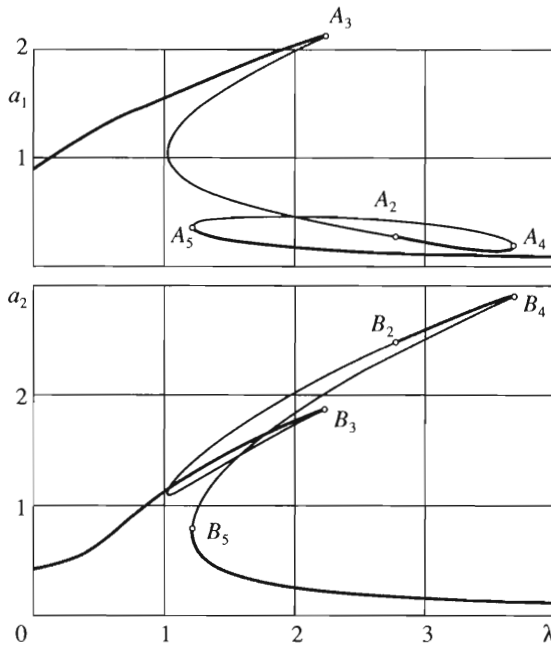
Фиг. 3



Фиг. 4

точке (A_3, B_3) на плоскую форму движения стержня. При уменьшении частоты возбуждения пространственная форма движения не реализуется. Решение, соответствующее плоской форме (кривая l), может быть получено из решения плоской задачи, при этом участок между точкой A_1 и максимумом амплитудно-частотной характеристики в точке A_4 будет соответствовать устойчивому решению.

Аналогичные результаты для случая возбуждения колебаний в плоскости, отвечающей большей изгибной жесткости, при $f_1 = 10^{-6}$, $f_2 = 1$, $\psi = 0$ приведены на фиг. 3 ($\eta = 0.18$) и фиг. 4 ($\eta = 0.22$). Кривой l соответствует зависимость $a_2(\lambda)$ плоской формы движения, кривым 2 и 3 – зависимости $a_2(\lambda)$ и $a_1(\lambda)$ пространственной формы. В отличие от предыдущего случая исследование устойчивости решения плоской задачи приводит к правильному результату всюду, за исключением небольшого участка в окрестности точек (A_1, B_1) и (A_2, B_2) . С увеличением частоты плоская форма движения при $\eta = 0.18$ плавно переходит в пространственную, в точке (A_3, B_3) происходит срыв на одну из устойчивых ветвей плоской формы l . В экспериментах обычно наблюдается срыв на верхнюю ветвь кривой l , и дальнейшие колебания происходят в плоскости действия нагрузки. Точка B_4 , соответствующая максимальной амплитуде плоской формы движе-



Фиг. 5

ния, на фиг. 3 и 4 не показана. В различных диапазонах частот возможно существование от одного до трех устойчивых решений – двух плоских движений и одного пространственного.

При увеличении параметра диссипации точки (A_1, B_1) и (A_2, B_2) сближаются и при $\eta > 0.191$ кривые 2 и 3 становятся замкнутыми, как на фиг. 4. В этом случае в точке (A_6, B_6) происходит жесткое возбуждение параметрических колебаний в плоскости xu . В узком диапазоне частотной расстройки между точками (A_7, B_7) и (A_6, B_6) не существует устойчивых стационарных решений системы (3.2).

Дальнейшее увеличение диссипации приводит к тому, что петли, образованные кривыми 2 и 3, уменьшаются и при $\eta > 0.252$ исчезают. При больших значениях η пространственных форм движения не существует.

На фиг. 5 представлены амплитудно-частотные характеристики $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ при $f_1 = f_2 = 0.707$, $\eta = 0.25$, $\psi = 0$, соответствующие случаю направления вектора нагрузки под углом $\pi/4$ к главным осям инерции сечения. Как следует из анализа фазочастотных характеристик в дорезонансном режиме происходят плоские колебания, причем $a_1 > a_2$, затем в точках перегиба кривых имеет место плавный переход на пространственную форму колебаний до точки (A_3, B_3) . В зарезонансном режиме правее точки (A_5, B_5) происходят плоские колебания и $a_1 < a_2$. Для данного случая нагружения характерно наличие устойчивого участка, ограниченного точками (A_2, B_2) и (A_4, B_4) , на котором наблюдается переход от пространственной к плоской форме движения, и колебания происходят практически в плоскости, отвечающей большей изгибной жесткости стержня. Данный участок изолирован от остальных устойчивых решений и реализуется только при наличии внешних возмущений.

Во всех рассмотренных случаях каждому решению $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ соответствуют две зависимости $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$. Для пространственной формы второе решение соответствует вращению сечения стержня в противоположном направлении, для плоской формы оно является неустойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 87–92.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Вынужденные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 17–24.
3. Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В. Влияние диссипации на пространственные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 19–28.
4. Муницын А.И. Нелинейные колебания нити с натяжным устройством // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 24–30.
5. Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания упругой нити с натяжным устройством // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2001. № 2. С. 21–28.
6. Kauderer H. Nichtlineare mechanik. Berlin, etc.: Springer, 1958 = Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
7. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 3. С. 33–68.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
9. Nayfeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. N.Y., etc.: Wiley, 1981 = Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
10. Ладыгина Е.В., Маневич А.И. Свободные колебания нелинейной кубической системы с двумя степенями свободы при близких собственных частотах // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 40–49.
11. Икрамов Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука, 1991. 240 с.

Иваново
e-mail: munitsyn@rambler.ru

Поступила в редакцию
18.XII.2003