

УДК 531.36 : 534.1; 62–50

© 2006 г. А. М. Формальский

## ПЕРЕВЕРНУТЫЙ МАЯТНИК НА НЕПОДВИЖНОМ И ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

Рассматриваются плоские движения управляемого однозвенного маятника с неподвижной точкой подвеса и маятника, точка подвеса которого находится в центре колеса, способного катиться без скольжения по ровной горизонтальной поверхности. Управляющий момент, прикладываемый к маятнику в точке подвеса, ограничен по абсолютной величине. Для одного и для другого маятника в линейном приближении построена область управляемости, из всех точек которой он может быть приведен в верхнее неустойчивое положение равновесия без колебаний около нижнего. Показано, что для маятника, смонтированного на колесе, область управляемости больше, благодаря чему его легче стабилизировать. Построены законы управления, при которых область притяжения совпадает с областью управляемости и является, тем самым, максимально возможной.

Задачам управления однозвенным маятником и стабилизации его в верхнем неустойчивом положении равновесия посвящено много исследований (см., например, [1 – 7]). Подобные задачи представляют не только теоретический интерес, но и прикладной; возможные приложения касаются, например, проблемы управления моноциклом [8, 9]<sup>1</sup>.

Ограничения, налагаемые на управляющий момент, прикладываемый к маятнику в точке подвеса, могут быть жесткими. В этом случае привести маятник в верхнее неустойчивое положение равновесия без колебаний около нижнего можно не из всех начальных состояний. Путем линеаризации уравнений движения маятника около верхнего неустойчивого положения равновесия можно построить (аналитически) множество состояний, из которых такое приведение возможно.

**1. Маятник с неподвижной точкой подвеса.** На фиг. 1 показан однозвенный маятник, к которому приложен внешний момент  $L$  в неподвижной точке подвеса  $O$ ;  $\beta$  – угол отклонения маятника от вертикали, отсчитываемый против часовой стрелки. Момент  $L$  считается положительным, если он направлен против часовой стрелки.

Уравнение движения такого маятника хорошо известно:

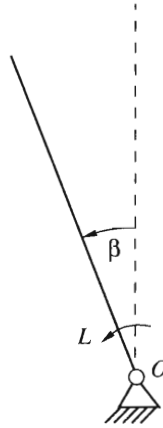
$$mr^2\ddot{\beta} - mgb\sin\beta = L \quad (1.1)$$

Здесь  $m$  – масса маятника,  $b$  – расстояние от точки подвеса  $O$  до центра масс маятника,  $r$  – радиус инерции маятника относительно точки подвеса  $O$ ,  $g$  – ускорение свободного падения. Силу трения в оси подвеса не учитываем.

Введя безразмерные время  $t$  и момент  $\mu$  в соответствии с формулами

$$t = T\tau \left( T^2 = \frac{r^2}{gb} \right), \quad \mu = \frac{L}{mgb} \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> См. также: [www.theriotwheel.com](http://www.theriotwheel.com), [www.jackiechabanas.com](http://www.jackiechabanas.com), [www.americanroadshop.com](http://www.americanroadshop.com), [www.dsself.dsl.pipex.com](http://www.dsself.dsl.pipex.com), [www.segway.com](http://www.segway.com)



Фиг. 1

перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\beta'' - \sin\beta = \mu \tag{1.3}$$

Штрих означает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ .

Будем считать, что момент  $L$ , развиваемый, например, при помощи электродвигателя, ограничен по абсолютной величине:

$$|L(t)| \leq L_0, \text{ где } L_0 = \text{const, или } |\mu| \leq \mu_0, \text{ где } \mu_0 = \frac{L_0}{mgb} \tag{1.4}$$

Кусочно-непрерывные функции  $\mu(t)$ , удовлетворяющие неравенству (1.4), будем называть допустимыми управлениями, а множество допустимых управлений обозначим через  $W$ .

Если постоянная  $L_0$  достаточно велика, т.е.  $L_0 > mgb$  ( $\mu_0 > 1$ ), то из любого начального состояния

$$\beta(0), \beta'(0) = 0 \tag{1.5}$$

при помощи управления  $\mu(t) \in W$  маятник можно привести в верхнее неустойчивое положение равновесия

$$\beta = 0, \beta' = 0 (\dot{\beta} = 0) \tag{1.6}$$

монотонно изменяя угол  $\beta$ . Не составляет труда построение обратной связи  $\mu(\beta, \beta')$ , которая обеспечивает стабилизацию (асимптотическую устойчивость) положения равновесия (1.6), т.е. приведение маятника в равновесие из начальных состояний, расположенных в некоторой его окрестности. Такая обратная связь может быть линейной с насыщением (см. ниже).

Предположим, что на момент  $L$  наложено “жесткое” ограничение, т.е.  $L_0 < mgb$  ( $\mu_0 < 1$ ), тогда не из всех состояний (1.5) маятник можно привести в равновесие (1.6) без колебаний вокруг нижнего положения равновесия

$$\beta = \pi, \beta' = 0 \tag{1.7}$$

Из ряда состояний его можно привести в равновесие (1.6) при помощи релейного управления только после некоторого количества колебаний (с нарастающей амплитудой) вокруг положения (1.7) [5, 6]. Из ряда других состояний его можно привести в равновесие (1.6) при однократном прохождении через положение  $\beta = \pi$ .

Рассмотрим задачу о стабилизации (об удержании) маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия, предполагая, что в начале процесса стабилизации он уже находится в некоторой достаточно малой окрестности этого желаемого положения. При этом исключим из рассмотрения круговые движения маятника, т.е. движения, при которых он проходит через положение  $\beta = \pi$ .

Линеаризуем уравнение (1.3) около состояния (1.6), предполагая, что в процессе движения маятник мало отклоняется от вертикали. Тогда вместо (1.3) получаем линейное уравнение

$$\beta'' - \beta = \mu \quad (1.8)$$

Отсутствие управления, т.е. при  $\mu = 0$  одно собственное значение уравнения (1.8) положительно, другое отрицательно.

Приведем уравнение (1.8) к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка в канонических переменных

$$y' = y + \mu; \quad y = \beta + \beta' \quad (1.9)$$

$$z' = -z - \mu; \quad z = \beta - \beta' \quad (1.10)$$

Дифференциальное уравнение (1.9) описывает поведение “неустойчивой” переменной  $y$ , отвечающей положительному собственному значению, а уравнение (1.10) – поведение “устойчивой” переменной  $z$ .

Множество начальных состояний, для каждого из которых существует такое управление  $\mu(t) \in W$ , что решение уравнения (1.8) (системы (1.9), (1.10)) с этим управлением приходит в равновесие (1.6), называется областью управляемости [10]. Эта область, которую обозначим через  $Q$ , описывается [10] неравенством

$$|y| < \mu_0 \quad (|\beta + \beta'| < \mu_0) \quad (1.11)$$

т.е. множество  $Q$  начальных состояний, из которых систему можно привести в равновесие (1.6), ограничено только по неустойчивой координате  $y$ . Неравенство (1.11) описывает на плоскости переменных  $\beta, \beta'$  полосу, границы которой – две параллельные, одинаково отстоящие от начала координат прямые. Эта полоса  $Q$  показана на фиг. 2.

Если начальная скорость  $\beta'(0) = 0$ , то ограничение начального угла, при котором возможно приведение маятника в состояние (1.6), имеет вид

$$|\beta(0)| < \mu_0 \quad (1.12)$$

Заметим, что при предельных управляющих воздействиях  $\mu(t) = \mp \mu_0$  состояния

$$\beta = \pm \mu_0, \quad \beta' = 0 \quad (1.13)$$

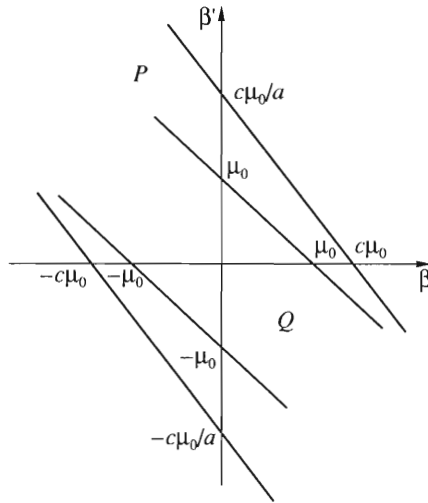
равновесны и они лежат на границе области управляемости. Равновесными для нелинейного уравнения (1.3) при  $\mu(t) = \mp \mu_0$  будут состояния

$$\beta = \pm \arcsin \mu_0, \quad \beta' = 0$$

Если начальный угол  $\beta(0) = 0$ , то ограничение начальной скорости, при которой возможно приведение маятника в состояние (1.6), имеет вид

$$|\beta'(0)| < \mu_0 \quad (1.14)$$

При начальных условиях  $\beta(0) = 0, \beta'(0) = \pm \mu_0$  и управлениях  $\mu(t) = \mp \mu_0$  решения уравнения (1.8) асимптотически стремятся к точкам (1.13). Соответствующие фазовые траектории – отрезки прямых, ограничивающих область управляемости (1.11).



Фиг. 2

Можно убедиться, что при линейной обратной связи

$$\mu = \gamma u = \gamma(\beta + \beta'), \quad \gamma < -1$$

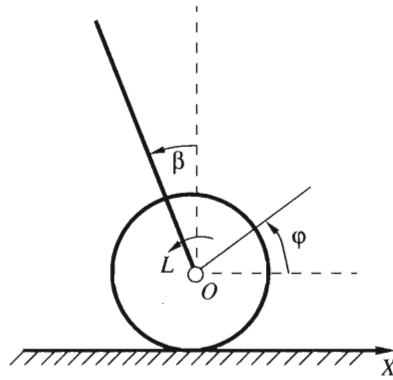
а значит, и при линейной обратной связи с насыщением

$$\mu = \begin{cases} -\mu_0 & \text{при } \gamma(\beta + \beta') \leq -\mu_0 \\ \gamma(\beta + \beta') & \text{при } |\gamma(\beta + \beta')| \leq \mu_0 \\ \mu_0 & \text{при } \gamma(\beta + \beta') \geq \mu_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

имеет место асимптотическая устойчивость решения (1.6) уравнения (1.8) (системы (1.9), (1.10)). Из известных результатов [4–6] следует, что при обратной связи (1.15) область притяжения желаемого положения равновесия (1.6) совпадает со всей областью управляемости  $Q$  (1.11), т.е. обратная связь (1.15) реализует максимально возможную область притяжения (в линейном приближении) и является в этом смысле оптимальной. Действительно, если  $y(0) \in Q$ , то при управлении (1.15) решение уравнения (1.9)  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $y(t) \rightarrow 0$ , то и определяемая выражением (1.15) функция  $\mu(t) \rightarrow 0$ . Но тогда при  $t \rightarrow \infty$  решение уравнения (1.10)  $z(t) \rightarrow 0$  при любом начальном значении  $z(0)$ .

Заметим, что путем “подавления” неустойчивости по одной канонической переменной решалась задача стабилизации магнитного подвеса в градиентометре [11].

**2. Маятник с подвижной точкой подвеса.** Рассмотрим теперь маятник, точка подвеса которого находится в центре  $O$  колеса (фиг. 3). Симметричное относительно своей оси  $O$  колесо может катиться без проскальзывания по ровной горизонтальной поверхности вдоль прямой линии. Массу колеса обозначим через  $M$ , радиус – через  $R$ , радиус инерции относительно центра  $O$  – через  $r$ . Обозначим через  $\varphi$  угол поворота против часовой стрелки какого-то фиксированного (отмеченного в колесе) радиуса, который в начале движения ориентирован вдоль горизонтальной оси  $X$ , через  $x$  обозначим перемещение центра масс  $O$  вдоль горизонтальной прямой, так что  $\dot{x} = -\dot{\varphi}R$ . Как и выше, пусть  $\beta$  – угол отклонения маятника от вертикали,  $m$  – его масса,  $b$  – расстояние от точки подвеса  $O$  до его центра масс,  $r$  – радиус инерции маятника



Фиг. 3

относительно точки подвеса  $O$ . Будем предполагать, что на оси колеса смонтирован электродвигатель, статор которого жестко скреплен с колесом, а ротор – с маятником. Пусть  $L$  – развиваемый этим двигателем момент, который стремится повернуть маятник против часовой стрелки. Одновременно этот двигатель стремится повернуть колесо по часовой стрелке. Таким образом,  $L$  – внутренний момент.

Кинетическая энергия описанной системы двух тел имеет вид

$$E = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{\varphi}^2 + 2a_{12}\cos\beta\dot{\varphi}\dot{\beta} + a_{22}\dot{\beta}^2) \quad (2.1)$$

где

$$a_{11} = M(R^2 + \rho^2) + mR^2, \quad a_{12} = mRb, \quad a_{22} = mr^2 \quad (2.2)$$

Все коэффициенты (2.2) положительны.

Потенциальная энергия и виртуальная работа имеют вид

$$\Pi = mgb\cos\beta, \quad \delta W = L(\delta\beta - \delta\varphi) \quad (2.3)$$

Используя метод Лагранжа второго рода, составим с помощью выражений (2.1), (2.3) уравнения движения системы

$$a_{11}\dot{\omega} + a_{12}\cos\beta\ddot{\beta} - a_{12}\sin\beta\dot{\beta}^2 = -L, \quad a_{12}\cos\beta\dot{\omega} + a_{22}\ddot{\beta} - mgb\sin\beta = L \quad (2.4)$$

Здесь  $\omega = \dot{\varphi}$  – угловая скорость колеса. Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. Однако угол поворота колеса  $\varphi$  – циклическая переменная, и для описания движения можно использовать систему уравнений (2.4), порядок которой равен трем. Интегрируя уравнение  $\dot{x} = -\omega R$ , можно найти изменение координаты  $x$  колеса. Заметим, что, суммируя уравнения (2.4), получим уравнение, описывающее изменение момента количества движения системы относительно точки контакта колеса с поверхностью.

Уравнения можно представить в виде

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\cos^2\beta)\ddot{\beta} + a_{12}\dot{\beta}^2\sin\beta\cos\beta - a_{11}mgb\sin\beta = (a_{11} + a_{12}\cos\beta)L \quad (2.5)$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\cos^2\beta)\dot{\omega} - a_{12}a_{22}\dot{\beta}^2\sin\beta + a_{12}mgb\sin\beta\cos\beta = -(a_{22} + a_{12}\cos\beta)L \quad (2.6)$$

Коэффициент при старших производных в уравнениях (2.5), (2.6) положителен при любом значении угла  $\beta$ , поскольку он представляет собой определитель положительно определенной матрицы кинетической энергии  $E$  системы (см. соотношения (2.1), (2.2)).

Если учесть силу сопротивления качению колеса, считая ее зависящей от скорости  $\dot{x}$ , то в уравнения (2.4) войдет не только угловое ускорение  $\dot{\omega}$ , но и угловая скорость  $\omega$ . Угловая скорость колеса также войдет в уравнения (2.4), если момент  $L$  развивается электроприводом и при этом учитывается противо-ЭДС в обмотке двигателя, которая пропорциональна разности  $\dot{\beta} - \omega$ . В этих случаях не удастся "вычлениить" уравнение вида (2.5), описывающее только колебания маятника.

Введя безразмерные время  $\tau$  и момент  $\mu$  по формулам (1.2), преобразуем уравнения (2.5), (2.6), к виду

$$(1 - d^2 \cos^2 \beta) \beta'' + d^2 \beta'^2 \sin \beta \cos \beta - \sin \beta = (1 + e^2 \cos \beta) \mu \quad (2.7)$$

$$(1 - d^2 \cos^2 \beta) \sigma' - e^2 \beta'^2 \sin \beta + e^2 \sin \beta \cos \beta = -e^2 \left( \frac{e^2}{d^2} + \cos \beta \right) \mu \quad (2.8)$$

Здесь

$$\sigma = \varphi', \quad d^2 = \frac{a_{12}^2}{a_{11} a_{12}} < 1, \quad e^2 = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

( $\sigma$  – безразмерная угловая скорость колеса). Неравенство  $d^2 < 1$  можно доказать непосредственно, его справедливость вытекает также из того, что определитель положительно определенной матрицы кинетической энергии, будучи положительным при всех значениях  $\beta$ , положителен и при  $\beta = 0$ . Заметим, что система (2.7), (2.8) содержит только два безразмерных параметра  $d$  и  $e$ .

Уравнение (2.7), описывающее колебания маятника, точка подвеса которого находится в центре колеса, содержит угол  $\beta$  со своими двумя первыми производными и не содержит угловую скорость  $\omega$  колеса. В то же время инерционные и геометрические характеристики колеса входят в это уравнение и влияют на поведение маятника при любом управлении  $\mu(t)$ . Если поведение маятника представляет интерес, а движение колеса интереса не представляет, то уравнение (2.7) можно исследовать независимо от уравнения (2.8). Уравнение (2.7) имеет более сложный вид, нежели известное уравнение (1.3), описывающее колебания маятника с неподвижной точкой подвеса.

При  $\mu = 0$  положение (1.6) – неустойчивое равновесное состояние не только уравнения (1.3), но и уравнения (2.7). Рассмотрим вопрос о стабилизации этого состояния равновесия маятника. Точнее говоря, построим соответствующую область управляемости для уравнения (2.7) (линеаризованного) и стабилизирующее управление, при котором область притяжения совпадает с областью управляемости и тем самым оказывается максимально возможной. Затем сравним эту область с областью управляемости (1.11), построенной выше для маятника с неподвижной точкой подвеса, что является одной из основных целей настоящей работы.

Уравнение (2.7), линеаризованное около состояния (1.6), имеет вид

$$a^2 \beta'' - \beta = c \mu; \quad a^2 = 1 - d^2, \quad c = 1 + e^2 > 1 \quad (2.9)$$

Если в дифференциальном уравнении (2.9) положить  $a = 1, c = 1$ , то оно примет вид (1.8). В отсутствие управления, т.е. при  $\mu = 0$  одно собственное значение уравнения (2.9) положительно ( $1/a$ ), другое отрицательно ( $-1/a$ ).

Приведем уравнение (2.9) второго порядка к системе двух уравнений первого порядка в канонических переменных

$$y' = \frac{y}{a} + \frac{c}{a}\mu; \quad y = \beta + a\beta' \quad (2.10)$$

$$z' = -\frac{z}{a} - \frac{c}{a}\mu; \quad z = \beta - a\beta' \quad (2.11)$$

Дифференциальное уравнение (2.10) описывает поведение “неустойчивой” переменной  $y$ , отвечающей положительному собственному значению  $1/a$ , а уравнение (2.11) – поведение “устойчивой” переменной  $z$ , отвечающей отрицательному собственному значению  $(-1/a)$ . При  $a = 1$ ,  $c = 1$  из (2.10), (2.11) получаются соотношения (1.9), (1.10) соответственно.

Обозначим через  $P$  множество начальных состояний, для каждого из которых существует такое управление  $\mu(t) \in W$ , что решение уравнения (2.9) (системы (2.10), (2.11)) с этим управлением приходит в равновесие (1.6). Эта область управляемости  $P$  описывается [10] неравенством (см. фиг. 2)

$$|y| < c\mu_0 \quad (|\beta + a\beta'| < c\mu_0) \quad (2.12)$$

Возвращаясь в (2.12) к исходным параметрам системы, получаем неравенство

$$\left| \beta + \sqrt{1 - \frac{m(Rb)^2}{r^2[M(R^2 + \rho^2) + mR^2]}} \beta' \right| < \left[ 1 + \frac{mRb}{M(R^2 + \rho^2) + mR^2} \right] \frac{L_0}{mgb} \quad (2.13)$$

Если начальная скорость  $\beta'(0) = 0$ , то ограничение начального угла, при котором возможно приведение маятника в состояние равновесия (1.6), имеет вид

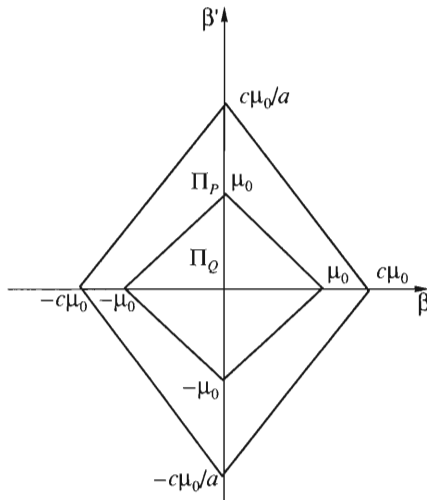
$$|\beta(0)| < c\mu_0 \quad (2.14)$$

Если начальный угол  $\beta(0) = 0$ , то ограничение начальной скорости, при которой возможно приведение маятника в равновесие (1.6), имеет вид

$$|\beta'(0)| < \frac{c}{a}\mu_0 \quad (2.15)$$

Теперь сравним области управляемости  $Q$  и  $P$ , построенные для маятника с неподвижной и подвижной точкой подвеса  $O$  соответственно.

Заметим, прежде всего, что полоса  $P$  (2.12) шире полосы  $Q$  (1.11), поскольку  $c > 1$  и  $a < 1$  (см. фиг. 2); тем самым, можно сказать, что она больше, хотя площади обеих областей бесконечны. Однако область  $Q$  не принадлежит целиком области  $P$ , поскольку прямые, ограничивающие область  $Q$ , наклонены к оси абсцисс под меньшим углом, нежели прямые, ограничивающие область  $P$ . Вместе с тем, не следует забывать, что области  $Q$  и  $P$  построены для линейных уравнений (1.8) и (2.9), а линеаризация допустима при достаточно близких к нулю значениях угла  $\beta$  и угловой скорости  $\beta'$ . Но при значениях  $\beta$  и (или)  $\beta'$ , достаточно близких к нулю, область  $Q$  принадлежит области  $P$ . Заметим также, что интервалы (1.12) и (1.14) лежат внутри интервалов (2.14) и (2.15) соответственно, поскольку  $c > 1$  и  $a < 1$ . Значит, квадрат  $\Pi_Q$ , вершины которого – концы интервалов (1.12) и (1.14), лежит целиком внутри параллелограмма  $\Pi_P$ , вершины которого – концы интервалов (2.14) и (2.15) (см. фиг. 2, 4). Таким образом, область управляемости маятника с неподвижной точкой подвеса в некотором смысле меньше области управляемости маятника с подвижной точкой подвеса; тем самым, маятник с точкой подвеса на колесе легче стабилизировать. Этого следовало ожидать, поскольку во втором случае момент  $L$  действует не



Фиг. 4

только непосредственно на маятник, но и придает точке подвеса  $O$  ускорение, которое способствует стабилизации маятника.

С ростом массы колеса  $M$  величина  $a$  строго монотонно возрастает и при  $M \rightarrow \infty$  стремится к единице, величина  $c$  с ростом массы  $M$  строго монотонно убывает и также стремится к единице при  $M \rightarrow \infty$ . Длины интервалов (2.14) и (2.15), а значит и размеры параллелограмма  $\Pi_p$ , с ростом массы  $M$  монотонно убывают; при  $M \rightarrow \infty$  эти интервалы стягиваются к интервалам (1.12) и (1.14) соответственно, а параллелограмм  $\Pi_p$  стягивается к квадрату  $\Pi_q$ . Таким образом, с ростом массы  $M$  область (2.13) уменьшается и при  $M \rightarrow \infty$  стремится к области (1.11). Объяснить это можно тем, что с ростом массы колесо становится менее подвижным, а значит, и точка подвеса маятника  $O$  становится менее подвижной.

Радиус инерции колеса  $\rho \leq R$ , поэтому с убыванием радиуса  $R$  величина  $c$  возрастает. Следовательно, диапазон (2.14) углов отклонения маятника от вертикали, допустимых с точки зрения его стабилизируемости, растет с уменьшением радиуса колеса. Это заключение, основанное на изучении линейной модели, ниже подтверждается при помощи нелинейной модели.

Пользуясь формулами (2.13)–(2.15), можно оценить влияние различных параметров системы на область управляемости.

Линейная обратная связь

$$\mu = \gamma u = \gamma(\beta + a\beta'), \quad \gamma < -1/c$$

а значит, и линейная обратная связь с насыщением

$$\mu = \begin{cases} -\mu_0 & \text{при } \gamma(\beta + a\beta') \leq -\mu_0 \\ \gamma(\beta + a\beta') & \text{при } |\gamma(\beta + a\beta')| \leq \mu_0 \\ \mu_0 & \text{при } \gamma(\beta + a\beta') \geq \mu_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость решения (1.6) уравнения (2.9) (системы (2.10), (2.11)). При обратной связи (2.16) область притяжения желаемого положения равновесия (1.6) совпадает [4–6] со всей областью управляемости  $P$  (2.12), т.е.

обратная связь (2.16) реализует максимальную область притяжения (в линейном приближении) и в этом смысле оптимальна. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению решение (1.6) нелинейной системы (2.7), (2.16) будет асимптотически устойчивым.

Отметим, что при предельных управляющих воздействиях  $\mu(t) = \mp \mu_0$  равновесными для нелинейного уравнения (2.7) будут состояния, удовлетворяющие условиям

$$\sin \beta = \pm(1 + e^2 \cos \beta) \mu_0, \quad \beta' = 0 \quad (2.17)$$

Каждое из нелинейных относительно угла  $\beta$  уравнений (2.17) имеет решение при достаточно малом значении величины  $\mu_0$ ; они различаются знаком и больше, по модулю, величины  $\beta = \arcsin \mu_0$ . (Напомним, что выражения  $\beta = \pm \arcsin \mu_0$  описывают углы отклонения от вертикали маятника с неподвижной точкой подвеса при предельных управляющих воздействиях  $\mu(t) = \mp \mu_0$ .)

Таким образом, маятник с точкой подвеса на колесе может удерживаться в равновесии при большем угле отклонения от вертикали, нежели маятник с неподвижной точкой подвеса. Дело в том, что момент, приложенный к отклоненному от вертикали маятнику, оказывает не только непосредственное влияние на него, стремясь вернуть его в вертикальное положение, но и придает движению колеса ускорение (см. уравнения (2.7), (2.8))

$$\sigma' = \mp \frac{e^4}{d^2} \mu_0$$

которое также способствует возвращению маятника в это положение.

Если  $R \rightarrow 0$ , то  $e \rightarrow \infty$ , при этом решения уравнений (2.17) стремятся к  $\pm \pi/2$ . Следовательно, с уменьшением радиуса колеса допустимое, с точки зрения стабилизируемости маятника, значение угла его отклонения от вертикали увеличивается; оно стремится к  $\pi/2$  при  $R \rightarrow 0$ .

Состояние

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0, \quad \sigma = 0 \quad (2.18)$$

является равновесным состоянием системы уравнений (2.7), (2.8) при  $\mu = 0$ . Уравнение (2.8), линеаризованное около решения (2.18), имеет вид

$$a^2 \sigma' + e^2 \beta = -e^2 \left( 1 + \frac{e^2}{d^2} \right) \mu \quad (2.19)$$

В отсутствие управления (при  $\mu = 0$ ) система уравнений (2.9), (2.19) третьего порядка имеет одно положительное собственное значение  $1/a$ , одно отрицательное ( $-1/a$ ) и одно нулевое. Область управляемости этой системы третьего порядка описывается тем же неравенством (2.12), что и область управляемости уравнения второго порядка (2.9). Неравенство (2.12) не содержит угловой скорости  $\sigma$ ; тем самым, возможность приведения системы (2.9), (2.19) в равновесие (2.18) не зависит от текущего значения скорости  $\sigma$ . Область управляемости (2.12) системы (2.9), (2.19) является в трехмерном фазовом пространстве  $\beta, \beta', \sigma$  множеством полной меры; следовательно, эта система вполне управляема в смысле Калмана [12].

При управлении (2.16) имеет место асимптотическая устойчивость состояния (1.6), но нет асимптотической устойчивости состояния (2.18). Вместе с тем, стабилизация состояния (2.18) возможна, поскольку система (2.9), (2.19) управляема в смысле Кал-

мана. Синтез обратной связи, стабилизирующей состояние (2.18), не вызывает трудностей. Построить ее можно, например, назначив собственные значения замкнутой системы. Такая обратная связь должна содержать информацию о текущем значении угловой скорости  $\sigma$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00105), в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (1835.2003.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability // Mem. and Proc. Manchester Literary and Phil. Soc. 1908. V. 52. № 8. Pt 2. P. 1–10.
2. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
3. Schaefer I.F., Cannon R.H. On the control of unstable mechanical systems // IFAC: 3rd Congr. London. 1966. Paper 601.
4. Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Панин Д.А., Формальский А.М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 5. С. 14–24.
5. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М. Маятник, управляемый при помощи маховика // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 6. С. 743–749.
6. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М. Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 1. С. 27–38.
7. Голубев Ю.Ф. Робот-эквилибрист на цилиндре // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 603–619.
8. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 569–583.
9. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 4. С. 165–173.
10. Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
11. Воронков В.С., Поздеев О.Д. Динамика системы стабилизации магнитного подвеса чувствительного элемента градиентомера // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 25–32.
12. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: Mc Graw-Hill, 1969 = Калман Р.Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.