УДК 531.36

© 2006 г. И. В. Горелышев, А. И. Нейштадт

ОБ АДИАБАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С УПРУГИМИ ОТРАЖЕНИЯМИ

На примере трех известных задач: шарик между медленно движущимися стенками, лучи в плавно нерегулярном волноводе с отражающими стенками, адиабатический поршень, дается обоснование применимости формальной схемы адиабатической теории возмущений для систем с упругими отражениями.

Адиабатическая теория возмущений (АТВ) (см., например [1], с. 260–286) используется для приближенного описания динамики гладких гамильтоновых систем, содержащих быстрые и медленные переменные. Имеются оценки точности приближений, доставляемых этой теорией. Формально процедуру АТВ можно использовать в ряде случаев и для систем с разрывным гамильтонианом, в частности для систем с упругими отражениями. Однако справедливость такого формального подхода не следует из имеющихся результатов о точности АТВ для гладких систем. Особенность рассматриваемых задач состоит в том, что при отражении медленные переменные меняются быстро (мгновенно).

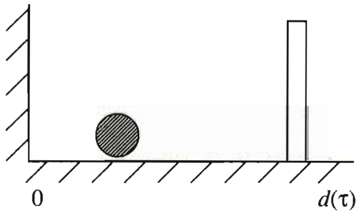
Ниже получены оценки точности АТВ для систем с упругими отражениями. Рассматриваются три модельные задачи, принадлежащие к трем основным типам систем, для которых используется АТВ с целью демонстрации эффективности подхода, основанного на АТВ; динамика этих задач известна и была описана ранее другими методами (см., в частности [2] для задачи об адиабатическом поршне).

Первое приближение процедуры АТВ приводит к выводу о наличии у системы адиабатического инварианта (приближенного интеграла). Этот вывод многократно использовался и для систем с отражениями, но его справедливость приходилось проверять непосредственными вычислениями (ср. [3], с. 236). Высшие приближения процедуры АТВ для систем с отражениями рассматривались формально ранее [4]. Теория возмущений для негладких гамильтоновых систем рассматривалась только в случае, когда фазовые переменные непрерывны [5, 6]. В системах с отражениями некоторые из фазовых переменных терпят разрыв при отражении.

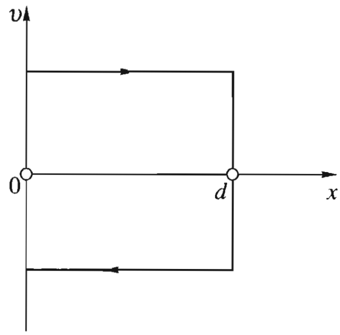
В системах с отражениями для достижения результатов, аналогичных получаемым для гладких систем с помощью высших приближений АТВ, обычно рассматривалось отображение последования Пуанкаре. Оно может оказаться гладким; тогда либо к нему применяется процедура теории возмущений для гладких отображений (см., например, [7]), либо используется искусственный прием, состоящий в том, что это отображение представляется как отображение последования для некоторой вспомогательной гладкой гамильтоновой системы, и процедура теории возмущений применяется уже к этой вспомогательной системе [8].

Преимущество излагаемого далее подхода состоит в том, что он позволяет работать непосредственно с гамильтонианом исходной системы, а не с соответствующим отображением последования (которое может оказаться и не гладким, как, например, в задаче об адиабатическом поршне, разд.3), позволяет рассматривать системы с отражениями единообразно с гладкими системами и приводит к более простым вычислениям.

1. Модель Ферми–Улама. Задачу о колебаниях частицы между параллельными упруго отражающими стенками называют задачей (или моделью) Ферми–Улама (фиг. 1) [9]. Будем полагать (для простоты изложения), что левая стенка покоится, а правая медленно меняет свое положение. Расстояние между стенками $d(\varepsilon t) \geq \mathrm{const} > 0$, где t – время, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Обозначим через τ медленное время, $\tau = \varepsilon t$. Функцию $d(\cdot)$



Фиг. 1



Фиг. 2

считаем бесконечно дифференцируемой. Движение будет рассматриваться на отрезке медленного времени, который либо не зависит от ε, либо растет с уменьшением ε. В последнем случае будем считать, что функция d и ее производные до любого предписанного порядка равномерно ограничены на всей вещественной оси. Массу частицы положим равной единице, тогда скорость частицы является ее импульсом. Динамика частицы определяется следующим образом: между соударениями со стенками частица имеет постоянную скорость υ, которая при ударе о покоящуюся (левую) стенку меняет знак, а при столкновении с движущейся (правой) стенкой преобразуется по закону $\upsilon_1 = 2\dot{d} - \upsilon$. Гамильтониан задачи определен везде, кроме стенок, и является гамильтонианом свободно движущейся частицы с импульсом υ.

Интуитивно эту задачу можно интерпретировать как задачу о движении в потенциальном поле, потенциал которого равен нулю между стенками и бесконечности в остальной области. Поскольку стенка движется медленно, целесообразно рассмотреть задачу при замороженном положении стенки (d = const). Фазовый портрет этой задачи показан на фиг. 2. Для него стандартным образом можно ввести переменные "действие – угол" (I, ϕ). Действие I – это площадь, ограниченная фазовой траекторией, деленная на 2π:

$$I = \frac{1}{2\pi}|\upsilon|2d = \frac{d}{\pi}\sqrt{2E}$$

где E – гамильтониан частицы, так что $E = \pi^2 I^2/(2d^2)$. Угол (фаза) ϕ – это равномерно меняющаяся со временем угловая переменная на траектории; $\phi = 2\pi t/T$, где t – время движения от начального положения частицы до данного, а T – период.

Если начало отсчета фазы выбрано на левой стенке, то

$$\phi = \begin{cases} \pi x/d, & \upsilon > 0 \\ \pi(2 - x/d), & \upsilon < 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

где x – расстояние частицы от левой стенки.

При стандартном определении фазы (1.1) производящая функция $W = W(x, I, d)$ для перехода от переменных (v, x) к переменным "действие–угол" имеет вид

$$W = \begin{cases} \pi I x/d, & \phi \in (0, \pi) \\ \pi I(2 - x/d), & \phi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \tag{1.2}$$

Сделаем замену переменных с производящей функцией W в задаче с движущейся стенкой. Движение между стенками будет описываться гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = E + \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\pi^2 I^2}{2d^2} - \frac{I\dot{d}}{d} f(\phi); \quad f(\phi) = \begin{cases} \phi, & \phi \in (0, \pi) \\ \phi - 2\pi, & \phi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \tag{1.3}$$

Гамильтониан (1.3) полностью описывает движение частицы между соударениями со стенками.

При соударении с неподвижной стенкой значение переменной "действие" не изменяется. При соударении с движущейся стенкой, как показывает непосредственное вычисление, изменение переменной "действие" описывается соотношением

$$I_+ - I_- = -2d\dot{d}/\pi \tag{1.4}$$

где I_- и I_+ – значения I до и после соударения.

Покажем, как описать соударение с помощью гамильтониана (1.3). Взаимодействие со стенкой происходит мгновенно. Поэтому представляется, что к правильному значению переменной действие после соударения с движущейся стенкой может приводить следующий способ: в гамильтониане (1.3) зафиксировать момент времени, в который происходит столкновение, получить таким образом интегрируемую гамильтонову систему с одной степенью свободы и, пользуясь законом сохранения энергии, вычислить требуемое значение.

Лемма 1. Предложенный способ определяет правильный закон изменения переменной "действие" при соударении с движущейся стенкой.

Доказательство. Зафиксируем момент соударения и приравняем значения энергии частицы до и после соударения:

$$\frac{\pi^2 I_-^2}{2d^2} - \frac{\pi I_- \dot{d}}{d} = \frac{\pi^2 I_+^2}{2d^2} + \frac{\pi I_+ \dot{d}}{d}$$

Получаем

$$\frac{\pi(I_+^2 - I_-^2)}{2d} = -\dot{d}(I_+ + I_-)$$

откуда сразу следует равенство (1.4).

Основное утверждение адиабатической теории возмущений (АТВ) применительно к рассматриваемой задаче выглядит следующим образом.

Теорема 1. Канонической заменой переменных

$$(I, \phi) \mapsto (\hat{I}, \hat{\phi})$$

с производящей функцией вида

$$W = \hat{I}\phi + \varepsilon S(\hat{I}, \phi, \tau, \varepsilon); \quad S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots + \varepsilon^{r-2} S_{r-1}, \quad S_i = S_i(\hat{I}, \phi, \tau) \tag{1.5}$$

где r – любое наперед заданное натуральное число, гамильтониан задачи (1.3) приводится к виду

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Sigma, r}(\hat{I}, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^r H_r(\hat{I}, \phi(\hat{I}, \hat{\phi}, \tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon); \quad \mathcal{H}_{\Sigma, r} = E + \varepsilon\mathcal{H}_1 + \ldots + \varepsilon^{r-1}\mathcal{H}_{r-1} \quad (1.6)$$

Функции S_i, $\mathcal{H}_i$, бесконечно дифференцируемы по $\hat{I}$, τ, функции S_i непрерывны по ϕ.

Доказательство. Будем пользоваться стандартной процедурой АТВ (см., например [1]). Сделаем в системе с гамильтонианом (1.3) каноническую замену переменных с производящей функцией W вида (1.5). Формулы для преобразования переменных даются выражениями

$$I = \hat{I} + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\phi}, \quad \hat{\phi} = \phi + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\hat{I}} \quad (1.7)$$

Новый гамильтониан дается формулой

$$\mathcal{H} = H(I, \phi, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^2\frac{\partial S(\hat{I}, \phi, \tau, \varepsilon)}{\partial\tau} \quad (1.8)$$

Подберем функции S_i так, чтобы новый гамильтониан имел вид (1.6). Подставляя в равенство (1.8) выражения (1.7) и приравнивая члены одинакового порядка по ε, получим систему уравнений для определения S_i, $\mathcal{H}_i$. Например, для членов первого порядка по ε получим

$$\mathcal{H}_1(\hat{I}, \tau) = \frac{\partial E}{\partial I}\frac{\partial S_1}{\partial\phi} - \frac{Id'}{d}f(\phi)$$

Штрих означает производную по τ. Усредняя обе части по ϕ, получаем, что $\mathcal{H}_1 = 0$. Теперь функция S_1 определяется квадратурой и оказывается непрерывной по ϕ. Можно выбрать функцию S_1 так, что ее среднее будет равным нулю. Аналогично определяются остальные S_i как функции, непрерывные по ϕ и бесконечно дифференцируемые по $\hat{I}$, τ. Отсюда вытекают и нужные свойства гладкости для $\mathcal{H}_i$, H_r.

Следствие 1.1. Значение переменной $\hat{I}$ сохраняется вдоль движения с точностью $O(\varepsilon^r)$ на интервале времени $O(\varepsilon^{-k})$ для любого наперед заданного натурального значения k. Значение переменной $\hat{\phi}$ определяется интегрируемой системой с гамильтонианом $\mathcal{H}_{\Sigma, r}$ с точностью $O(\varepsilon^{r-k})$ на том же интервале времени.

Доказательство. Рассмотрим замену переменных $(I, \phi) \mapsto (\tilde{I}, \tilde{\phi})$ с производящей функцией

$$\tilde{W} = \tilde{I}\phi + \varepsilon\tilde{S}(\tilde{I}, \phi, \tau, \varepsilon); \quad \tilde{S} = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots + \varepsilon^{r+k-2}S_{r+k-1}$$

Из теоремы 1 следует, что гамильтониан в новых переменных принимает вид

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{\Sigma, r+k}(\tilde{I}, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^{r+k}H_{r+k}(\tilde{I}, \phi, \tau, \varepsilon) \quad (1.9)$$

Из формул замены переменных следует, что $\hat{I} - \tilde{I} = O(\varepsilon^r)$. Поэтому ниже будем интересоваться изменением значений переменных $\tilde{I}$ и $\hat{\phi}$. Изменение значения $\tilde{I}$ между соударениями частицы со стенками величина $O(\varepsilon^r)$. Рассмотрим закон изменения значения $\tilde{I}$ в момент соударения частицы с движущейся стенкой. В лемме 1 определено правило для вычисления значения I после соударения частицы со стенкой. Чтобы, пользуясь этим правилом, вычислить изменение значения $\tilde{I}$, подставим выражение $I = I(\tilde{I}, \phi, \tau, \varepsilon)$ в гамильтониан H (1.3) и учтем, что $H = \mathcal{H} - \varepsilon^2\partial\tilde{S}/\partial\tau$. Таким образом, имеет место соотношение

$$\mathcal{H}_{\Sigma, r+k}(\tilde{I}_+, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^{r+k}H_{r+k}(\tilde{I}_+, \pi + 0, \tau, \varepsilon) - \varepsilon^2\partial\tilde{S}(\tilde{I}_+, \pi, \tau, \varepsilon)/\partial\tau =$$
$$= \mathcal{H}_{\Sigma, r+k}(\tilde{I}_-, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^{r+k}H_{r+k}(\tilde{I}_-, \pi - 0, \tau, \varepsilon) - \varepsilon^2\partial\tilde{S}(\tilde{I}_-, \pi, \tau, \varepsilon)/\partial\tau$$

$\tilde{I}_-$ и $\tilde{I}_+$ – значения $\tilde{I}$ до и после отражения; учтено, что функция $\tilde{S}$ непрерывна по ϕ. Отсюда получаем

$$(\partial E(\tilde{I}_-, \tau)/\partial\tilde{I} + O(\varepsilon^2))(\tilde{I}_+ - \tilde{I}_-) = O(\varepsilon^{r+k})$$

так что $\tilde{I}_+ - \tilde{I}_- = O(\varepsilon^{r+k})$.

Число соударений частицы со стенками на данном интервале времени оценивается величиной $O(\varepsilon^k)$. Поэтому из-за соударений величина $\tilde{I}$ может измениться лишь на $O(\varepsilon^r)$. Часть утверждения, которая касается значения переменной $\tilde{I}$, доказана.

Рассмотрим изменение переменной $\hat{\phi}$. На каждом интервале времени между последовательными соударениями частицы с движущейся стенкой отклонение значения переменной $\hat{\phi}$ от решения уравнения

$$\dot{\hat{\phi}} = \partial\mathcal{H}_{\Sigma, r}/\partial\hat{I}, \quad \hat{I} = \mathrm{const}$$

составляет $O(\varepsilon^r)$. При соударении с движущейся стенкой значение переменной $\hat{\phi}$ испытывает скачок, который определяется изменением значения переменной $\hat{I}$ из формул замены переменных (1.7). Поскольку S_m непрерывные функции ϕ, изменение значения $\hat{\phi}$ при соударении с движущейся стенкой величина $O(\varepsilon^{r+1})$, что завершает доказательство.

Следствие 1.2. Значение переменной I сохраняется с точностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени $O(\varepsilon^{-k})$ для любого наперед заданного натурального k.

Следствие 1.3. Поведение переменных I, ϕ на интервале $O(\varepsilon^{-k})$ определяется формулами замены переменных (1.5) вместе с приближенными формулами

$$\hat{I} = \mathrm{const}, \quad \dot{\hat{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{H}_{\Sigma, r}}{\partial\hat{I}}$$

с точностью $O(\varepsilon^r)$ для переменной I и $O(\varepsilon^{r-k})$ для переменной ϕ.

Замечание 1. Лемма 1, теорема 1 и ее следствия 1.1–1.3 без изменения формулировок переносятся на случай, когда между стенками имеется силовое поле с бесконечно дифференцируемым потенциалом $U(x, \tau)$ и движение частицы в адиабатическом приближении таково, что столкновение со стенками происходит со скоростью, отделенной от нуля положительной постоянной.

Замечание 2. Канонической заменой переменных

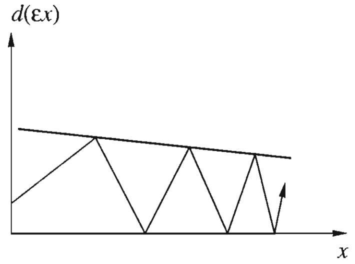
$$I, \phi \mapsto \hat{I}, \phi; \quad I = \hat{I} + \frac{dd'}{\pi^2}f(\phi)$$

задача Ферми–Улама сводится к исследованию гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\pi^2\hat{I}^2}{2d^2} + \frac{d\ddot{d}}{2\pi^2}f^2(\phi) \tag{1.10}$$

Функция $f^2(\phi)$ непрерывна по ϕ. При наличии между стенками силового поля свести систему к системе с непрерывным гамильтонианом не удается.

Замечание 3. Результат леммы 1, в том числе и при наличии силового поля между стенками, можно вывести из аксиомы упругого удара, как указал авторам Е.И. Кугушев, и из вариационного принципа, как указал С.В. Болотин.



Фиг. 3

Замечание 4. При исследовании динамики систем с упругими отражениями систематически использовался [10] следующий подход. Система с отражениями заменяется гладкой системой с большим отталкивающим потенциалом, действующим в тонком слое (толщина слоя $\delta \ll 1$, градиент потенциала $\sim 1/\delta$). Свойства системы с отражениями выводятся из свойств гладкой системы переходом к пределу при $\delta \to 0$. Следуя этому подходу, можно было бы ввести такой потенциал в задаче Ферми–Улама (и в задачах, рассматриваемых ниже, в разд. 2, 3), провести процедуру теории возмущений для гладкой системы и выводить оценки точности этой процедуры для системы с отражениями из соответствующих оценок для гладкой системы. Но при этом пришлось бы рассматривать вопрос о равномерности оценок по δ. Использованный выше подход позволяет обойти этот вопрос.

2. Луч света в плоском волноводе. В данном разделе рассматривается вопрос о траектории луча света в плоском волноводе с отражающими стенками. Волновод предполагается плавно нерегулярным [11] (т.е. его ширина изменяется вдоль трассы луча медленно).

Для простоты изложения будем считать, что нижняя стенка волновода совпадает с осью x. Положение верхней стенки в плоскости Oxy задается формулой $y = d(X)$, где $X = \varepsilon x$, ε – малый параметр (фиг. 3). Функцию $d(\cdot)$ считаем бесконечно дифференцируемой. Движение будет рассматриваться на интервале времени $O(\varepsilon^{-k})$, где k – наперед заданное натуральное число. Будем считать, что функция d, ее производные до любого предписанного порядка и функция $1/d$ равномерно ограничены на всей вещественной оси.

Распространение лучей в среде описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = p_x^2 + p_y^2 - n^2(x, y) \tag{2.1}$$

причем надо рассматривать только уровень энергии $H = 0$ [11]. Здесь $p_{x,y}$ – переменные, канонически сопряженные координатам x, y, а $n(x, y)$ – показатель преломления среды. В рассматриваемом случае внутри волновода $n = 1$, а на зеркальных стенках гамильтонова система не определена и можно пользоваться только законами сохранения.

В невозмущенной системе $X = \mathrm{const}$ проекция фазовой траектории на плоскость p_y, y имеет тот же вид, что и фазовая траектория частицы на фиг. 2. Аналогично сказанному в предыдущем разделе, вместо переменных (p_y, y) можно ввести переменные "действие–угол" (I, ϕ): $I = |p_y|d(X)/\pi$; если начало отсчета фазы выбрано на нижней стенке, то

$$\phi = \begin{cases} \pi y/d(X), & p_y > 0 \\ \pi(2 - y/d(X)), & p_y < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

При стандартном определении фазы (2.2) производящая функция для перехода от переменных (p_y, y) к переменным "действие–угол" имеет вид

$$W(I, y, X) = \begin{cases} \pi I y/d, & \phi \in (0, \pi) \\ \pi I(2 - y/d), & \phi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \tag{2.3}$$

Сделаем в полной (возмущенной) системе каноническую замену переменных

$$(p_x, x, p_y, y) \mapsto (\hat{p}_x, x, I, \phi)$$

с производящей функцией

$$S = \hat{p}_x x + W(I, y, \varepsilon x)$$

Гамильтониан в новых переменных примет вид

$$H = \frac{\pi^2 I^2}{d^2} + \left(\hat{p}_x - \varepsilon \frac{Id'}{d} f(\phi)\right)^2 - 1 \tag{2.4}$$

Функция $f(\phi)$ дается последней формулой (1.3), штрих означает дифференцирование по X.

При отражении от нижней стенки значение переменной "действие" не изменяется. При отражении от верхней стенки, как показывает непосредственное вычисление, изменение переменной "действие" описывается соотношением

$$I_1 = I - \frac{2\varepsilon d'}{1 + \varepsilon^2 d'^2}\left(\varepsilon d' I + \frac{dp_x}{\pi}\right) \tag{2.5}$$

Замечание 5. Величина $\hat{p}_x$ при отражении не изменяется. Формула (2.5) описывает закон преобразования угла, под которым луч падает на нижнюю стенку волновода. Данный угол после преломления луча на верхней стенке преобразуется по закону

$$\alpha_1 = \alpha - 2\,\mathrm{arctg}(\varepsilon d')$$

откуда и следует соотношение (2.5).

Лемма 2. Если в гамильтониане (2.4) зафиксировать переменные ($\hat{p}_x$, x) и рассмотреть полученную систему с одной степенью свободы, то условие сохранения значения гамильтониана при переходе через точку $\phi = \pi$ определяет правильное изменение переменной "действие" I при отражении луча от верхней стенки волновода.

Доказательство. Приравняем значения гамильтониана (2.4) до и после преломления луча на верхней стенке. После преобразований получаем

$$\frac{\pi^2 I^2}{d^2}(1 + \varepsilon^2 d'^2) - 2\varepsilon \hat{p}_x \frac{Id'}{d}\pi = \frac{\pi^2 I_1^2}{d^2}(1 + \varepsilon^2 d'^2) + 2\varepsilon \hat{p}_x \frac{I_1 d'}{d}\pi$$

Поскольку значение переменной "действие" – положительная величина, находим

$$I_1 = I - \frac{2\varepsilon d'}{1 + \varepsilon^2 d'^2}\frac{\hat{p}_x d}{\pi}$$

Подставив сюда выражение для импульса

$$p_x = \hat{p}_x - \varepsilon\pi I d'/d$$

получим выражение (2.5).

Сформулируем основное утверждение АТВ применительно к рассматриваемой задаче.

Теорема 2. Канонической заменой переменных

$$(I, \phi, \hat{p}_x, x) \mapsto (\tilde{I}, \tilde{\phi}, \tilde{p}_x, \tilde{x}) \tag{2.6}$$

с производящей функцией вида

$$W = \tilde{I}\phi + \tilde{p}_x x + \varepsilon S(\tilde{I}, \phi, \tilde{p}_x, \varepsilon x; \varepsilon); \quad S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots + \varepsilon^{r-2} S_{r-1} \tag{2.7}$$

где r – любое наперед заданное натуральное число, гамильтониан (2.4) приводится к виду

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{H}_{\Sigma,r}(\tilde{I}, \tilde{p}_x, \varepsilon\tilde{x}, \varepsilon) + \varepsilon^r H_r(\tilde{I}, \phi, \tilde{p}_x, \varepsilon x, \varepsilon) \\ \mathcal{H}_{\Sigma,r} &= \pi^2\tilde{I}^2/d^2 + \tilde{p}_x^2 - 1 + \varepsilon\mathcal{H}_1 + \ldots + \varepsilon^{r-1}\mathcal{H}_{r-1} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Функции S_i, $\mathcal{H}_i$ бесконечно дифференцируемы по $\tilde{I}$, $\tilde{p}_x$, $\varepsilon\tilde{x}$; функции S_i непрерывны по ϕ.

Доказательство. Сделаем каноническую замену переменных (2.6) с производящей функцией (2.7). Выпишем формулы преобразования переменных

$$I = \tilde{I} + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\phi}, \quad \tilde{\phi} = \phi + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial I}, \quad \hat{p}_x = \tilde{p}_x + \varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial\varepsilon x}, \quad \varepsilon\tilde{x} = \varepsilon x + \varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial\tilde{p}_x} \tag{2.9}$$

Действуя стандартным в АТВ образом, определим непрерывные и периодические по ϕ функции S_m так, чтобы исключить зависимость гамильтониана от ϕ из членов $O(\varepsilon^m)$. Процедура выглядит так: подставим формулы для преобразования действия и продольных переменных ($\hat{p}_x$, x) из формул (2.9) в гамильтониан (2.4) и потребуем, чтобы в новых переменных гамильтониан приобрел вид (2.8). Функции S_m будут определяться рекуррентно. Например, для S_1 имеем уравнение

$$\frac{\partial S_1}{\partial\phi} = \frac{\tilde{p}_x d(X)d'}{\pi^2}f(\phi)$$

Функции S_m можно, например, выбрать так, чтобы они имели нулевое среднее по ϕ. В итоге гамильтониан преобразуется к необходимому виду. Функции S_i, $\mathcal{H}_i$, очевидно, обладают всеми свойствами, перечисленными в условии теоремы.

Рассмотрим решения гамильтоновых систем с гамильтонианами (2.8) и $\mathcal{H}_{\Sigma,r}(J, p, \varepsilon x, \varepsilon)$ с начальными условиями

$$\tilde{I}(0) = J(0), \quad \tilde{\phi}(0) = \psi(0), \quad \tilde{p}_x(0) = p(0), \quad \tilde{x}(0) = x(0)$$

где ψ – переменная, сопряженная переменной J.

Следствие 2.1. Значение переменной $\tilde{I}$ сохраняется с точностью $O(\varepsilon^r)$ на интервале времени ε^{-k} для любого наперед заданного натурального значения k. Проекция траектории луча на плоскость $\tilde{p}_x$, $\varepsilon\tilde{x}$ для такого интервала времени лежит в $O(\varepsilon^r)$ – окрестности кривой $\mathcal{H}_{\Sigma,r}(J, p, \varepsilon x, \varepsilon) = 0$. Поведение переменных $\varepsilon\tilde{x}$, $\tilde{p}_x$, $\tilde{\phi}$ описывается решением системы с гамильтонианом $\mathcal{H}_{\Sigma,r}$ с точностями $O(\varepsilon^{r-k+1})$, $O(\varepsilon^{r-k+1})$ и $O(\varepsilon^{r-k})$ соответственно (при некоторых естественных дополнительных условиях, указанных ниже).

Доказательство. Подобно подходу, описанному в предыдущем разделе, рассмотрим вспомогательную замену исходных переменных с производящей функцией

$$W = \bar{I}\phi + \bar{p}_x x + \varepsilon S_1(\bar{I}, \phi, \bar{p}_x, \varepsilon x) + \ldots + \varepsilon^{r+k-1}S_{r+k-1}(\bar{I}, \phi, \bar{p}_x, \varepsilon x)$$

Гамильтониан (2.4) при этом, согласно теореме 2, приводится к виду

$$H = \mathcal{H}_{\Sigma,r+k}(\bar{I}, \bar{p}_x, \varepsilon\bar{x}, \varepsilon) + \varepsilon^{r+k}H_{r+k}(\bar{I}, \phi, \bar{p}_x, \varepsilon x, \varepsilon) \tag{2.10}$$

где ϕ и x рассматриваются как функции новых переменных ($\bar{I}$, $\bar{\phi}$, $\bar{p}_x$, $\bar{x}$). Из формул замены переменных следует, что

$$\tilde{I} - \bar{I} = O(\varepsilon^r), \quad \tilde{\phi} - \bar{\phi} = O(\varepsilon^r), \quad \tilde{x} - \bar{x} = O(\varepsilon^r), \quad \tilde{p}_x - \bar{p}_x = O(\varepsilon^{r+1})$$

Поэтому достаточно рассмотреть поведение переменных $\bar{I}$, $\bar{\phi}$, $\bar{p}_x$, $\bar{x}$.

Рассмотрим вопрос о точности сохранения значения переменной $\bar{I}$. На каждом интервале времени между последовательными отражениями луча от верхней стенки волновода изменение переменной $\bar{I}$ определяется уравнением Гамильтона

$$\dot{\bar{I}} = -\varepsilon^{r+k}\partial H_{r+k}/\partial\bar{\phi}$$

что при суммировании по всем таким интервалам дает $O(\varepsilon^r)$.

Из выражения (2.10) следует, что значения переменных $(\bar{p}_x, \bar{x})$ терпят разрыв при отражении луча от верхней стенки. Однако производящая функция замены переменных является непрерывной функцией переменной ϕ. Поэтому из формул замены переменных следует, что

$$\Delta\bar{p}_x = O(\varepsilon^2\Delta\bar{I}), \quad \Delta\varepsilon\bar{x} = O(\varepsilon^2\Delta\bar{I})$$

где $\Delta\bar{I}$, $\Delta\bar{p}_x$, $\Delta\varepsilon\bar{x}$ – величины изменений переменных $\bar{I}$, $\bar{p}_x$, $\varepsilon\bar{x}$ соответственно при отражении луча от верхней стенки волновода.

Теперь на основании леммы 2 можно заключить, что изменение значения переменной $\bar{I}$ при отражении луча от верхней стенки волновода равно $O(\varepsilon^{r+k})$. Число отражений луча от верхней стенки на интервале времени порядка ε^{-k} есть $O(\varepsilon^{-k})$, поэтому полное изменение значения переменной $\bar{I}$ – величина $O(\varepsilon^r)$, и часть утверждения, касающаяся переменной $\bar{I}$, доказана.

Проекция траектории луча на плоскость $\tilde{p}_x$, $\varepsilon\tilde{x}$ лежит в $O(\varepsilon^r)$-окрестности кривой

$$\mathcal{H}_{\Sigma,r}(J, p, \varepsilon x, \varepsilon) = 0$$

поскольку вдоль траектории луча $\mathcal{H}_{\Sigma,r}(J, \tilde{p}_x, \varepsilon\tilde{x}, \varepsilon) = O(\varepsilon^r)$.

Значения переменных p, x, ψ изменяются непрерывно, а значения переменных $\bar{p}_x$, $\bar{x}$, $\bar{\phi}$ испытывают скачок при отражении луча от верхней стенки волновода. Как отмечалось выше, скачок значений переменных $\bar{p}_x$, $\bar{x}$, $\bar{\phi}$ вычисляется через изменение значения $\bar{I}$ при отражении луча от верхней стенки как

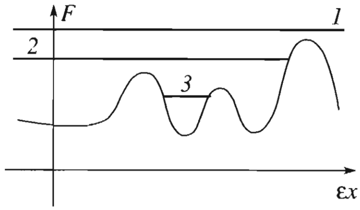
$$\Delta\bar{p} = O(\varepsilon^2\Delta\bar{I}) = O(\varepsilon^{r+k+2}), \quad \Delta\bar{x} = O(\varepsilon\Delta\bar{I}) = O(\varepsilon^{r+k+1}), \quad \Delta\bar{\phi} = O(\varepsilon\Delta\bar{I}) = O(\varepsilon^{r+k+1})$$

Таким образом, полное изменение значений переменных $(\bar{p}_x, \bar{x}, \bar{\phi})$ за счет отражений составляет $O(\varepsilon^{r+2})$ для переменной $\bar{p}_x$ и $O(\varepsilon^{r+1})$ для переменных $\bar{x}$ и $\bar{\phi}$. Таковы же изменения переменных $\tilde{p}_x$, $\tilde{x}$, $\tilde{\phi}$ за счет отражений.

Рассмотрим нулевое приближение гамильтониана $\mathcal{H}_{\Sigma,r}$:

$$\mathcal{H}^0_{\Sigma,r} \overset{\text{def}}{=} F = \frac{\pi^2 I^2}{d^2(\varepsilon x)} + p^2$$

Гамильтонова система с гамильтонианом $\mathcal{H}^0_{\Sigma,r}/2$ описывает движение частицы в силовом поле с потенциалом $U = \pi^2 I^2/[2d^2(\varepsilon x)]$. Будем считать (см. фиг. 4), что для рассматриваемого луча уровень функции F лежит либо 1) выше всех локальных максимумов $2U$, либо 2) возможно единственное отражение луча от потенциального горба, либо 3) движение происходит между потенциальными горбами (резонатор).



Фиг. 4

Рассмотрим случай 1, когда распространение луча имеет заданное направление. Переменные $\tilde{x}$ и x при этом изменяются со временем монотонно. Можно выразить переменные $\tilde{p}_x$ и $\tilde{p}$ как функции переменных $\varepsilon\tilde{x}$ и εx соответственно. При $x = \tilde{x}$ значения переменных $\tilde{p}_x$ и p различаются на величину $O(\varepsilon^r)$. Различие времен достижения заданного значения x_* переменными $\tilde{x}$ и x оценивается по формуле

$$\int_{x(0)}^{x_*}\left(\frac{1}{\dot{\tilde{x}}} - \frac{1}{\dot{x}}\right)dx = O(\varepsilon^{r-k})$$

Следовательно, для заданного момента времени t имеем

$$\varepsilon\tilde{x}(t) - \varepsilon x(t) = O(\varepsilon^{r-k+1}), \quad \tilde{p}_x(t) - p(t) = O(\varepsilon^{r-k+1})$$

Разность $\tilde{\phi} - \psi$ при $x = \tilde{x} = x_*$ равна

$$\tilde{\phi} - \psi = \int_{x(0)}^{x_*}\left(\frac{\omega(\tilde{I}, \tilde{p}_x, \varepsilon x, \varepsilon)}{\dot{\tilde{x}}} - \frac{\omega(J, p, \varepsilon x, \varepsilon)}{\dot{x}}\right)dx + O(\varepsilon^{r-k}) = O(\varepsilon^{r-k}); \quad \omega = \frac{\partial \mathcal{H}_{\Sigma, r}}{\partial I} \qquad (2.11)$$

Следовательно, для заданного момента времени t имеем

$$\tilde{\phi}(t) - \psi(t) = O(\varepsilon^{r-k})$$

В случае 2, когда возможно единственное изменение направления распространения луча, в качестве монотонно изменяющихся переменных можно в разных областях использовать x и p. В случае 3, когда волновод имеет конфигурацию резонатора, в качестве монотонно изменяющейся переменной можно использовать переменную “угол” на фазовом портрете системы с гамильтонианом $\mathcal{H}_{\Sigma, r}(I, p, x)$. В остальном оценки такие же, как для случая 1.

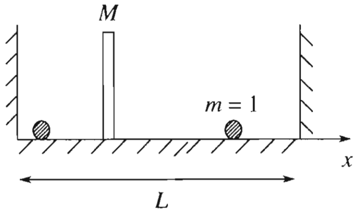
Следствие 2.2. Значение переменной I сохраняется с точностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени $O(\varepsilon^{-r})$ для любого наперед заданного натурального значения k.

Следствие 2.3. Поведение переменных I, ϕ, $\hat{p}_x$, x определяется из замены переменных (2.6) вместе с приближенными формулами, задающими движение в системе с гамильтонианом $\mathcal{H}_{\Sigma, r}(\tilde{I}, \tilde{p}_x, \varepsilon\tilde{x})$, с точностью, с которой поведение переменных $\tilde{I}$, $\tilde{\phi}$, $\tilde{p}_x$, $\tilde{x}$ описывается этими приближенными формулами согласно следствию 2.1.

Замечание 6. На интервале времени $O(\varepsilon^{-1})$ траектория луча с точностью $O(\varepsilon)$ определяется гамильтоновой системой с одной степенью свободы с гамильтонианом

$$H = \pi^2 I^2/d^2 + \hat{p}_x^2 - 1 \qquad (2.12)$$

на уровне энергии $H = 0$.



Фиг. 5

Замечание 7. Лемма 2, теорема 2 и ее следствия 2.1–2.3 без изменения формулировок переносятся на случай, когда между стенками имеется среда с бесконечно дифференцируемым показателем преломления $n(\varepsilon x, y)$, отличным от единицы, и распространение луча в адиабатическом приближении таково, что при отражении от стенок угол между лучом и стенкой отделен от нуля положительной постоянной.

Замечание 8. Результат леммы 2, включая случай наличия среды, может быть выведен из вариационного принципа, как указал С.В. Болотин.

3. Динамика массивного поршня, окруженного газом легких частиц. Задача об адиабатическом поршне – важная модельная задача статистической механики, рассматриваемая в связи с попытками вывести законы термодинамики из законов механики (см., например, [2, 12]). В этой задаче исследуется система, состоящая из массивного цилиндрического поршня и окружающего его газа одинаковых легких (в том смысле, что суммарная масса частиц мала по сравнению с массой поршня) частиц, которые двигаются независимо, испытывая упругие соударения со стенками цилиндрического сосуда, в который помещена система, и с поршнем.

Массу частицы будем считать равной единице. Длина сосуда за вычетом толщины поршня L и число частиц газа считаются величинами порядка единицы. Масса поршня M считается большой по сравнению с суммарной массой частиц. В начальный момент времени поршень покоится, а скорости всех частиц отличны от нуля. Тогда энергия системы не зависит от массы поршня. Следовательно, энергия поршня оценивается как $O(1)$, характерная скорость его движения как $O(M^{-1/2})$. Поэтому целесообразно ввести малый параметр $\varepsilon = M^{-1/2}$. Интервал времени, на котором проводится исследование, по порядку величины равен ε^{-1}.

Ниже, для простоты изложения, рассмотрим случай, когда по обе стороны от поршня находится только по одной частице (фиг. 5). Как будет видно, рассуждение непосредственно обобщается на случай конечного числа частиц, и в итоге приведем результат для общего случая. Скорости частиц будем считать направленными вдоль оси сосуда, так что движение частиц одномерное; это не ограничивает общности. Индексами l, r будем обозначать переменные, относящиеся к левой и правой частице соответственно. Переменные без индексов относятся к поршню. Полная энергия системы дается формулой

$$E = \varepsilon^2 P^2/2 + p_l^2/2 + p_r^2/2 \tag{3.1}$$

где p_l, p_r – импульсы частиц, P – импульс поршня. Будем обозначать через x_l, x_r и X расстояния частиц и поршня от левой стенки цилиндра, причем для правой частицы расстояние будем считать за вычетом толщины поршня.

Рассмотрим сначала движение частиц при фиксированном положении поршня. Для каждой частицы можно перейти от переменных (p, x) к переменным "действие-угол" (I, ϕ) как в задаче Ферми–Улама (разд. 1).

Выбирая начало отсчета переменных "угол" ϕ_l, ϕ_r на стенках сосуда, имеем

$$\phi_l = \psi(x_l, \operatorname{sign} p_l, X) = \begin{cases} \pi x_l/X, & p_l > 0, \\ \pi(2 - x_l/X), & p_l < 0, \end{cases} \qquad \phi_r = \psi(L - x_r, -\operatorname{sign} p_r, L - X) \tag{3.2}$$

Переменные “действие” имеют вид

$$I_l = |p_l|X/\pi, \quad I_r = |p_r|(L-X)/\pi$$

Производящие функции для перехода от переменных (p, x) к переменным “действие–угол” имеют вид

$$S_l(I_l, x_l, X) = I_l\psi(x_l, \operatorname{sign} p_l, X), \quad S_r(I_r, x_r, X) = I_r\psi(L-x_r, -\operatorname{sign} p_r, L-X)$$

В задаче с движущимся поршнем сделаем замену переменных с производящей функцией

$$W = \hat{P}X + S_l(I_l, x_l, X) + S_r(I_r, x_r, X)$$

и запишем формулу для гамильтониана в новых переменных

$$\mathcal{H} = \varepsilon^2\frac{1}{2}\left(\hat{P} - \frac{I_l}{X}f(\phi_l) + \frac{I_r}{L-X}f(\phi_r)\right)^2 + \frac{\pi^2 I_l^2}{2X^2} + \frac{\pi^2 I_r^2}{2(L-X)^2} \tag{3.3}$$

Функция $f(\phi)$ определена второй формулой (1.3).

Чтобы получить изменение значения переменной “действие” частицы и импульса поршня в результате столкновения, естественным представляется следующий подход: зафиксировать все переменные, кроме переменных, описывающих движение частицы, участвующей в соударении, для этой частицы получить таким образом систему с одной степенью свободы и вычислить скачок значения переменной “действие” из условия сохранения гамильтониана.

Сформулируем соответствующую лемму относительно левой частицы (для правой частицы формулировка аналогична). Значения переменных после соударения будем отмечать штрихом сверху.

Лемма 3. Предложенный способ определяет правильное значение изменения переменной “действие” при соударении:

$$I'_l = I_l - \frac{2PX}{\pi M} + \frac{2}{M+1}\left(\frac{PX}{\pi M} - I_l\right) \tag{3.4}$$

Замечание 9. Скорости v и V частиц с массами 1 и M при соударении, как известно, преобразуются по формулам

$$V' = V + \frac{2}{M+1}(v - V), \quad v' = 2V - v + \frac{2}{M+1}(v - V)$$

“Действие” же частицы и импульс поршня в момент соударения записываются как $I_l = |v|X/\pi$, $P = MV$, откуда следует формула (3.4).

Замечание 10. Если в поршень одновременно ударяются две частицы, то движение после соударения не определено. Движение с такими соударениями рассматривать не будем (соответствующие начальные данные имеют нулевую меру).

Доказательство. Столкновение – переход фазы ϕ_l через значение π. Приравнивая энергии системы до и после соударения, получаем

$$\frac{\pi^2 I_l^2}{2X^2}\frac{M+1}{M} - \frac{\pi I_l}{MX}\left(\hat{P} + \frac{I_r f(\phi_r)}{L-X}\right) = \frac{\pi^2 I_l'^2}{2X^2}\frac{M+1}{M} + \frac{\pi I'_l}{MX}\left(\hat{P} + \frac{I_r f(\phi_r)}{L-X}\right) \tag{3.5}$$

После преобразований находим значение переменной “действие”

$$I'_l = I_l - \frac{2}{M+1}\frac{X}{\pi}\left(\hat{P} + \frac{I_r f(\phi_r)}{L-X}\right) \tag{3.6}$$

Пусть P – импульс поршня перед столкновением; тогда

$$I_l' = I_l - \frac{2}{M+1}\frac{X}{\pi}\left(P + \frac{\pi I_l}{X}\right) \tag{3.7}$$

откуда следует выражение (3.4).

Теорема 3. Значения переменных $I_{l,\,r}$ сохраняются с точностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени порядка ε^{-1}.

Доказательство. Введем для поршня нормированный импульс $\check{P} = \varepsilon\check{P}$ и выпишем гамильтониан (3.3) с точностью $O(\varepsilon^2)$

$$\mathcal{H} = \frac{\check{P}^2}{2} + \frac{\pi^2 I_l^2}{2X^2} + \frac{\pi^2 I_r^2}{2(L-X)^2} - \varepsilon\check{P}\frac{I_l}{X}f(\phi_l) + \varepsilon\check{P}\frac{I_r}{L-X}f(\phi_r) + O(\varepsilon^2) \tag{3.8}$$

Сделаем каноническую замену переменных

$$(I_{l,\,r}, \phi_{l,\,r}, \varepsilon^{-1}\check{P}, X) \mapsto (\tilde{I}_{l,\,r}, \tilde{\phi}_{l,\,r}, \varepsilon^{-1}\tilde{P}, \tilde{X})$$

исключающую зависимость гамильтониана от фаз частиц с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$. Производящая функция такой замены переменных имеет вид

$$W = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{P}X + \tilde{I}_l\phi_l + \tilde{I}_r\phi_r + \varepsilon S_l(\tilde{I}_l, \phi_l, \tilde{P}, X) + \varepsilon S_r(\tilde{I}_r, \phi_r, \tilde{P}, X) \tag{3.9}$$

Подставим выражения, связывающие новые и старые переменные,

$$\begin{aligned} I_{l,\,r} &= \tilde{I}_{l,\,r} + \varepsilon\frac{\partial S_{l,\,r}}{\partial\phi_{l,\,r}}, \quad \tilde{\phi}_{l,\,r} = \phi_{l,\,r} + \varepsilon\frac{\partial S_{l,\,r}}{\partial I_{l,\,r}} \\ \check{P} &= \tilde{P} + \varepsilon^2\frac{\partial S_l}{\partial X} + \varepsilon^2\frac{\partial S_r}{\partial X}, \quad \tilde{X} = X + \varepsilon^2\frac{\partial S_l}{\partial\tilde{P}} + \varepsilon^2\frac{\partial S_r}{\partial\tilde{P}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

в гамильтониан (3.8) и выберем функции $S_{l,\,r}$ так, чтобы исключить зависимость гамильтониана от ϕ_l и ϕ_r в членах $O(\varepsilon)$. Для функций $S_{l,\,r}$ получаем уравнения

$$\frac{\partial S_l}{\partial\phi_l} = \frac{\tilde{P}Xf(\phi_l)}{\pi^2}, \quad \frac{\partial S_r}{\partial\phi_r} = -\frac{\tilde{P}(L-X)f(\phi_r)}{\pi^2} \tag{3.11}$$

из которых следует, что производящая функция $S_{l,\,r}$ определена с точностью до произвольной функции от $\tilde{I}_{l,\,r}$, $\tilde{P}$, X. Выберем эту функцию равной нулю и назовем переменную $\tilde{I}_{l,\,r}$ улучшенным действием (УД). Как можно видеть из соотношений (3.10), (3.11), $\tilde{\phi}_l = \phi_l$ и $\tilde{\phi}_r = \phi_r$, гамильтониан имеет разрыв при $\tilde{\phi}_{l,\,r} = \pi$.

Из леммы 3 и формул (3.10), (3.11) следует, что при соударении УД изменяется на величину $O(\varepsilon^2)$. Изменение УД между последовательными соударениями также есть $O(\varepsilon^2)$. Число соударений на интервале времени длины ε^{-1} есть $O(\varepsilon^{-1})$. Следовательно, на интервале времени порядка ε^{-1} изменение переменных УД составит $O(\varepsilon)$. Переменные “действие” и УД связаны формулами замены переменных согласно первому равенству (3.10). Поэтому изменение переменной “действие” на том же интервале времени есть $O(\varepsilon)$, и теорема доказана.

Следствие 3.1. Изменение переменных εP, X на интервале времени $O(\varepsilon^{-1})$ с точностью $O(\varepsilon)$ описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \varepsilon^2\frac{P^2}{2} + \frac{\pi^2}{2X^2}I_l^2 + \frac{\pi^2}{2(L-X)^2}I_r^2, \quad I_{l,r} = \text{const} \tag{3.12}$$

где $I_{l,r}$ – начальные значения переменных "действие".

Задача с любым наперед заданным числом частиц рассматривается совершенно аналогично. Переменная "действие" каждой частицы сохраняется с точностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени $O(\varepsilon^{-1})$. Изменение переменных εP, X на этом интервале времени с точностью $O(\varepsilon)$ описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом, отличающимся от гамильтониана (3.12) заменой P^2 на P^2/M, I_l^2 на $I_{\Sigma,l}^2$ и I_r^2 на $I_{\Sigma,r}^2$, где $I_{\Sigma,l}^2$ и $I_{\Sigma,r}^2$ – суммы квадратов начальных значений переменных "действие" частиц слева и, соответственно, справа от поршня. (Этот результат был впервые получен другим способом [2].)

Замечание 11. В рассматриваемом приближении поршень совершает колебания в потенциальном силовом поле с потенциалом

$$U = \frac{\pi^2}{2X^2}I_{\Sigma,l}^2 + \frac{\pi^2}{2(L-X)^2}I_{\Sigma,r}^2.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00158, НШ136.2003.1) и программы "Интеграция" (Б0053).

Авторы благодарят С.В. Болотина и Е.И. Кугушева за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал, УРСС, 2002. 416 с.
2. *Синай Я.Г.* Динамика массивной частицы, окруженной конечным числом легких частиц // Теорет. и мат. физика. 1999. Т. 121. №1. С. 110–116.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с. М.: Эдиториал, УРСС, 1999. 408 с.
4. *Нейштадт А.И.* Распространение лучей в плавно нерегулярных волноводах и теория возмущений гамильтоновых систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 2. С. 218–226.
5. *Маркеев А.П.* О движении твердого тела с идеальной неудерживающей связью // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 707–716.
6. *Маркеев А.П.* О качественном анализе систем с идеальной неудерживающей связью // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 867–872.
7. *Zharnitsky V.* Invariant tori in Hamiltonian systems with impacts // Communs. Math. Phys. 2000. V. 211. № 2. P. 289–302.
8. *Нейштадт А.И.* О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 197–204.
9. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
10. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
11. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
12. *Lieb E.* Some problems in statistical mechanics that I would like to see solved // Physica A. 1999. V. 263. № 1–4. P. 491–499.

Москва
e-mail: igor_gor@iki.rssi.ru

Поступила в редакцию
22.II.2005