УДК 531.36:534.1

© 2006 г. С. А. Довбыш

РАСЩЕПЛЕНИЕ СЕПАРАТРИС, ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

На примере задачи о движении сферического маятника с точкой подвеса, совершающей малые периодические колебания, иллюстрируется эффективность полученных ранее результатов [1–4] по неинтегрируемости многомерных систем. С этой целью исследуется расщепление сепаратрис неустойчивого положения равновесия и ветвление решений. Показано, что сепаратрисы расщепляются при любом законе движения точки подвеса и найден простой критерий наличия их трансверсального пересечения. Отмечено также, что справедлив результат о неинтегрируемости, основанный на комбинировании условий, связанных с расщеплением многомерных сепаратрис и с ветвлением решений.

Ранее автором были получены существенно новые условия, гарантирующие неинтегрируемость многомерных динамических систем в наиболее строгом аналитическом смысле, т.е. отсутствие непостоянного аналитического (и даже мероморфного) интеграла на уровне априорных первых интегралов. Эти условия связаны с трансверсальным пересечением многомерных инвариантных многообразий гиперболических периодических решений (сепаратрис) [1–3] или с ветвлением решений в комплексной области [4]. Соответственно этим двум случаям устанавливается отсутствие интеграла мероморфного в некоторой вещественной или комплексной области. Кроме того, отсутствует аналитическое и даже мероморфное векторное поле, коммутирующее с векторным полем фазового потока (порождающее локальную симметрию системы) и не получающееся из последнего умножением на некоторую постоянную.

Для плоского маятника с точкой подвеса, совершающей вертикальные периодические колебания, было найдено [5, 6], что в этой гамильтоновой системе с полутора степенями свободы двумерные сепаратрисы расщепляются с пересечением при произвольном периодическом движении точки подвеса (при вычислении соответствующих интегралов Мельникова были допущены [5, 6] ошибки; однако анонсированные там результаты верны, что видно из правильных формул, приведенных ниже). Этот факт влечет аналитическую неинтегрируемость, т.е. несуществование аналитического первого интеграла в трехмерном расширенном фазовом пространстве (моменты времени, различающиеся на период колебаний точки подвеса, отождествляются; поэтому рассматриваются первые интегралы, имеющие этот период по временно́й переменной). При изучении расщепления сепаратрис в случае плоского маятника с точкой подвеса, совершающей малые горизонтальные синусоидальные колебания, было обнаружено [7] расщепление и трансверсальное пересечение сепаратрис, что влечет аналитическую неинтегрируемость.

Рассматривалось [8, 9] расщепление сепаратрис для сферического демпфированного и намагниченного маятника с вибрирующей точкой подвеса, взаимодействующего с неподвижным магнитом, отталкивающим маятник от его нижнего положения равновесия, которое становится в силу этого неустойчивым (если сила отталкивания превосходит возвращающую силу). Рассматривался случай, когда демпфирование асимметрично, а точка подвеса совершает горизонтальные синусоидальные колебания. Для исследования системы в уравнениях движения были оставлены только члены не выше третьего порядка, что может быть обоснованно, когда сепаратрисы заключены в малой окрестности нижнего положения равновесия. Это условие выполнено, если мощность отталкивающего магнита заключена в некотором достаточно узком интервале; соответствующие ограничения не обсуждались.

В настоящей работе впервые проведено полное и строгое исследование расщепления сепаратрис и получены результаты о неинтегрируемости в задаче о движении сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса.

1. Постановка задачи. Сферический маятник – это материальная точка M, вынужденная оставаться на постоянном расстоянии l от неподвижной точки подвеса S. Предполагается, что эта связь идеальна и единственная внешняя сила – однородная сила тяжести. Рассматриваемая система – автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы и первыми интегралами энергии и площадей. Имеется единственное неустойчивое положение равновесия O, такое, что вектор $\overrightarrow{SO}$ направлен вертикально вверх. Это положение равновесия гиперболическое, и все решения, асимптотически приближающиеся к точке O, когда время стремится к $-\infty$ или к $+\infty$, образуют неустойчивое W^- и устойчивое W^+ многообразия (сепаратрисы) в 4-мерном фазовом пространстве. В рассматриваемой системе эти двумерные сепаратрисы совпадают (сдвоены), поскольку они образуют совместный уровень двух первых интегралов.

Пусть точка подвеса S вынуждена совершать малые периодические колебания, что соответствует малому периодическому по времени возмущению исходной автономной системы. Тогда гиперболическое положение равновесия и его сепаратрисы возмущаются в гиперболическое периодическое решение и соответствующие трехмерные сепаратрисы в 5-мерном расширенном фазовом пространстве. Возмущение сдвоенных сепаратрис ведет, вообще говоря, к их расщеплению. Это явление "расщепления сепаратрис" хорошо известно и может быть изучено при помощи метода Мельникова, вкратце обсуждаемого ниже.

Удобно использовать безразмерные переменные, в которых масса точки M, длина маятника l и ускорение свободного падения g положены равными единице. Для изучения возмущенного сферического маятника введем правую декартову систему координат (x, y, z) с началом в точке подвеса S и с осью z, направленной вертикально вверх, и обозначим через $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ вектор $\overrightarrow{SM}$, проведенный из точки подвеса в точку M. Конфигурационное пространство системы – двумерная единичная сфера $S^2 = \{\boldsymbol{\gamma}: |\boldsymbol{\gamma}| = 1\}$, а фазовое пространство – касательное расслоение TS^2 над сферой, т.е. множество пар векторов координат и скоростей $w = (\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})$, где $\boldsymbol{\gamma} \in S^2$ и $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \perp \boldsymbol{\gamma}$. Точка q фазового пространства, соответствующая верхнему неустойчивому положению равновесия O, определяется равенством $q = (\mathbf{n}, \mathbf{0})$, где $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Первые интегралы энергии и площадей имеют вид

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}) + \boldsymbol{\gamma}_z, \quad h = (\boldsymbol{\gamma} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}})_z = \gamma_1\dot{\gamma}_2 - \gamma_2\dot{\gamma}_1$$

Далее, влияние движения точки подвеса S может быть представлено как действие соответствующей силы инерции. Таким образом, изучение системы, где точка S вынуждена двигаться с ускорением $\mathbf{a}(t)$, эквивалентно изучению сферического маятника с неподвижной точкой подвеса и с дополнительной внешней силой $\mathbf{F} = -\mathbf{a}(t)$. Чтобы рассмотреть малые колебания точки S, введем малый параметр ε и заменим $\mathbf{a}(t)$ на $\varepsilon\mathbf{a}(t)$.

2. Условия неинтегрируемости, основанные на трансверсальном пересечении сепаратрис в многомерных системах. Напомним результат о неинтегрируемости многомерных систем в его простейшей форме [2], относящейся к случаю, когда имеется одно гиперболическое периодическое решение и некоторое количество гомоклинических траекторий. Кроме того, здесь рассматривается случай "узкого" спектра, который достаточен для приложения к возмущенному сферическому маятнику, но позволяет несколько упростить формулировку. Действительно, для этого случая в формулировке результата о неинтегрируемости будут автоматически исчезать некоторые геометрические условия (см. подробнее [2]), относящиеся к взаимному расположению касательных подпространств к сепаратрисам в их точках пересечения.

Определение 1. Будем говорить, что невырожденный линейный оператор $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и множество $K \subset \mathbb{C}^n$ находятся *в общем положении*, если для любого собственного числа λ оператора T линейная оболочка (над $\mathbb{C}$) объединения множества K и образа оператора $T - \lambda \cdot \mathrm{id}$ совпадает со всем объемлющим пространством $\mathbb{C}^n$.

Приведем равносильную форму определения 1.

Определение 1'. Невырожденный линейный оператор $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и множество $K \subset \mathbb{C}^n$ находятся *в общем положении*, если линейная оболочка множества $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} T^k(K)$ совпадает со всем объемлющим пространством $\mathbb{C}^n$.

Введенное условие общности положения допускает простое описание в терминах жордановой формы оператора T и соответствующих координат точек множества K, а также сохраняется при малых возмущениях оператора T и множества K [1, 3]. В качестве важного следствия отметим следующее.

Замечание 1. Обозначим через V_r максимальные обобщенные инвариантные подпространства T, соответствующие некоторому разбиению спектра T на непересекающиеся классы (в частности, эти подпространства могут соответствовать всем различным собственным числам) и пусть $T = \oplus_r T_r$ – разложение T на линейные операторы $T_r : V_r \to V_r$. Обозначим также через π_r естественную проекцию $\mathbb{C}^n \to V_r$ вдоль $V_{r'}$, $r' \neq r$. Тогда T и K находятся в общем положении, если и только если T_r и $K_r = \pi_r(K)$ находятся в общем положении для каждого r.

Пусть q – гиперболическая неподвижная точка C^N-диффеоморфизма S n-мерного многообразия M на себя; W^- и W^+ – ее выходящее и входящее инвариантные многообразия (сепаратрисы), которые, как известно, также являются многообразиями класса C^N. Пусть размерности $W^\pm$ равны соответственно $n^\pm$ (тогда $n^+ + n^- = n$) и r_m – некоторые трансверсальные гомоклинические точки, так что в каждой точке r_m многообразия W^- и W^+ пересекаются трансверсально. Говорят, что орбиты точек q, r_m образуют *гомоклиническую структуру*.

Пусть λ_i $(1 \le i \le n^+)$, $\mu_i (1 \le i \le n^-)$ – все собственные числа отображения S в точке q, причем $0 < |\lambda_i| < 1 < |\mu_i|$. Предположим для простоты, что обе части спектра, лежащие внутри и вне единичной окружности, являются узкими в том смысле, что

$$\max_i |\lambda_i|^2 < \min_i |\lambda_i| \quad \text{и} \quad \min_i |\mu_i|^2 > \max_i |\mu_i| \tag{2.1}$$

Тогда N может быть любым целым числом таким, что $N \ge 2$. По теореме Стернберга [10] существуют "линеаризующие" координаты $y^\pm \in \mathbb{R}^{n^\pm}$ класса C^N на $W^\pm$, в которых отображение $S \mid W^\pm$ принимает линейный вид $y^\pm \mapsto J^\pm y^\pm$. Для каждого из двух индексов $\pm$ обозначим через $K^\pm \subset \mathbb{R}^{n^\pm}$ множество $y^\pm$-координат точек $r_m \in W^\pm$ и предположим, что линейное отображение $J^\pm$ и множество $K^\pm$ находятся в общем положении.

Теорема 1. При выполнении сформулированных выше условий диффеоморфизм S не имеет непостоянного вещественно-мероморфного первого интеграла в любой окрестности рассматриваемой гомоклинической структуры.

Если диффеоморфизм S аналитический, то его сепаратрисы W^- и W^+ и линеаризующие координаты на них также аналитические. Кроме того, отметим, что эти рассмотрения без изменений переносятся на комплексный случай, когда S – комплексно-аналитический диффеоморфизм. Тогда сепаратрисы $W^\pm$ и линеаризующие координаты $y^\pm \in \mathbb{C}^{n^\pm}$

на $W^{\pm}$ также комплексно-аналитические и имеет место полный аналог теоремы 1, утверждающий отсутствие непостоянного мероморфного первого интеграла в окрестности рассматриваемой комплексной гомоклинической структуры.

В приложениях диффеоморфизм S часто возникает как отображение последования (отображение Пуанкаре) фазового потока динамической системы, а неподвижная гиперболическая точка q диффеоморфизма S соответствует гиперболической периодической траектории этой системы. Тогда несуществование аналитического или мероморфного интеграла исходной системы равносильно несуществованию такого интеграла для отображения Пуанкаре.

Здесь, при рассмотрении комплексного случая, комплексно-аналитические линеаризующие координаты продолжаются не на все пространство $\mathbb{C}^{n^{\pm}}$, а определены, вообще говоря, только в окрестности точки $y^{\pm} = 0$, в отличие от вещественного случая. Причина этого заключается в том, что решения продолжаются не на всю область комплексной временно́й переменной. Однако это обстоятельство несущественно для справедливости комплексного аналога теоремы 1.

Замечание 2. Теорема 1 может быть легко использована для доказательства неинтегрируемости систем, которые являются возмущениями интегрируемых. Для простоты будем считать, что рассматриваемые диффеоморфизмы – аналитические. Пусть S_{ε} – диффеоморфизм, зависящий от малого параметра ε. Предположим, что "невозмущенный" диффеоморфизм S_0 имеет неподвижную гиперболическую точку q_0, причем спектр S_0 в q_0 удовлетворяет указанным неравенствам (2.1). Тогда при малых возмущениях отображения S_0 его неподвижная гиперболическая точка q_0 и сепаратрисы $W_0^{\pm}$ будут лишь слегка возмущаться, и неравенства (2.1) для спектра останутся в силе. Пусть "невозмущенный" диффеоморфизм S_0 – в некотором смысле интегрируемый, а для всех малых $\varepsilon \neq 0$ появляются точки $r_m(\varepsilon)$ трансверсального пересечения возмущенных сепаратрис W_{ε}^{+} и W_{ε}^{-}, причем $r_m(\varepsilon) \to r_m$ при $\varepsilon \to 0$, где $r_m \in W_0^{+} \cap W_0^{-}$ (обнаружить рождающиеся при возмущении трансверсальные гомоклинические точки можно с помощью того или иного варианта метода Мельникова, развитого как для фазовых потоков, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и для диффеоморфизмов; в разд. 4 будет применен простейший многомерный вариант метода для фазовых потоков). Наконец, предположим, что для отображения S_0 и точек r_m на его сепаратрисах $W_0^{\pm}$ выполнены условия общности положения, предполагаемые в теореме 1 (подчеркнем, что двоякоасимптотические точки r_m могут не быть трансверсальными гомоклиническими). Тогда условия теоремы 1 будут выполнены для возмущенного диффеоморфизма S_{ε} и трансверсальных гомоклинических точек $r_m(\varepsilon)$ при всех малых $\varepsilon \neq 0$. Действительно, искомый результат непосредственно вытекает из двух следующих фактов: 1) при малых возмущениях отображения S_0 его сепаратрисы $W_0^{\pm}$ и линеаризующие координаты $y^{\pm}$ на $W_0^{\pm}$ будут лишь слегка возмущаться (см. [3]), 2) как отмечалось выше, условие общности положения отображения $J^{\pm}$ и множества $K^{\pm}$ сохраняется при их малых возмущениях.

3. Условия неинтегрируемости, основанные на ветвлении решений в многомерных системах. Напомним одну из теорем о неинтегрируемости [4]. Для простоты приведем формулировку в несколько упрощенном варианте "узкого" спектра. Рассмотрим систему аналитических обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x, t) \tag{3.1}$$

в комплексной области изменения независимой переменной t и фазовых переменных x. В обсуждаемом случае система будет τ-периодической по t. Поэтому удобно считать, что независимая переменная t пробегает комплексный цилиндр $\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z}$. Пусть расширенные фазовые переменные (x, t) изменяются в области $D \subset \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z})$, где правая часть системы (3.1) имеет вид

$$X(x, t) = X_0(x) + \varepsilon X_1(x, t) + O(\varepsilon^2) \tag{3.2}$$

т.е. является возмущением автономной системы. Более того, пусть $X_0(q) = 0$ для некоторой точки $q \in \mathbb{C}^n$ и $\Gamma = \Gamma_0 : [0, 1] \to \mathbb{C}\{t\}$ – некоторый контур, такой, что $\Gamma(1) - \Gamma(0) = \tau$ и $\{q\} \times \Gamma \subset D$; введем также область

$$V = \{t\colon (q, t) \in D\} \supset \Gamma \equiv \Gamma_0 \text{ в } \mathbb{C}$$

Определение 2. Будем говорить, что оператор $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n$-значная функция f, голоморфная всюду в V, кроме конечного числа особенностей, находятся в *общем положении*, если T и $K \subset \mathbb{C}^n$ – в общем положении в смысле определений 1, 1', где K – множество вычетов функции f в V.

Выберем замкнутые контуры $\Gamma_k \subset V$ $(k \neq 0)$, проходящие через точку $t_0 = \Gamma_0(0)$ так, что 1) каждый из них стягиваем в области V и обходит ровно одну особенность $t_k \in V$ функции f, 2) оператор T и подмножество

$$K(\{\Gamma_k\}) = \{\mathrm{Res}_{t_k} f\} \subseteq K \quad (k \neq 0)$$

находятся в общем положении.

Теорема 2. Пусть выполнены сформулированные выше условия. Обозначим через $\Lambda = (\partial X_0/\partial x)|_{x=q}$ матрицу невозмущенной системы (для $\varepsilon = 0$), линеаризованной около постоянного решения $x \equiv q$. Пусть оператор

$$J = \exp(\tau\Lambda) \tag{3.3}$$

гиперболический (и значит, невозмущенное постоянное τ-периодическое решение $x \equiv q$ – гиперболическое), и более того, его собственные числа λ_i, μ_i, лежащие внутри и вне единичной окружности $(0 < |\lambda_i| < 1 < |\mu_i|)$, удовлетворяют условиям (2.1). Тогда, если оператор (3.3) и функция

$$f(t) = \exp(-\Lambda t) X_1(q, t) \tag{3.4}$$

находятся в общем положении, то система не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла в любой окрестности связки контуров

$$\{q\} \times \cup_k \Gamma_k \subset D \tag{3.5}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Замечание 3. Пусть L^+ и L^- – инвариантные подпространства оператора J, отвечающие частям спектра, лежащим внутри и вне единичной окружности, и $J = J^+ \oplus J^-$ – соответствующее разложение в прямую сумму операторов $J^\pm : L^\pm \to L^\pm$. Очевидно, L^+ и L^- – инвариантные подпространства оператора $\tau\Lambda$, отвечающие частям спектра, лежащим на комплексной плоскости слева и справа от действительной оси, причем $J^\pm = \exp(\tau\Lambda^\pm)$, где $\Lambda = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ – разложение в прямую сумму операторов $\Lambda^\pm : L^\pm \to L^\pm$. Определим $J^\pm$-значную функцию

$$f^\pm(t) = \pi^\pm f(t) = \exp(-\Lambda^\pm t)\pi^\pm X_1(q, t)$$

где $\pi^\pm : \mathbb{C}^n \to L^\pm$ – естественная проекция вдоль $L^\mp$. Согласно замечанию 1 условие, что оператор J и функция $f(t)$ находятся в общем положении, эквивалентно тому, что для каждого из двух индексов $\pm$ оператор $J^\pm$ и функция $f^\pm(t)$ находятся в общем положении.

4. Комбинирование условий неинтегрируемости, основанных на трансверсальном пересечении сепаратрис и на ветвлении решений. Сформулируем результат, непосредственно включающий в себя теорему 1 (для описанного в замечании 2 случая, когда диффеоморфизм S – отображение последования периодической системы, близкой к автономной) и теорему 2.

Следуя сказанному в разд. 3, рассмотрим τ-периодическую систему (3.1) с правой частью (3.2), такую, что $X_0(q) = 0$. Пусть $\Lambda = (\partial X_0/\partial x)|_{x=q}$ и оператор (3.3) удовлетворяет условиям теоремы 2. Обозначим через $W_0^{\pm}$ комплексные сепаратрисы гиперболической точки q системы уравнений $dx/dt = \tau X_0(x)$. Тогда $\tilde{W}_0^{\pm} = W_0^{\pm} \times (\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z})$ – сепаратрисы гиперболического периодического решения $x \equiv q$ невозмущенной τ-периодической системы $dx/dt = X_0(x)$. Предположим, что при всех малых $\varepsilon \neq 0$ появляются линии $\gamma_m(\varepsilon)$ трансверсального пересечения возмущенных сепаратрис $\tilde{W}_\varepsilon^{\pm}$, причем

$$\gamma_m(\varepsilon) \to \gamma_m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0; \quad \gamma_m \in \tilde{W}_0^{+} \cap \tilde{W}_0^{-}$$

В силу варианта теоремы Стернберга, относящегося к потокам, можно ввести линеаризующие координаты $y^{\pm}$ на сепаратрисах $W_0^{\pm}$, в которых невозмущенная система примет линейный вид. Заметим, что подпространства $L^{\pm}$ совпадают с касательными подпространствами к сепаратрисам $W_0^{\pm}$ в точке q. Поэтому можно ввести линеаризующие координаты $y^{\pm}$ на $W_0^{\pm}$, пробегающие $L^{\pm} = T_q W_0^{\pm}$ и такие, что дифференциал соответствующего отображения $\chi^{\pm} : L^{\pm} \to W_0^{\pm}$ (которое ставит в соответствие набору координат точку на сепаратрисе) в нуле $0 \in L^{\pm}$ будет тождественным отображением. Тогда в этих координатах ограничение невозмущенной системы на ее сепаратрису $W_0^{\pm}$ принимает вид $dy^{\pm}/dt = \Lambda^{\pm} y^{\pm}$. В координатах $(y^{\pm}, t)$ на $\tilde{W}_0^{\pm}$ решение γ_m невозмущенной системы задается формулой $y^{\pm} = \exp(\Lambda^{\pm} t) z_m^{\pm}$, где $z_m^{\pm} \in L^{\pm}$ – некоторый вектор.

Далее, пусть контур $\Gamma_0 = \Gamma$ и область V определяются как в разд. 3 и пусть $\mathbb{C}^n$-значная функция (3.4) голоморфна всюду в V, кроме конечного числа особенностей. Обозначим через $K_1^{\pm}$ множество всех элементов $z_m^{\pm}$ и пусть $K_2^{\pm} = \pi^{\pm}(K_2)$, где K_2 – множество вычетов функции f в V. Очевидно, $K_2^{\pm}$ – множество вычетов функции $f^{\pm}$ в V. Пусть, наконец, для каждого из двух индексов $\pm$ оператор $J^{\pm}$ и множество $K^{\pm} = K_1^{\pm} \cup K_2^{\pm} \subset L^{\pm}$ находятся в общем положении.

Теорема 3. При выполнении сформулированных выше условий система не имеет непостоянного мероморфного первого интеграла в любой окрестности замкнутого множества

$$\bigcup_m \gamma_m \cup \left(\{q\} \times \bigcup_k \Gamma_k \right) \subset D$$

при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Доказательства обеих теорем 1 и 2 используют совершенно родственные идеи и основаны на описании методами символической динамики множества траекторий, лежащих в достаточно малых окрестностях гомоклинической структуры или связки контуров

(3.5). Доказательство теоремы 3 следует из наблюдения, что схемы доказательств теорем 1 и 2 могут быть объединены в одну, с получением описанных выше комбинированных условий неинтегрируемости.

5. Расщепление сепаратрис неустойчивого положения равновесия возмущенного сферического маятника. Для исследования расщепления сепаратрис воспользуемся методом Мельникова в его многомерном варианте. Среди различных известных версий метода здесь наиболее удобна относящаяся к возмущению интегрируемых систем и основанная на рассмотрении так называемых интегралов Мельникова (см. [11]). Отметим, что далее применяется негамильтонов вариант метода (сам метод в его гамильтоновом варианте и несколько иной форме фактически возник еще в работе Пуанкаре [12]).

В задаче о движении плоского маятника двоякоасимптотические решения задаются известными формулами

$$\gamma_x = \pm\gamma_\perp(t'),\quad \gamma_\perp(t') = \frac{2\,\mathrm{sh}\,t'}{\mathrm{ch}^2 t'},\quad \gamma_z = \gamma_\parallel(t') = 1 - \frac{2}{\mathrm{ch}^2 t'},\quad t' = t_0 + t$$

(когда $\gamma_y = 0$, т.е. движение совершается в плоскости xz). Соответствующие решения для сферического маятника $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^*(t + t_0, \theta)$ в конфигурационном пространстве получаются поворотами вокруг вертикальной оси z и задаются формулами

$$\boldsymbol{\gamma}^*(t, \theta):\quad \gamma_x = \gamma_\perp(t)\cos\theta,\quad \gamma_y = \gamma_\perp(t)\sin\theta,\quad \gamma_z = \gamma_\parallel(t)$$

где $\theta \bmod 2\pi$ – угол поворота, нумерующий решения, а t_0 – параметр, отвечающий временнóму сдвигу решения. Обозначим через $w^*(t, \theta) = (\boldsymbol{\gamma}^*(t, \theta), \dot{\boldsymbol{\gamma}}^*(t, \theta))$ соответствующее решение в фазовом пространстве. В первом порядке теории возмущений взаимное расположение возмущенных сепаратрис характеризуется двумерным вектором (функцией) Мельникова $M = (M_E(t_0, \theta), M_j(t_0, \theta))$, компоненты которого задают, соответственно, расхождения сепаратрис в направлениях двух невозмущенных интегралов.

Точный смысл этого утверждения следующий. Обозначим через U узкую окрестность невозмущенной трехмерной сепаратрисы $\tilde{W}^\pm$ в расширенном 5-мерном фазовом пространстве, не пересекающуюся с некоторой малой окрестностью невозмущенного периодического решения $w = q$, отвечающего верхнему неустойчивому положению равновесия O. Сдвоенная невозмущенная сепаратриса заполнена решениями $w = w^*(t + t_0, \theta)$, и поэтому в качестве координат на $\tilde{W}^\pm \cap U$ можно выбрать (t, t_0, θ). В качестве координат, трансверсальных к сепаратрисе, можно выбрать невозмущенные интегралы E и j. В полученной системе координат (t, t_0, θ, E, j) в окрестности U возмущенные сепаратрисы $\tilde{W}^\pm$ задаются уравнениями

$$E = E^\pm(t, t_0, \theta) = O(\varepsilon),\quad j = j^\pm(t, t_0, \theta) = O(\varepsilon)$$

Расхождения сепаратрис $\tilde{W}^+$ и $\tilde{W}^-$ в направлениях координат E и j – функции, разлагающиеся в ряды по малому параметру ε,

$$\Delta E = E^+(t, t_0, \theta) - E^-(t, t_0, \theta) = -\varepsilon M_E(t_0 - t, \theta) + \ldots$$

$$\Delta j = j^+(t, t_0, \theta) - j^-(t, t_0, \theta) = -\varepsilon M_j(t_0 - t, \theta) + \ldots$$

в которых коэффициенты при членах первого порядка – компоненты вектора Мельникова. Поэтому каждому простому нулю (t_0, θ) вектора Мельникова (где соответствующая матрица Якоби невырожденна) отвечает трансверсальное гомоклиническое решение (линия трансверсального пересечения сепаратрис) возмущенной системы, $O(\varepsilon)$-близкое к решению $w = w^*(t + t_0, \theta)$ невозмущенной системы. Отметим, что вектор Мельникова имеет по временнóй переменной t_0 период, равный периоду колебаний точки подвеса.

Для вычисления вектора Мельникова заметим, что изменения невозмущенных интегралов задаются выражениями

$$\dot{E} = (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{F}) = \varepsilon g_E, \quad g_E = -(\dot{\gamma}_x a_x + \dot{\gamma}_y a_y + \dot{\gamma}_z a_z)$$

$$(j)^{\boldsymbol{\cdot}} = (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{F})_z = \varepsilon g_j, \quad g_j = \gamma_y a_x - \gamma_x a_y$$

Поскольку функции g_E, g_j обращаются в нуль на невозмущенном периодическом решении, формулы для искомых компонент вектора Мельникова имеют вид (всюду далее интегрирование по t ведется от $-\infty$ до $+\infty$)

$$M_E(t_0, \theta) = \int g_E(w^*(t + t_0, \theta), t)dt, \quad M_j(t_0, \theta) = \int g_j(w^*(t + t_0, \theta), t)dt$$

(в общем случае в формуле для $M_I(t_0, \theta)$ из $g_I(w^*(t + t_0, \theta), t)$ следует вычесть $g_I(q, t)$, где I – первый интеграл невозмущенной системы). Вектор Мельникова $M(t_0, \theta)$ будет иметь период по t_0, равный периоду τ колебаний точки подвеса.

Итак,

$$-M_E(t_0, \theta) = f_{Ec}(t_0)\cos\theta + f_{Es}(t_0)\sin\theta + f_{E0}(t_0)$$

$$M_j(t_0, \theta) = -f_{jc}(t_0)\cos\theta + f_{js}(t_0)\sin\theta$$

где

$$\begin{aligned} f_{Ec}(t_0) &= \int \dot{\gamma}_\perp(t + t_0)a_x(t)dt \ (c, s;\ x, y), \quad f_{E0}(t_0) = \int \dot{\gamma}_\parallel(t + t_0)a_z(t)dt \\ f_{jc}(t_0) &= \int \gamma_\perp(t + t_0)a_y(t)dt \ (c, s;\ y, x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

(альтернативный вид этих интегралов получается заменой $t \to t - t_0$). Из формул (5.1) сразу видно, что $f'_{jc} = f_{Es}$, $f'_{js} = f_{Ec}$.

Для вычисления интегралов (5.1) предположим, что компоненты ускорения – вещественно-аналитические функции времени, и разложим их в ряды Фурье (всюду далее суммирование по k ведется от $-\infty$ до $+\infty$)

$$a_x(t) = \sum a_{xk} e^{ik\omega t} \ (x, y, z)$$

Здесь ω – частота колебаний точки подвеса. Функции $\gamma_\parallel(t)$ и $\gamma_\perp(t)$ имеют мнимый полупериод πi, причем

$$\gamma_\parallel(t + \pi i) = \gamma_\parallel(t), \quad \gamma_\perp(t + \pi i) = -\gamma_\perp(t)$$

Поэтому, используя вычеты, легко подсчитать интегралы, задающие коэффициенты при гармониках в разложениях искомых функций:

$$\begin{aligned} I_1(\nu) &= \int \gamma_\perp(t)e^{i\nu t}dt = \frac{2\pi i\nu}{\operatorname{ch}(\pi\nu/2)}, \quad I_2(\nu) = \int \dot{\gamma}_\perp(t)e^{i\nu t}dt = -i\nu I_1(\nu) \\ I_3(\nu) &= \int \dot{\gamma}_\parallel(t)e^{i\nu t}dt = \frac{2\pi i\nu^2}{\operatorname{sh}(\pi\nu/2)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Итак,

$$f_{Ec}(t_0) = \sum I_2(k\omega)a_{xk}e^{-ik\omega t_0}\,(c,s;\,x,y),\quad f_{E0}(t_0) = \sum I_3(k\omega)a_{zk}e^{-ik\omega t_0}$$

$$f_{jc}(t_0) = \sum I_1(k\omega)a_{yk}e^{-ik\omega t_0}\,(c,s;\,y,x)$$

Поскольку все коэффициенты (5.2) отличны от нуля при $\nu \neq 0$, то обе компоненты вектора Мельникова – непостоянные функции, коль скоро хотя бы одна из горизонтальных компонент ускорения a_x, a_y – непостоянная функция времени. Если же $a_x \equiv \mathrm{const}$ и $a_y \equiv \mathrm{const}$, но вертикальная компонента ускорения a_z непостоянна, то функция M_j тождественно обращается в нуль, а функция M_E непостоянна.

Обозначим для простоты

$$f_1 = -f_{jc},\quad f_2 = f_{js},\quad f_3 = f_{E0};\quad f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

Тогда

$$f_{Es} = -f_1',\quad f_{Ec} = f_2'$$

Чтобы найти простые нули вектора Мельникова, перепишем рассматриваемую систему

$$M_j \equiv f_1(t_0)\cos\theta + f_2(t_0)\sin\theta = 0,\quad -M_E \equiv f_2'(t_0)\cos\theta - f_1'(t_0)\sin\theta + f_3(t_0) = 0 \qquad (5.3)$$

в виде

$$(\mathbf{us}) = 0,\quad f_3 - (R^{\pi/2}\mathbf{u}'\mathbf{s}) = 0$$

где введен вектор $\mathbf{u} = (f_1, f_2)$, зависящий от t_0, и его производная $\mathbf{u}' = (f_1', f_2')$, а также единичный вектор $\mathbf{s} = (\cos\theta, \sin\theta)$ и операция поворота $R^{\pi/2}$. Рассмотрим случай, когда $\mathbf{u} \neq 0$, т.е. хотя бы одна из функций f_1, f_2 не обращается в нуль при данном значении аргумента t_0. Тогда

$$\mathbf{s} = \pm\frac{R^{\pi/2}\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \pm\frac{(-f_2, f_1)}{f},\quad (R^{\pi/2}\mathbf{u}'\mathbf{s}) = \pm\frac{(\mathbf{u}'\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|} = \pm\frac{(|\mathbf{u}|^2)'}{2|\mathbf{u}|} = \pm|\mathbf{u}|'$$

Итак, из системы (5.3) при условии, что $f^2 \neq 0$, следует совокупность уравнений

$$\mp f' + f_3 = 0 \qquad (5.4)$$

равносильная одному уравнению

$$(f_1f_1' + f_2f_2')^2 - f^2f_3^2 = 0 \qquad (5.5)$$

Отметим, что среднее значение функции f_3 по периоду равно нулю, поскольку $I_3(0) = 0$. Поэтому, если функции f_1, f_2 не имеют общих нулей, то в левой части каждого из уравнений (5.4) стоит функция, среднее значение которой по периоду равно нулю. Тогда каждое из уравнений имеет по крайней мере два различных корня t_0. Далее, заметим, что по каждому корню t_0 совокупности уравнений (5.4) легко восстанавливается (с учетом знака $\mp$ в (5.4)) искомая величина θ, и значит, решение (t_0, θ) исходной системы (5.3).

Докажем теперь, что простота корня (t_0, θ) системы (5.3) равносильна простоте корня t_0 соответствующего уравнения (5.4) (или, что в силу условия $f^2 \neq 0$ то же самое, простоте корня t_0 уравнения (5.5)).

Действительно, определитель матрицы Якоби для системы (5.3) в точке (t_0, θ) с точностью до знака равен

$$(f'_1 \cos\theta + f'_2 \sin\theta)^2 + (f_2 \cos\theta - f_1 \sin\theta)(f''_2 \cos\theta - f''_1 \sin\theta + f'_3)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{s} = (\cos\theta, \sin\theta) = \pm(-f_2, f_1)/|\mathbf{u}|$$

перепишем определитель Якоби с точностью до ненулевого множителя $|\mathbf{u}|^2 = f^2$ как

$$(f_1 f'_2 - f_2 f'_1)^2 + f^2(f_1 f''_1 + f_2 f''_2 \mp f f'_3) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}')^2 + |\mathbf{u}|^2((\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'') \mp |\mathbf{u}| f'_3) \tag{5.6}$$

где используется внешнее произведение векторов на плоскости, которое определено в декартовых координатах как $(a_x, a_y) \wedge (b_x, b_y) = a_x b_y - a_y b_x$. Поскольку

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}')^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{u}'|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')^2$$

то правую часть формулы (5.6) с точностью до ненулевого множителя $|\mathbf{u}|^2 = f^2$ можно переписать как

$$|\mathbf{u}'|^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')^2}{|\mathbf{u}|^2} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'') \mp |\mathbf{u}| f'_3 \tag{5.7}$$

Напомним, что $|\mathbf{u}|' = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')/|\mathbf{u}|$, и значит,

$$|\mathbf{u}|'' = \frac{|\mathbf{u}'|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'')}{|\mathbf{u}|} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')^2}{|\mathbf{u}|^3}$$

Поэтому выражение (5.7) обращается в нуль тогда и только тогда, когда производная левой части соответствующего уравнения (5.4) равна нулю, т.е. корень t_0 не является простым.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{u} = 0$, т.е. функции f_1, f_2 обращаются в нуль при данном значении аргумента t_0. Тогда первое уравнение системы (5.3) автоматически удовлетворяется при данном t_0 и, очевидно, изолированные решения (t_0, θ) системы могут существовать, только если $\mathbf{u}' \neq 0$, т.е. хотя бы одна из функций f'_1, f'_2 не обращается в нуль при данном t_0. Тогда второе уравнение (5.3) можно переписать в виде

$$|\mathbf{u}'|(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}) - f_3 = 0; \quad \mathbf{p} = (\cos\psi, \sin\psi) = \frac{(-f'_2, f'_1)}{\sqrt{f'^2_1 + f'^2_2}}$$

Поэтому

$$\theta = \psi \pm \arccos \frac{f_3}{\sqrt{f'^2_1 + f'^2_2}} \tag{5.8}$$

Условие простоты корня (t_0, θ) системы (5.3) принимает вид $f'_1 \cos\theta + f'_2 \sin\theta \neq 0$, т.е. $\theta - \psi \neq 0 \bmod \pi$.

Итак, точка (t_0, θ) будет простым корнем системы (5.3), если выполнено условие

$$|f_3| < |\mathbf{u}'|, \quad \text{т.е.} \quad |f_3| < \sqrt{f'^2_1 + f'^2_2} \tag{5.9}$$

а θ задается формулой (5.8), где ψ – угол, такой, что

$$(\cos\psi, \sin\psi) = (-f'_2, f'_1)/\sqrt{f'^2_1 + f'^2_2} \tag{5.10}$$

Заметим, что приведенный выше анализ останется в силе, если рассматривать расщепление комплексных сепаратрис (в комплексном фазовом пространстве). Теперь f_1, f_2, f_3 – функции, получаемые продолжением вещественно-аналитических функций в комплексную область, а t_0, θ – комплексные величины и $\mathbf{u} = (f_1, f_2)$, $\mathbf{u}' = (f'_1, f'_2)$ – комплексные векторы. Поэтому из условия $\mathbf{u} \neq 0$ не следует, что $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \equiv f^2 \neq 0$, а из условия $\mathbf{u}' \neq 0$ не следует, что $(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') \equiv f'^2_1 + f'^2_2 \neq 0$. Однако согласно первому уравнению (5.3) получим $(-f_2, f_1) = k(\cos\theta, \sin\theta)$ с некоторой постоянной k, откуда $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = k^2$, и поэтому $\mathbf{u} = 0$, коль скоро $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$. Далее, условие (5.9) заменится теперь на условие $f'^2_1 + f'^2_2 \neq f^2_3$.

Пусть теперь $\mathbf{u} = 0$ и $(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}') = 0$ для данного значения t_0, в то время как $\mathbf{u}' \neq 0$. Тогда $f'_1 = jf'_2$, где $j \in \{+i, -i\}$, i – мнимая единица. Второе уравнение (5.3) можно переписать в виде

$$\exp(-j\theta) = -f_3/f'_2 \tag{5.11}$$

Заметим, что

$$f'_1\cos\theta + f'_2\sin\theta = j(f'_2\cos\theta - f'_1\sin\theta) = -jf_3$$

Поэтому при условии $f_3 \neq 0$ система (5.3) имеет корень (t_0, θ), где θ определяется из уравнения (5.11), причем этот корень простой.

В следующем разделе будет показано, что каждая невозмущенная комплексная сепаратриса $W^{\pm}_0$ заполнена не только двоякоасимптотическими траекториями "неизотропных" решений $w = w^*(t + t_0, \theta)$, но содержит также две различных траектории "изотропных" решений, для которых $\gamma^2_x + \gamma^2_y = 0$ и $\dot\gamma^2_x + \dot\gamma^2_y = 0$. Однако эти траектории оказываются асимптотическими, но не двоякоасимптотическими, т.е. принадлежат только одной из двух сепаратрис.

Полученные результаты подытожены в следующей теореме.

Теорема 4. Сепаратрисы расщепляются при любом периодическом движении точки подвеса с непостоянным ускорением. Все простые нули (t_0, θ) двумерного вектора Мельникова описываются следующим образом в терминах одномерных уравнений.

1°. Каждому простому корню t_0 уравнения (5.4) (для одного из двух знаков $\mp$), такому, что $f^2 \neq 0$ в точке t_0, соответствует простой нуль (t_0, θ) вектора Мельникова, где угол θ определяется из соотношения

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \pm(-f_2, f_1)/f$$

2°. Если в точке t_0 выполнены условия $f_1 = 0, f_2 = 0$ и (5.9), то имеется пара простых нулей (t_0, θ) вектора Мельникова, где углы θ определяются по формулам (5.10) и (5.8).

Если рассматриваются комплексные сепаратрисы, то утверждение 1° останется в силе, условия утверждения 2° будут слегка видоизменены как описано ниже, и появится новое утверждение 3°:

2_1°. Если в точке t_0 выполнены условия

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_1'^2 + f_2'^2 \neq 0, \quad f_1'^2 + f_2'^2 \neq f_3^2$$

то имеется пара простых нулей (t_0, θ) вектора Мельникова, где углы θ определяются по формулам (5.10) и (5.8).

3°. Если в точке t_0 выполнены условия

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 \neq 0, \quad f_1'^2 + f_2'^2 = 0$$

в то время как f_1' и f_2' отличны от нуля (так что $f_1' = jf_2'$, где $j^2 = -1$), то имеется простой нуль (t_0, θ) вектора Мельникова, где угол θ определяется по формуле (5.11).

6. Неинтегрируемость системы уравнений возмущенного сферического маятника. Пусть τ-периодическая вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ голоморфна всюду в области $V \subset \mathbb{C}$, кроме особенностей t_k, а $\Gamma = \Gamma_0 : [0, 1] \to V$ – некоторый контур, такой, что $\Gamma(1) - \Gamma(0) = \tau$. Выберем замкнутые контуры $\Gamma_k \subset V$ ($k \neq 0$), проходящие через точку $t_0 = \Gamma_0(0)$ так, что каждый из них стягиваем в области V и обходит ровно одну особенность $t_k \in V$ функции f. Введем двумерные векторы

$$\mathbf{F}^{(\pm, k)} = \mathrm{Res}_{t = t_k}[(a_x(t), a_y(t))e^{\pm t}] = (F_x^{(\pm, k)}, F_y^{(\pm, k)})$$

$$F_x^{(\pm, k)} = \mathrm{Res}_{t = t_k}(a_x(t)e^{\pm t}) \ (x, y)$$

С каждым простым нулем ($t_{0, m}$, θ_m) вектора Мельникова сопоставим двумерный вектор

$$\mathbf{G}^{(m)} = (\cos\theta_m, \sin\theta_m)$$

и невозмущенное двоякоасимптотическое решение

$$\gamma_m : w = w^*(t + t_{0, m}, \theta_m)$$

Следующая теорема о неинтегрируемости непосредственно дополняет теорему 4.

Теорема 5. Если для каждого из двух индексов $\pm$ среди векторов $\mathbf{F}^{(\pm, k)}$, $\mathbf{G}^{(m)}$ имеется пара неколлинеарных, то возмущенная система неинтегрируема в любой окрестности замкнутого множества

$$\bigcup_m \gamma_m \cup \left(\{q\} \times \bigcup_k \Gamma_k\right) \subset D$$

при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Доказательство основано на проверке условий теоремы 3. Для этой цели рассмотрим фазовый поток ϕ^t автономной системы – невозмущенного сферического маятника и построим двумерные линеаризующие координаты (ЛК) $u^\pm$ на $W_0^\pm$, в которых фазовый поток принимает линейный вид. Изучим вначале фазовый поток $\mathring{\phi}^t$ для плоского маятника. Сепаратрисы $\mathring{W}_0^\pm$ его неустойчивого положения равновесия q – одномерные кривые, такие, что $\mathring{W}_0^\pm \backslash \{q\}$ состоит из двух компонент связности, являющихся траекториями двоякоасимптотических решений $s_+ : w = w^*(t, 0)$ и $s_- : w = w^*(t, \pi)$. Соответствующий характеристический показатель фазового потока на $\mathring{W}_0^\pm$ в неподвижной точке q равен ± 1.

Введем координату $\rho^\pm$ на $\overset{\circ}{W}{}_0^\pm = \{q\} \cup s_+ \cup s_-$, полагая $\rho^\pm = 0$ в точке q, $\rho^\pm = \exp(\mp t)$ в точке $w = w^*(t, 0) \in s_+$ и $\rho^\pm = -\exp(\mp t)$ в точке $w = w^*(t, \pi) \in s_-$ (многообразие $\overset{\circ}{W}{}_0^\pm$ получается "приклеиванием" точки q к тем концам траекторий s_+ и s_-, которые соответствуют предельному переходу $t \to \pm\infty$). Тогда $\rho^\pm$ – аналитическая ЛК на $\overset{\circ}{W}{}_0^\pm$, т.е. фазовый поток на $\overset{\circ}{W}{}_0^\pm$, будучи записан в этой координате, принимает линейный вид $\phi_0^t(\rho^\pm) = \exp(\mp t)\rho^\pm$, а соответствующее векторное поле фазового потока имеет вид $\mp\rho^\pm$.

Пусть l – прямая, касательная к конфигурационному пространству

$$S^1 = \{\boldsymbol{\gamma}\colon \gamma_x^2 + \gamma_z^2 = 1, \gamma_y = 0\}$$

плоского маятника в точке $O = (0, 0, 1)$. Тогда прямая l параллельна оси x. Отождествляя переменную $\rho^\pm$ с x-координатой точки на l, будем считать, что ЛК на $\overset{\circ}{W}{}_0^\pm$ пробегает прямую l.

Сепаратрисы сферического маятника $W_0^\pm$ в вещественной области получаются из сепаратрис плоского маятника $\overset{\circ}{W}{}_0^\pm$ преобразованиями $T^\theta = (R_z^\theta, R_z^\theta)$ фазового пространства $\mathbb{R}^6\{(\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\}$, которые порождаются поворотами R_z^θ конфигурационного пространства вокруг вертикальной оси z. Применяя повороты R_z^θ к одномерной линеаризующей координате $x \in l$ на $\overset{\circ}{W}{}_0^\pm$, получим двумерные координаты $u^\pm$ на $W_0^\pm$, в которых фазовый поток принимает линейный вид

$$\phi^t(u^\pm) = \exp(\mp t)u^\pm$$

Таким образом, точке $w = w^*(t, \theta)$ на $W_0^\pm$ соответствуют координаты $u^\pm = (x, y)$, где

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad \rho = \exp(\mp t)$$

Итак, построены ЛК на $W_0^\pm$, которые пробегают плоскость $P\{(x, y)\}$, отождествляемую с координатной плоскостью xy. Ниже будет показано, что эти ЛК – аналитические, т.е. отображение $\psi^\pm : P \to W_0^\pm$, ставящее в соответствие набору ЛК точку на сепаратрисе, будет аналитическим. Аналогичное построение для сепаратрисы $W_0^\pm$ в комплексной области дает только часть этой сепаратрисы, заполненную траекториями неизотропных решений и параметризуемую ЛК $u^\pm = (x, y)$, пробегающими область неизотропности $\{(x, y) : x^2 + y^2 = \rho^2 \neq 0\}$. Видно, что при использовании этих ЛК решению γ_m будет соответствовать элемент

$$z_m^\pm = \exp(\mp t_{0,m})\mathbf{G}^{(m)}$$

Вблизи точки $O = (0, 0, 1)$ конфигурационного пространства $S^2 = \{\boldsymbol{\gamma} : |\boldsymbol{\gamma}| = 1\}$ сферического маятника в качестве локальных координат удобно использовать $\upsilon = (x, y)^\top = (\gamma_x, \gamma_y)^\top$ (операция транспонирования применяется, поскольку векторы будут рассматриваться как столбцы). Тогда $w_\circ = (x, \dot{x}, y, \dot{y})^\top$ – соответствующие локальные координаты в фазовом пространстве TS^2 вблизи q. Кинетическая и потенциальная энергия разлагаются в ряды

$$\Gamma = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol\gamma}, \dot{\boldsymbol\gamma}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \ldots, \quad U = z + \varepsilon(\mathbf{a}, \boldsymbol\gamma) = \varepsilon a_x x + \varepsilon a_y y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \ldots$$

с опущенными членами $O_3(x, y)$ и $O(\varepsilon)O_2(x, y)$, где $O_k(x, y)$ означает члены порядка k по x, y. Поэтому линеаризованные уравнения невозмущенного сферического маятника в точке q имеют вид $\ddot{\upsilon} = \upsilon$, или

$$\dot{w}_\circ = \Lambda w_\circ; \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & \Lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а главные члены, возникающие в правой части возмущенной системы, образуют вектор $\varepsilon Y(t)$, где

$$Y(t) = X_1(q, t) = (0, -a_x(t), 0, -a_y(t))^{\mathrm{T}}$$

Видно, что инвариантные подпространства $L^\pm$ линеаризованной системы задаются соотношениями $\dot{\upsilon} = \mp\upsilon$ (это можно получить, также рассматривая асимптотическое поведение решений $w = w^*(t, \theta)$ при $t \to \pm\infty$). Далее, проекции $\pi^\pm$: $\mathbb{C}^4 \to L^\pm$ задаются формулами

$$\pi^\pm(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (\alpha_x^\pm, \mp\alpha_x^\pm, \alpha_y^\pm, \mp\alpha_y^\pm); \quad \alpha_x^\pm = (x \pm \dot{x})/2 \ (x, y)$$

Пусть $l^\pm$: $P \to L^\pm$ – изоморфизм линейных пространств, совпадающий с дифференциалом $d_0\psi^\pm$ отображения $\psi^\pm$: $P \to W_0^\pm$ в нуле. Тогда

$$\chi^\pm = \psi^\pm \circ (l^\pm)^{-1} : L^\pm \to W_0^\pm$$

будет искомым отображением, удовлетворяющим условию $d_0\chi^\pm = \mathrm{id}$ и задающим ЛК на $W_0^\pm$, пробегающие $L^\pm$. Поскольку

$$\gamma_\perp(t) \sim \pm 4\exp(\mp t) \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty$$

то

$$l^\pm(x, y) = d_0\psi^\pm(x, y) = 4(\pm x, -x, \pm y, -y)$$

Требование, чтобы ЛК на сепаратрисе $W_0^\pm$ пробегали касательное подпространство $L^\pm = T_q W_0^\pm$ было удобно для формулирования теоремы 3. Однако для практического использования теоремы требуется ввести удобные координаты на самом линейном пространстве $L^\pm$ и использовать их в качестве ЛК на $W_0^\pm$. Применим изоморфизм $l^\pm$: $P \to L^\pm$ чтобы ввести на $L^\pm$ координаты, пробегающие плоскость P. Таким образом, возвращаемся от ЛК, задаваемых отображением $\chi^\pm : L^\pm \to W_0^\pm$, к исходным ЛК, задаваемым отображением $\psi^\pm$: $P \to W_0^\pm$.

Очевидно, точка $(\alpha_x^\pm, \mp\alpha_x^\pm, \alpha_y^\pm, \mp\alpha_y^\pm) \in L^\pm$ будет иметь координаты $\pm(\alpha_x^\pm, \alpha_y^\pm)/4 \in P$. Используя формулы для вектора $X_1(q, t)$ и проекций $\pi^\pm : \mathbb{C}^4 \to L^\pm$, получим, что $L^\pm$-значная функция $f^{\pm}(t) = \pi^{\pm}\exp(\pm t)X_1(q, t)$ в этих координатах примет вид $-\exp(\pm t)(a_x(t), a_y(t))/8$ (здесь $\Lambda^{\pm} = \mp\mathrm{id}$ – скалярный оператор в силу симметрии задачи). Поэтому

$$\mathrm{Res}_{t = t_k} f^{\pm} = -\mathbf{F}^{(\pm, k)}/8$$

Убедимся теперь, что комплексные ЛК (x, y) на комплексной сепаратрисе $W_0^{\pm}$ – аналитические вблизи начала координат и дадим описание “изотропной” части сепаратрисы. Если координате $\rho^{\pm} = \rho$ соответствует точка $w = \mathring{\psi}^{\pm}(\rho)$ на $\mathring{W}_0^{\pm}$, то координатам $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ соответствует точка $\psi^{\pm}(x, y) = T^{\theta}(w)$ на $W_0^{\pm}$. В силу свойства симметрии для координат точки $w = \mathring{\psi}^{\pm}(\rho)$ имеют место выражения

$$\gamma_x = \pm 4\rho + \rho f(\rho^2), \quad \gamma_y = 0, \quad \gamma_z = 1 + \rho^2 g(\rho^2)$$

$$\dot{\gamma}_x = -4\rho + \rho f_1(\rho^2), \quad \dot{\gamma}_y = 0, \quad \dot{\gamma}_z = \rho^2 g_1(\rho^2)$$

где $f(\rho^2)$, $g(\rho^2)$, $f_1(\rho^2)$, $g_1(\rho^2)$ – мероморфные функции, имеющие единственную особенность в точке $\rho^2 = -1$, которая соответствует особенностям функций $\gamma_{\perp}(t)$, $\gamma_{\parallel}(t)$. Поэтому координаты точки $T^{\theta}(w)$ выражаются формулами

$$\gamma_x = \pm 4x + xf(\rho^2), \quad \gamma_y = \pm 4y + yf(\rho^2), \quad \gamma_z = 1 + \rho^2 g(\rho^2)$$

$$\dot{\gamma}_x = -4x + xf_1(\rho^2), \quad \dot{\gamma}_y = -4y + yf_1(\rho^2), \quad \dot{\gamma}_z = \rho^2 g_1(\rho^2); \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

которые задают отображение $\psi^{\pm}$ на области неизотропности. Очевидно, отображение $\psi^{\pm}$ продолжается на множество изотропных координат (x, y), $x^2 + y^2 = 0$, и принимает там вид

$$\gamma_x = \pm 4x, \quad \gamma_y = \pm 4y, \quad \gamma_z = 1, \quad \dot{\gamma}_x = -4x, \quad \dot{\gamma}_y = -4y, \quad \dot{\gamma}_z = 0$$

Последние формулы задают траектории изотропных решений, а движение по этим траекториям определяется динамикой координат

$$(x, y) = \exp(\mp t)(x_0, y_0)$$

Эти формулы изотропных решений нетрудно получить также непосредственно из уравнения движения сферического маятника

$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = (\gamma_z - (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}))\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{g}$$

где $\mathbf{g} = (0, 0, -1)$ – ускорение свободного падения.

Итак, отображение $\psi^{\pm}$ оказывается мероморфным всюду на $\mathbb{C}^2\{(x, y)\}$ и имеет особенности в точках, где $x^2 + y^2 = -1$. На каждой сепаратрисе $W_0^{\pm}$ лежат в точности две траектории изотропных решений (соответственно двум случаям $x = \pm iy$, где i – мнимая единица). Эти решения не имеют предела при $t \to \mp\infty$, т.е. не принадлежат второй сепаратрисе $W_0^{\mp}$.

Условие теоремы 5 означает, что линейная оболочка множества $K^{\pm}$ совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}^2$ и, согласно определению 1', $J^{\pm}$ и $K^{\pm}$ находятся в общем положении, т.е. выполнены условия теоремы 3.

Пример. При горизонтальных синусоидальных колебаниях точки подвеса

$$a_x(t) = \cos\omega t, \quad a_y(t) = a_z(t) = 0$$

Тогда

$$-M_E(t_0, \theta) = 2\pi\frac{\omega^2\cos\omega t_0\cos\theta}{\operatorname{ch}(\pi\omega/2)}, \quad M_j(t_0, \theta) = 2\pi\frac{\omega\sin\omega t_0\sin\theta}{\operatorname{ch}(\pi\omega/2)}$$

Поэтому вектор Мельникова имеет четыре нуля (на прямоугольнике периодов)

$$\omega t_0 = \pm\frac{\pi}{2}\bmod 2\pi, \quad \theta = 0\bmod 2\pi; \quad \omega t_0 = 0\bmod 2\pi, \quad \theta = \pm\frac{\pi}{2}\bmod 2\pi$$

и все они простые. Два первых нуля соответствуют паре трансверсальных гомоклинических решений, лежащих в плоскости xz. Это – гомоклинические решения для плоского маятника, совершающего колебания в указанной плоскости. Два других нуля соответствуют паре трансверсальных гомоклинических решений, которые близки к двоякоасимптотическим решениям невозмущенной задачи, лежащим в плоскости yz, перпендикулярной направлению колебаний точки подвеса. Очевидно, теорема 3 гарантирует неинтегрируемость возмущенной системы в вещественной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dovbysh S.A.* Transversal intersection of separatrices and non-existence of an analytical integral in multi-dimensional systems // Variational and Local Methods in the Study of Hamiltonian Systems / Eds. A. Ambrosetti and G.F. Dell' Antonio. Singapore, etc: World Scientific, 1995. P. 156–165.
2. *Довбыш С.А.* Трансверсальное пересечение сепаратрис, структура множества квазислучайных движений и несуществование аналитического интеграла в многомерных системах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. Вып. 4. С. 153–154.
3. *Dovbysh S.A.* Transversal intersection of separatrices and branching of solutions as obstructions to the existence of an analytic integral in many-dimensional systems. I. Basic result: Separatrices of hyperbolic periodic points // Collect. Math. 1999. V. 50. № 2. P. 119–197.
4. *Довбыш С.А.* Ветвление решений в комплексной области с точки зрения символической динамики и неинтегрируемость многомерных систем // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 3. С. 303–306.
5. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
6. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
7. *Холостова О.В.* Некоторые задачи о движении маятника при горизонтальных вибрациях точки подвеса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 581–589.
8. *Gruendler J.* The existence of homoclinic orbits and the method of Melnikov for systems in $\mathbb{R}^n$ // SIAM J. Math. Analysis. 1985. V. 16. № 5. P. 907–931.
9. *Goriely A., Tabor M.* The singularity analysis for nearly integrable systems: homoclinic intersections and local multivaluedness // Physica D. 1995. V. 85. № 1–2. P. 93–125.
10. *Sternberg S.* Local contractions and a theorem of Poincaré // Amer. J. Math. 1957. V. 79. № 4. P. 809–824.
11. *Wiggins S.* Global Bifurcation and Chaos. Analytical Methods. N.Y., etc.: Springer, 1988. 494 p.
12. *Poincaré H.* Sur les équations de la dynamique et le problème des trois corps // Acta math. 1890. T. 13. P. 1–270 = *Пуанкаре А.* О проблеме трех тел и об уравнениях динамики // Избр. труды. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 357–444.

Москва
e-mail: sdovbysh@ yandex.ru

Поступила в редакцию
29.III.2005