УДК 531.384

© 2006 г. А. С. Кулешов

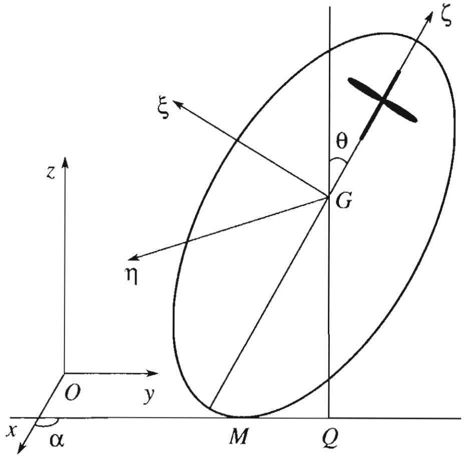
О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА НА АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Изучается задача о движении без скольжения динамически симметричного гиростата на неподвижной горизонтальной плоскости. В случае, когда поверхность гиростата и распределение масс в нем удовлетворяют некоторому условию, в дополнение и развитие результатов Х.М. Муштари [1], указывается явный вид двух дополнительных к интегралу энергии первых интегралов уравнений движения гиростата.

Чаплыгин [2], установив интегрируемость задачи о движении динамически симметричного тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости, отметил, что задача останется интегрируемой при добавлении к телу равномерно вращающегося динамически и геометрически симметричного ротора, ось вращения которого совпадает с осью симметрии тела. Уравнения движения гиростата подобного вида допускают, кроме интеграла энергии, два линейных относительно обобщенных скоростей первых интеграла. Однако явный вид этих интегралов известен лишь в случае, когда гиростат ограничен сферической поверхностью [2, 3]. В случае, когда гиростат – тяжелый диск, несущий ротор, ось вращения которого перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр масс, линейные по скоростям интегралы выражаются с помощью гипергеометрических рядов [2, 4]. При дополнительных ограничениях, налагаемых на моменты инерции тела и величину гиростатического момента ротора, были найдены [1] еще два случая, когда можно указать в явном виде все первые интегралы данной задачи: 1) поверхность тела, несущего ротор, образуется при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через ее фокус; 2) тело представляет собой параболоид вращения. Для гиростатов, поверхность которых имеет другую форму, явный вид линейных по скоростям первых интегралов неизвестен. Ниже делается попытка найти некоторые новые случаи, когда явно можно указать все интегралы задачи.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть твердое тело, симметричное по форме и распределению масс относительно некоторой оси, опирается в точке M на неподвижную горизонтальную плоскость Oxy. Присоединим к телу ротор, ось которого совпадает с осью симметрии тела. Тело с ротором представляет собой динамически симметричный гиростат [5]. Обозначим: θ – угол между осью симметрии тела и вертикалью, β – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, α – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox. Положение тела будет вполне определено углами α, β, θ и координатами x и y точки M.

Кроме того, введем систему координат $G\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс G гиростата, движущуюся и в пространстве и теле так, что ось $G\zeta$ совпадает с осью симметрии тела, ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана, а ось $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости (фигура). Пусть векторы скорости $\mathbf{v}$ центра масс G, угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела, угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ трехгранника $G\xi\eta\zeta$ и реакции плоскости $\mathbf{R}$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами v_ξ, v_η, v_ζ; p, q, r; Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ и R_ξ, R_η, R_ζ соответственно. Пусть m – масса гиростата, A_1 – момент инерции гиростата относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции тела относительно оси $G\zeta$. Гироста-



тический момент ротора относительно его оси вращения обозначим s; не принимая во внимание трения в подшипниках оси ротора, величину s можно считать постоянной.

Заметим [6], что расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ, т.е. $GQ = f(\theta)$. Координаты ξ, η, ζ точки M касания тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ, причем $\eta = 0$, а

$$\xi = -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta, \quad \zeta = -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta \tag{1.1}$$

Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то $\Omega_\xi = p$, $\Omega_\eta = q$. Плоскость $G\xi\zeta$ будет все время вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta - \Omega_\xi \operatorname{ctg}\theta = 0$. Скорость точки касания равна нулю, следовательно,

$$\upsilon_\xi + q\zeta = 0, \quad \upsilon_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad \upsilon_\zeta - q\xi = 0$$

Теорема о движении центра масс в проекции на ось $G\eta$ и теорема об изменении кинетического момента для осей $G\xi$ и $G\zeta$ после простых преобразований дают

$$\begin{gathered}\frac{d(p\zeta - r\xi)}{dt} - pq(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi) = \frac{R_\eta}{m} \\ A_1\frac{dp}{dt} + (A_3 r + s - A_1 p\operatorname{ctg}\theta)q = -\zeta R_\eta, \quad A_3\frac{dr}{dt} = \xi R_\eta\end{gathered} \tag{1.2}$$

Отбрасывая в дальнейшем частный случай $\theta = \mathrm{const}$ и имея в виду, что $q = -d\theta/dt$, по исключении R_η из системы (1.2) получим

$$\begin{gathered}A_1\frac{dp}{d\theta} + A_3\frac{\zeta}{\xi}\frac{dr}{d\theta} = -A_1 p\operatorname{ctg}\theta + A_3 r + s \\ \zeta\frac{dp}{d\theta} - \frac{A_3 + m\xi^2}{m\xi}\frac{dr}{d\theta} = -(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi + \zeta')p + \xi' r\end{gathered} \tag{1.3}$$

Таким образом, из системы (1.3) определяются два линейных относительно p и r первых интеграла уравнений движения гиростата. К настоящему времени явный вид этих интегралов получен лишь в нескольких частных случаях [1–4]. В данной работе указываются некоторые новые случаи, когда в задаче о движении динамически симметричного гиростата можно найти в явном виде линейные по p и r первые интегралы.

2. Получение первых интегралов. Систему уравнений (1.3) можно представить в виде

$$\frac{d\tau}{d\theta} = h(\theta)r + u_1(\theta)s, \quad \frac{dr}{d\theta} = z(\theta)\tau + u_2(\theta)s \tag{2.1}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tau = m\sqrt{\Delta}[A_1 p\sin\theta + Br]$$

$$h(\theta) = m\sqrt{\Delta}\left(A_3\sin\theta + \frac{dB}{d\theta}\right), \quad z(\theta) = \frac{\xi(\xi+\zeta')}{\Delta^{3/2}\sin\theta}$$

$$u_1(\theta) = m\sqrt{\Delta}\sin\theta\left[1 - \frac{m\zeta(A_1\xi\xi' + A_3\zeta\zeta')}{\Delta(\xi+\zeta')}\right], \quad u_2(\theta) = \frac{m\xi\zeta}{\Delta}$$

$$\Delta = A_1A_3 + A_1m\xi^2 + A_3m\zeta^2, \quad B = \frac{(A_3\zeta - A_1\xi')\sin\theta}{\xi+\zeta'}$$

Предположим, что поверхность гиростата и распределение масс в нем таковы, что выполняется условие

$$B = A_3(\cos\theta + \sigma) \tag{2.2}$$

где σ – произвольная постоянная.

Впервые условие (2.2) было выписано [1] при изучении движения тяжелого динамически симметричного тела вращения (без ротора). Было показано [1], что при выполнении этого условия уравнения движения тела вращения (имеющие вид уравнений (1.3), в которых положено $s = 0$) допускают первый интеграл $r = r_0 = \text{const}$. В данном случае при выполнении условия (2.2) имеем $h(\theta) \equiv 0$ и из первого уравнения системы (2.1) следует, что сохраняется величина

$$\tau - s\varphi_1(\theta) = \tau_0 = \text{const}; \quad \varphi_1(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} u_1(t)dt \tag{2.3}$$

После некоторых упрощений данный интеграл представляется в виде

$$\sqrt{\Delta}\left[A_1p\sin\theta + A_3r(\cos\theta+\sigma) + \frac{\zeta\sin\theta}{\xi+\zeta'}s\right] - s\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\Delta}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta\sin t}{\xi+\zeta'}\right) + \sin t\right]dt = c_1 \tag{2.4}$$

После нахождения интеграла (2.4) легко найти явный вид и другого первого интеграла. Используя соотношение (2.3), находим

$$\tau = \tau_0 + s\varphi_1(\theta)$$

Подставляя полученное выражение для τ во второе уравнение системы (2.1), приведем его к виду

$$dr/d\theta = z(\theta)\tau_0 + (u_2(\theta) + z(\theta)\varphi_1(\theta))s$$

Следовательно, уравнения (2.1) допускают, помимо интеграла (2.4), также интеграл

$$r - mc_1\psi_1(\theta) - s\psi_2(\theta) = c_2$$

$$\psi_1(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\xi(\xi+\zeta')}{\Delta^{3/2}\sin t}dt, \quad \psi_2(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta}[u_2(t) + z(t)\varphi_1(t)]dt \tag{2.5}$$

Таким образом, при выполнении условия (2.2) уравнения движения динамически симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости допускают первые интегралы (2.4) и (2.5). Выясним теперь, какую форму должна иметь поверхность гиростата, чтобы для нее выполнялось условие (2.2).

3. Определение формы поверхности гиростата. Рассмотрим условие (2.2) и предположим сначала, что $\sigma = 0$. Подставляя в условие (2.2) выражения (1.1) для ξ, ζ и их производных и вводя безразмерный параметр $k = A_3/A_1$, найдем, что функция $f(\theta)$, определяющая форму поверхности гиростата, должна удовлетворять уравнению

$$(k-1)f''\sin\theta\cos\theta - kf' + (k-1)f\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{3.1}$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (3.1) имеет два частных решения

$$1)\ k = \frac{2}{3},\quad f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin\theta},\quad 2)\ k = 2,\quad f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos\theta} \tag{3.2}$$

впервые указанные Муштари [1]. Выясним, какие еще решения имеет данное уравнение. Положим

$$f(\theta) = g(\theta)/\cos\theta$$

Тогда для функции $g(\theta)$ уравнение (3.1) запишется следующим образом:

$$g'' + 2\left(\frac{\kappa}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)g' + \frac{2\kappa}{\cos^2\theta}g = 0;\quad \kappa = \frac{k/2-1}{k-1} \tag{3.3}$$

Делая в уравнении (3.3) замену независимой переменной по формуле

$$w = 1/\cos^2\theta$$

приведем его к гипергеометрическому уравнению Гаусса [7]

$$w(1-w)\frac{d^2g}{dw^2} + \left[2 - \left(\frac{3}{2}+\kappa\right)w\right]\frac{dg}{dw} - \frac{\kappa}{2}g = 0 \tag{3.4}$$

Таким образом, уравнение (3.1) имеет нетривиальное частное решение

$$f_0(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}F\left(\frac{1}{2}, \kappa, 2; \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

а общее решение уравнения (3.1) записывается следующим образом:

$$f(\theta) = f_0(\theta)\left(\lambda + \mu\int\frac{(\operatorname{tg}\theta)^{k/(k-1)}}{f_0^2(\theta)}d\theta\right) \tag{3.5}$$

Здесь $F = F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [7]. Покажем, как получить из общего решения (3.5) частные решения (3.2). Для этого сделаем два предположения. Пусть в формуле (3.5) постоянная $\mu = 0$. Тогда функция $f(\theta)$ определяется формулой

$$F(\theta) = \frac{\lambda}{\cos\theta}F\left(\frac{1}{2}, \kappa, 2; \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

Теперь предположим, что функция F в данном выражении представлена конечной суммой, т.е. [7] один из ее параметров равен отрицательному целому числу или нулю. В рассматриваемом случае это означает, что $\kappa = -N$, где N – натуральное число или нуль. Отсюда находим

$$k = 2(N+1)/(2N+1) \tag{3.6}$$

Пользуясь формулой [7]

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{-a}F(a, c-b, c; z(z-1)^{-1})$$

можно также сделать вывод, что гипергеометрический ряд будет конечной суммой, если число $c - b$ равно отрицательному целому числу. В рассматриваемом случае это условие дает $2 - \kappa = -N$, откуда находим

$$k = 2(N+1)/(2N+3) \tag{3.7}$$

При $N = 0$ из равенства (3.6) получаем $k = 2$, а из равенства (3.7) следует $k = 2/3$. Следовательно, частные решения (3.2), впервые указанные Муштари [1], получаются из общего решения (3.5) при $\mu = 0$ и $N = 0$. В общем случае множество функций, удовлетворяющих уравнению (3.1), определяется формулой (3.5) и имеет мощность континуума.

Предположим теперь, что в условии (2.2) постоянная $\sigma \neq 0$. В этом случае уравнение для определения функции $f(\theta)$ будет иметь вид

$$\sin\theta((k-1)\cos\theta + k\sigma)f'' - k(1+\sigma\cos\theta)f' + (k-1)\sin\theta\cos\theta f = 0 \tag{3.8}$$

Делая в уравнении (3.8) замену независимой переменной по формуле

$$w = \cos^2(\theta/2)$$

приведем его к уравнению

$$\begin{aligned} & w(w-1)(w-a_1)\frac{d^2f}{dw^2} + [(\alpha_1+\beta_1+1)w^2 - \\ & -[\alpha_1+\beta_1+1+a_1(\gamma_1+\delta_1)-\delta_1]w + a_1\gamma_1]\frac{df}{dw} + (\alpha_1\beta_1 w - q_1)f = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

известному как уравнение Хейна [8, 9]. В рассматриваемом здесь случае

$$a_1 = -\frac{1}{4\gamma_1}, \quad \alpha_1 = -\beta_1 = 1, \quad q_1 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2(1+k(\sigma-1))}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2(1-k(\sigma+1))}$$

При $|a_1| \geq 1$ и $\gamma_1 \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ решение уравнения (3.9) может быть представлено в виде ряда

$$F(a_1, q_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1; w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \tag{3.10}$$

коэффициенты которого определяются рекуррентными формулами

$$c_1 = 1, \quad a_1\gamma_1 c_1 = q_1$$

$$\begin{aligned} & a_1(n+1)(\gamma_1+n)c_{n+1} = \left[a_1(\gamma_1+\delta_1+n-1)+\alpha_1+\beta_1-\delta_1+n+\frac{q_1}{n}\right]nc_n - \\ & -[(n-1)(n-2)+(n-1)(\alpha_1+\beta_1+1)+\alpha_1\beta_1]c_{n-1} \end{aligned}$$

Этот ряд заведомо сходится при $|w| \leq 1$. Отметим, однако, что уравнение Хейна (3.9) изучено гораздо меньше, нежели гипергеометрическое уравнение. Так, например, в отличие от гипергеометрической функции, для функции Хейна (3.10) не имеется интегрального представления. Также мало что известно о том, к каким функциям сводится функция Хейна при частных значениях ее параметров.

Таким образом, при $\sigma = 0$ поверхность тела, удовлетворяющая условию (2.2), определяется при помощи гипергеометрической функции (см. формулу (3.5)), а при $\sigma \neq 0$ – при помощи функции Хейна (3.10).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00398) программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1) и программы "Государственная поддержка молодых ученых – кандидатов наук и их научных руководителей" (МК-1393.2003.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муштари Х.М.* О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Мат. сб. 1932. Т. 39. № 1, 2. С. 105–126.
2. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // *Чаплыгин С.А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. С. 4–27.
3. *Дувакин А.П.* Об устойчивости движения волчка с гироскопом на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // Инж. ж. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 131–134.
4. *Мартыненко Ю.Г.* Устойчивость неуправляемых движений одноколесного мобильного робота с маховичной системой стабилизации // Проблемы механики современных машин. Матер. междунар. конф. Улан-Удэ, 2000. Т. 1. С. 96–101.
5. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. Bologna: Nicola Zanichelli Editore, 1930 = *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
6. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. *Whittaker E.T., Watson J.N.* A course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1927 = *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
9. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. Физматлит, 1995. 559 с.

Москва
e-mail: kuleshov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
15.III.2004