УДК 531.36

© 2006 г. Т. В. Сальникова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследуется устойчивость линейных потенциальных систем с вырожденной матрицей гироскопических сил. Особое внимание уделяется случаю трех степеней свободы. В развитие известных результатов [1] получены достаточные условия гироскопической устойчивости. Предлагается алгоритм применения этих условий на примере задачи о движении двух взаимно гравитирующих тел, каждое из которых моделируется двумя одинаковыми точечными массами, соединенными невесомыми нерастяжимыми стержнями.

Рассмотрим задачу об устойчивости равновесия линейной динамической системы с n степенями свободы, описываемой уравнениями

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + Px = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \Gamma^T = -\Gamma, \quad P^T = P, \quad \det P \neq 0 \tag{1}$$

Матрицу P можно считать диагональной.

Для случая, когда потенциальная энергия имеет максимум и $\det\Gamma \neq 0$, имеется много работ по устойчивости положения равновесия (см. краткий обзор в [2]). Для коммутирующих матриц ($P\Gamma = \Gamma P$) условием устойчивости является положительная определенность матрицы $P - \Gamma^2/4$ [3]. Были установлены [4–6] условия устойчивости решения $x = 0$ для отрицательно определенной матрицы потенциальной энергии P и невырожденной матрицы гироскопических сил Γ, а также получены оценки значений параметров, при которых имеет место устойчивость положения равновесия. В этом случае число степеней свободы обязательно четно. Для нечетного числа степеней свободы матрица Γ вырождена, поэтому упомянутые выше результаты неприменимы. Был получен [7] критерий устойчивости равновесия заряженной частицы в электромагнитном поле, а также общей гироскопической системы с тремя степенями свободы. С помощью теории параметрического резонанса найдены [1] достаточные условия гироскопической устойчивости для ненулевых матриц Γ минимального ранга, равного двум. Цель данной работы – изучение условий устойчивости реальных систем, когда матрица кинетической энергии не единична.

Рассмотрим малые колебания системы вблизи положения равновесия, удовлетворяющие линейному уравнению с n степенями свободы

$$M\ddot{z} + G\dot{z} + Kz = 0, \quad z \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Матрица кинетической энергии системы $M = M^T$ положительно определена, $K = K^T$ – матрица потенциальной энергии, $G^T = -G$ – матрица гироскопических сил, rank $G = 2k$.

Теорема. Достаточными условиями гироскопической устойчивости нулевого решения (2) является положительная определенность матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, где

$$\tilde{A} = K - GM^{-1}G/4, \quad \tilde{B} = (GM^{-1}G + \gamma^2 M)/4 - K; \quad \gamma^2 = -\lambda^2 \tag{3}$$

γ – характеристика интенсивности гироскопических сил, λ – ненулевой корень характеристического уравнения

$$|G - \lambda M| = 0 \tag{4}$$

Замечание. Теорема справедлива для случая, когда матрица гироскопических сил G имеет вид, указанный ниже.

Доказательство теоремы. Следуя известному подходу [1], рассмотрим малые колебания динамической системы вблизи положения равновесия, удовлетворяющие линейному уравнению (1). Точка $x = 0$ – положение равновесия. Пусть матрица гироскопических сил имеет вид

$$\Gamma = \gamma S^T I_k S$$

$$I_k = \operatorname{diag}(I, \ldots, I, 0), \quad I = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \operatorname{rank} I_k = 2k, \quad \gamma > 0 \tag{5}$$

S – ортогональная $(n \times n)$-матрица. Ясно, что $\operatorname{rank}\Gamma = 2k$. Можно показать, что при $n = 3$ любая кососимметричная матрица ранга 2 всегда имеет вид (5), где, конечно, $k = 1$.

Было доказано [1], что если матрица гироскопических сил имеет вид (5) и $x = 0$ – строгий минимум измененной потенциальной энергии

$$W(x) = (Px, x) + (\Gamma x, \Gamma x)/4 \tag{6}$$

а также строгий максимум разности $W(x) - \gamma^2(x, x)/4$, то $x = 0$ – устойчивое положение равновесия системы (1). Таким образом, задача сводится к проверке положительной определенности матриц

$$A = (P - \Gamma^2/4), \quad B = -(P - \Gamma^2/4 - \gamma^2 E/4) \tag{7}$$

где E – единичная $(n \times n)$-матрица.

Получим аналогичные условия для уравнений движения системы (2). Для любых матриц $M = M^T \geq 0$ и $K = K^T$ существует невырожденная матрица C, такая, что

$$M = C^T C, \quad K = C^T P C$$

Система (1) сводится к системе (2), если положить $x = Cz$ и умножить левую и правую части равенства (1) слева на C^T. При этом матрица Γ принимает вид $G = C^T \Gamma C$, причем $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank}\Gamma$ ввиду невырожденности матрицы C. Тогда

$$W(Cz) = (PCz, Cz) + (\Gamma Cz, \Gamma Cz)/4 =$$

$$= (Kz, z) + (G^T M^{-1} Gz, z) = W(z) = (Kz, z) - (GM^{-1}Gz, z)$$

Итак, необходима проверка положительной определенности матрицы $\tilde{A}$, определяемой первым равенством (3).

Покажем, что матрица B имеет вид матрицы $\tilde{B}$, т.е. необходимо проверять условие $\tilde{B} \geq 0$.

Действительно,

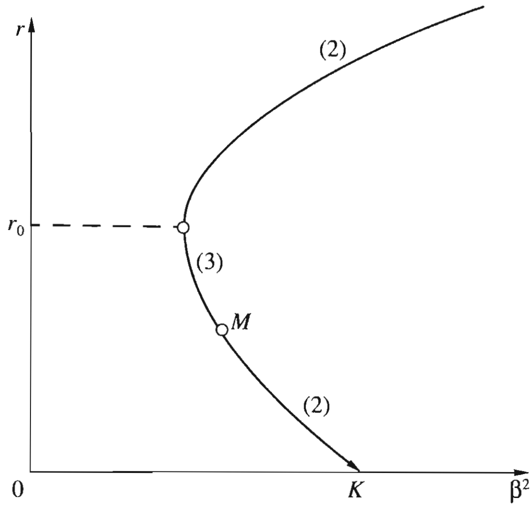
$$W(x) - \gamma^2(x, x)/4 = (Kz, z) - (GM^{-1}Gz, z) + \lambda^2(Mz, z)/4$$

причем $\lambda^2 = -\gamma^2$ находится из условия

$$|\Gamma - \lambda E| = 0 \tag{8}$$

которое при $n = 3$ эквивалентно условию

$$\left|\gamma S^T I S - \lambda E\right| = \left|\gamma I - \lambda S E S^T\right| = -\lambda(\lambda^2 + \gamma^2) = 0$$



В общем случае условие (8) принимает вид

$$\left|C^T \Gamma C - \lambda C^T C\right| = 0$$

что эквивалентно уравнению (4). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим плоское движение двух взаимно гравитирующих тел с массами m_1 и m_2, каждое из которых моделируется двумя одинаковыми точечными массами, соединенными невесомыми нерастяжимыми стержнями длиной a_1 и a_2 соответственно. Движение определяется координатами r, φ, φ_1, φ_2, где r – расстояние между центрами масс тел, φ – угол между прямой, соединяющей центры масс, и неподвижной прямой в плоскости движения, φ_1 и φ_2 – углы между стержнями и прямой, соединяющей центры масс. Были рассмотрены [8] стационарные движения вида $r = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \text{const}$, $\varphi_1 = \text{const}$, $\varphi_2 = \text{const}$ для случаев: 1) $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, 2) $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$, 3) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, 4) $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = 0$.

Вопрос об устойчивости стационарного движения в случае 1 был исследован полностью. Обратимся к случаю 2 (случаи 3 и 4 могут быть рассмотрены аналогично).

Стационарные движения $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$, $r = r(\beta^2)$, где β – постоянная циклического интеграла, соответствующего циклической координате φ, всегда неустойчивы по Ляпунову. Гироскопическая стабилизация возможна лишь для ветви MK (фигура), где функция $r(\beta^2)$ убывает и степень неустойчивости равна 2 [8, 9]. В точке M происходит смена устойчивости, так как имеет место ветвление решения.

Проверим условия теоремы для конкретных значений параметров, соответствующих ветви MK.

Движение системы описывается уравнением (2), где

$$z = \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ r \end{Vmatrix}, \quad M = \begin{Vmatrix} \kappa\mu_1 & -\kappa a_1^2 a_2^2 & 0 \\ -\kappa a_1^2 a_2^2 & \kappa\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix}, \quad G = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\nu_1 \\ 0 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\kappa = \frac{m_1 m_2}{J}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad J = mr^2 + m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2$$

$$\mu_j = \frac{m_j}{m_1 + m_2} a_j^2 r^2 + a_1^2 a_2^2, \quad \nu_j = \frac{2\beta m m_j}{J^2} a_j^2 r, \quad j = 1, 2$$

Для рассматриваемого стационарного движения $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ матрица K может быть записана в виде

$$K = f\frac{m_1 m_2}{2}\begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{Vmatrix}$$

$$k_{jj} = a_1 a_2 b_1^- - 3r^2 b_2^+ a_j^2, \quad j = 1, 2; \quad k_{12} = k_{21} = -a_1 a_2 (b_1^- - 3r^2 b_2^-)$$

$$k_{33} = r^2 (4b_1^+ (r^2 + a_1^2 (m_1 + m_2)/m_2 + a_2^2 (m_1 + m_2)/m_1)^{-1} - 3b_2^+)$$

$$b_j^{\pm} = (r^2 + (a_1 - a_2)^2)^{-j-1/2} \pm (r^2 + (a_1 + a_2)^2)^{-j-1/2}, \quad j = 1, 2$$

где $f = 6.67 \cdot 10^{-7}$ км^3/(т $\cdot$ с^2) – постоянная тяготения. Примем значения параметров тел, соответствующие двойным астероидам [10]: $m_1 = 10^{18}$т, $m_2 = 10^{15}$т, $a_1 = 100$ км, $a_2 = 10$ км.

Для $r = 100$ км все три собственных значения матрицы K отрицательны, т.е. степень неустойчивости равна трем, и гироскопическая стабилизация невозможна. При уменьшении r, например до $r = 10$ км, $\beta = 0.835 \cdot 10^{25}$; два собственных значения матрицы K отрицательны, а одно положительно, т.е. степень неустойчивости равна двум; система находится на ветви MK (фигура). Собственные значения матрицы $\tilde{A}$: $-0.33 \cdot 10^{24}$, $0.13 \cdot 10^{22}$, $0.13 \cdot 10^{25}$, матрицы $\tilde{B}$: $0.5 \cdot 10^{24}$, $-0.1 \cdot 10^{25}$, $0.9 \cdot 10^{20}$. Следовательно, матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не являются положительно определенными, а значит, стационарные движения гироскопически неустойчивы. Аналогичная ситуация сохраняется при дальнейшем уменьшении r.

Рассмотрим теперь максимально приближенные к реально существующим объектам значения параметров. Обнаруженные в 2001 г. парные астероиды Ида и Дактиль имеют массы $\approx 10^{14}$ и 10^{11} т, размеры ≈ 60 и 1.4 км, расстояние между ними $r \approx 80$ км.

Степень неустойчивости равна двум, необходимое условие гироскопической устойчивости выполнено. Собственные значения матрицы $\tilde{A}$: $0.12 \cdot 10^{14}$, $0.07 \cdot 10^{22}$, $0.17 \cdot 10^{26}$, матрицы $\tilde{B}$: $0.92 \cdot 10^{15}$, $0.53 \cdot 10^{22}$, $0.14 \cdot 10^{12}$, т.е. матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ положительно определены, откуда следует гироскопическая устойчивость в первом приближении.

Автор благодарит В.В. Козлова, В.В. Белецкого и А.В. Карапетяна за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Гироскопическая стабилизация и параметрический резонанс // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 739–745.
2. *Булатович Р.М.* Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 385–389.

3. *Huseyin K., Hagedorn P., Teschner W.* On the stability of linear conservative gyroscopic systems // ZAMP. 1983. Bd 34. H. 6. S. 807–815.
4. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. *Лахаданов В.М.* О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53–58.
6. *Карапетян А.В.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Teor. i Primen. Meh. 1994. № 20. S. 89–93.
7. *Козлов В.В.* О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 390–397.
8. *Карапетян А.В., Шаракин С.А.* О стационарных движениях двух взаимно гравитирующих тел и их устойчивость // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 1. С. 42–48.
9. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
10. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Нариманова Г.С. и Тихонравова М.К. М.: Машиностроение, 1972. 107 с.

Москва
e-mail: tatsalni@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
21.X.2004