

УДК 531.36 : 534.1

© 2006 г. Т. В. Попова

**О РЕАЛИЗАЦИИ НЕУДЕРЖИВАЮЩИХ СВЯЗЕЙ
В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
С ВЫРОЖДЕНИЕМ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ**

Рассматривается способ реализации неудерживающих связей путем введения в кинетическую энергию малого параметра, так что кинетическая энергия системы вырождается на некотором многообразии в конфигурационном пространстве, когда параметр равен нулю. Исследуется поведение системы в окрестности многообразия вырождения в многомерном случае при стремлении малого параметра к нулю. Полученные результаты используются в задаче о движении двойного математического маятника в случае, когда масса точки, ближайшей к точке подвеса, мала.

Реализация связей в случае вырождения кинетической энергии на некотором многообразии впервые была рассмотрена Дираком [1, 2] для целей квантовой механики; при этом изучалось поведение траекторий на этом многообразии, что соответствует реализации удерживающей связи. "Обобщенный гамильтонов формализм Дирака" был использован [3] в задаче о реализации односторонней голономной связи упругими силами. Было исследовано [4] поведение системы в окрестности многообразия вырождения в двумерном случае.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении в пространстве системы N частиц с массами m_i , стесненных стационарными голономными идеальными связями. На частицы действует сила с потенциальной энергией $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, где \mathbf{r}_i – радиус-вектор i -й частицы. Предположим, что система имеет n степеней свободы. Введем обобщенные координаты $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ в некоторой области $\Sigma \subset \mathbf{R}^{3N}$ в конфигурационном пространстве системы. Тогда $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\bar{x})$ ($i = 1, \dots, N$).

В обобщенных координатах кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad c_{ij}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_j} \right)$$

Будем считать, что массы одной или нескольких частиц малы (порядка ϵ^2), тогда матрица кинетической энергии $C(\bar{x}, \epsilon^2) = (c_{ij})$ зависит от параметра ϵ . Предположим, что эта зависимость такова, что при $\epsilon = 0$ определитель матрицы $C(\bar{x}, 0)$ обращается в нуль на некоторой гиперповерхности $\Lambda \subset \Sigma$, задаваемой уравнением

$$f(\bar{x}) = \det C(\bar{x}, 0) = 0$$

Будем считать, что $df|_{\Lambda} \neq 0$. Тогда Λ – гладкая гиперповерхность, и можно выбрать локальные обобщенные координаты таким образом, что $\Lambda = \{x_n = 0\}$.

Исследуем поведение траекторий системы при $\epsilon \rightarrow 0$.

Пример. Рассмотрим задачу о движении точки внутри $(n - 1)$ -мерного эллипсоида

$$Q = \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1 \right\} \subset \mathbf{R}^n$$

Следуя Биркгофу [5], задачу можно рассматривать как предельную для задачи о движении точки по поверхности n -мерного эллипсоида

$$\tilde{Q} = \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} + \frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} = 1 \right\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

у которого полуось a_{n+1} мала (порядка ϵ).

Заменой переменных $x_{n+1} \rightarrow \epsilon x_{n+1}$ зафиксируем поверхность n -мерного эллипсоида, тогда кинетическая энергия будет зависеть от малого параметра ϵ и примет вид

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 + \epsilon^2 \dot{x}_{n+1}^2)$$

Рассмотрим отображение проектирования поверхности n -мерного эллипсоида на \mathbf{R}^n вдоль направления x_{n+1} . Множество критических точек отображения проектирования образует многообразие на поверхности n -мерного эллипсоида, проекция которого совпадает с $(n-1)$ -мерным эллипсоидом исходной задачи. Можно показать, что при $\epsilon = 0$ кинетическая энергия системы вырождается на этом многообразии.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \epsilon) = T(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \epsilon^2) - V(\bar{x}, \epsilon)$$

где $V(\bar{x}, \epsilon)$ – потенциальная энергия системы в обобщенных координатах. Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$C(\bar{x}, \epsilon^2) \ddot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \epsilon); \quad F = (F_i), \quad i = 1, \dots, n \tag{1.1}$$

где $F_i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \epsilon)$ – функция, зависящая от потенциальной и кинетической энергии.

Определение. Пусть $\gamma_\epsilon(t) = \gamma(t, \epsilon)$, $t \in [a, b]$ – решение уравнений Лагранжа (1.1) при некоторых начальных условиях $\gamma_\epsilon(a) = \bar{x}_0$, $\dot{\gamma}_\epsilon(a) = \dot{\bar{x}}_0$. Если при $\epsilon \rightarrow 0$ существует предел γ_0 функций γ_ϵ по норме C^1 , т.е. $\lim \|\gamma_\epsilon - \gamma_0\|_{C^1} = 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$, то будем называть кривую γ_0 предельной траекторией.

Так как при $\epsilon = 0$ определитель матрицы $C(\bar{x}, 0)$ отличен от нуля всюду, кроме гиперповерхности Λ , то в силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от параметра, предельные траектории в области $\Sigma \setminus \Lambda$ являются решениями предельных уравнений Лагранжа $C(\bar{x}, 0) \ddot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, 0)$. Таким образом, для нахождения предельной траектории в области $\Sigma \setminus \Lambda$ достаточно решить уравнения Лагранжа при $\epsilon = 0$ в области $\Sigma \setminus \Lambda$.

2. Поведение траекторий системы в окрестности гиперповерхности вырождения.

Предположим, что потенциальная энергия системы четна по x_n , а кинетическая энергия инвариантна относительно преобразования $x_n \rightarrow -x_n$ и при $\epsilon = 0$ невырождена по \dot{x} , где $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. При этих предположениях можно отождествить области $\Sigma_+ = \{(x, x_n), x_n \geq 0\} \subset \Sigma$ и $\Sigma_- = \{(x, x_n), x_n \leq 0\} \subset \Sigma$ и рассматривать движение точки в области Σ_+ с границей Λ .

Существует невырожденная замена переменных [6] $(x, x_n) \rightarrow (q, q_n)$, $q_n = x_n$, приводящая кинетическую энергию системы

$$T(\dot{x}, \dot{x}_n, x, x_n, \epsilon^2) = \frac{1}{2}(\bar{A}(x, x_n^2, \epsilon^2)\dot{x}, \dot{x}) + (\bar{b}(x, x_n^2, \epsilon^2), \dot{x})x_n\dot{x}_n + \frac{1}{2}\bar{c}(x, x_n^2, \epsilon^2)\dot{x}_n^2$$

к виду

$$T(\dot{q}, \dot{q}_n, q, q_n, \epsilon^2) = \frac{1}{2}(\hat{A}(q, q_n^2, \epsilon^2)\dot{q}, \dot{q}) + \frac{1}{2}\hat{c}(q, q_n^2, \epsilon^2)\dot{q}_n^2$$

Так как кинетическая энергия системы вырождена на Λ при $\varepsilon = 0$ и $\det \hat{A}(q, 0, 0) \neq 0$, то $\hat{c}(q, 0, 0) = 0$. Следовательно, $\hat{c}(q, q_n^2, 0) = c(q, q_n^2)q_n^2$. Будем считать, что $c(q, 0) > 0$, случай $c(q, 0) = 0$ соответствует вырождению более высокого порядка.

В результате в новых переменных кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}([A(q, q_n^2) + \varepsilon^2 \tilde{A}(q, q_n^2, \varepsilon^2)]\dot{q}, \dot{q}) + \frac{1}{2}(c(q, q_n^2)q_n^2 + \varepsilon^2 \tilde{c}(q, q_n^2, \varepsilon^2))\dot{q}_n^2 \quad (2.1)$$

Пусть $V = V(q, q_n^2, \varepsilon)$ – потенциальная энергия в новых координатах. Вводя обобщенные импульсы

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \quad p_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}$$

запишем функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(Bp, p) + \frac{p_n^2}{2(cq_n^2 + \varepsilon^2 c)} + V + \varepsilon^2 H_1; \quad B = A^{-1}, \quad H_1 = -\frac{1}{2}(A^{-1} \tilde{A} A^{-1} p, p) \quad (2.2)$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p} = -\frac{1}{2}(B'_q p, p) + \frac{p_n^2(c'_q q_n^2 + \varepsilon^2 \tilde{c}'_q)}{2(cq_n^2 + \varepsilon^2 \tilde{c})^2} - \frac{\partial V}{\partial q} - \varepsilon^2 \frac{\partial H_1}{\partial q}, \quad \dot{q} = Bp + \varepsilon^2 \frac{\partial H_1}{\partial p}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{1}{2}(B'_{q_n} p, p) + \frac{p_n^2(c'_{q_n} q_n^2 + 2cq_n + \varepsilon^2 \tilde{c}'_{q_n})}{2(cq_n^2 + \varepsilon^2 \tilde{c})^2} - \frac{\partial V}{\partial q_n} - \varepsilon^2 \frac{\partial H_1}{\partial q_n}, \quad \dot{q}_n = \frac{p_n}{cq_n^2 + \varepsilon^2 \tilde{c}}$$

Разложим $B(q, q_n^2)$ и $V(q, q_n^2, \varepsilon)$ по степеням q_n

$$B(q, q_n^2) = B_0(q) + \frac{1}{2}B_1(q)q_n^2 + B_2(q, q_n^2)q_n^4 \quad (2.3)$$

$$V(q, q_n^2, \varepsilon) = v_0(q, \varepsilon) + \frac{1}{2}v_1(q, \varepsilon)q_n^2 + v_2(q, q_n^2, \varepsilon)q_n^4$$

Выполнив замену переменных $p_n = \varepsilon^2 z$, $q_n = \varepsilon y$, с учетом разложения (2.3) запишем уравнения Гамильтона в окрестности $\Omega_\varepsilon = \{|p_n| \leq \varepsilon^2, |q_n| \leq \varepsilon\}$ многообразия $\tilde{\Lambda} = \{p_n = 0, q_n = 0\}$ в фазовом пространстве, введя обозначения

$$N(p, q) = v_1(q, 0) + \frac{1}{2}(B_1 p, p) \quad (2.4)$$

$$H_0(p, q) = \frac{1}{2}(B_0(q)p, p) + v_0(q, 0) \quad (2.5)$$

$$F(p, q, z, y) = \frac{z^2}{2(cy^2 + \tilde{c})} + \frac{1}{2}N(p, q)y^2 \quad (2.6)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H_0}{\partial q} + \varepsilon h_1(p, q, z, y, \varepsilon), & \dot{q} &= \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon h_2(p, q, z, y, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} &= -\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon f_1(p, q, z, y, \varepsilon), & \varepsilon \dot{y} &= \frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где h_1, h_2, f_1 – некоторые функции; в силу четности функции Гамильтона относительно переменной q_n получаем, что $f_1(p, q, 0, 0, \varepsilon) = 0$.

Замечание. Положим $\varepsilon = 0$ и рассмотрим предельную систему в координатах $q, s = q_n^2/2$. Покажем, что функция $N(p, q)$ имеет механический смысл нормальной реакции к гиперповерхности $\Lambda = \{s = 0\}$ при движении по этой гиперповерхности.

Напомним, что если на систему наложена связь $f(q, s) = 0$, то движения системы описываются уравнениями Лагранжа с неопределенным множителем λ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{\partial V}{\partial s} + \lambda \frac{\partial f}{\partial s}$$

а неопределенный множитель Лагранжа λ пропорционален реакции связи $f(q, s) = 0$ [6]. Поскольку кинетическая энергия системы имеет вид (2.1) и $f(q, s) = s$, то уравнения Лагранжа при $\varepsilon = 0$ примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad c\ddot{s} + c'_s \dot{s} - \frac{1}{2}(A'_s \dot{q}, \dot{q}) - \frac{1}{2}c'_s \dot{s}^2 = -\frac{\partial V}{\partial s} + \lambda \quad (2.8)$$

Используя разложение

$$A(q, 2s) = A_0(q) + A_1(q)s + A_2(q, s)s^2$$

находим

$$A^{-1} = (A_0(E + A_0^{-1}A_1s + A_0^{-1}A_2s^2))^{-1} = A_0^{-1} - A_0^{-1}A_1A_0^{-1}s + A_2^{-1}s^2$$

С учетом разложения (2.3) получаем $B_1 = -A_0^{-1}A_1A_0^{-1}$. Поскольку $p = A_0\dot{q}$ при $s = 0$, то

$$(B_1p, p) = -(A_0^{-1}A_1A_0^{-1}p, p) = -(A_0^{-1}A_1A_0^{-1}A_0\dot{q}, A_0\dot{q}) = -(A_1\dot{q}, \dot{q})$$

Так как при движении по связи

$$s = 0, \quad \dot{s} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial s} \right|_{s=0} = v_1(q, 0)$$

то из второго уравнения (2.8) находим

$$\lambda = -\frac{1}{2}(A_1\dot{q}, \dot{q}) + v_1(q, 0) = \frac{1}{2}(B_1p, p) + v_1(q, 0) = N(p, q) \quad (2.9)$$

Следовательно, функция $N(p, q)$ имеет смысл нормальной реакции к гиперповерхности Λ при движении по этой гиперповерхности. Нормаль к гиперповерхности $\Lambda = \{s = 0\}$ направлена внутрь области $s \geq 0$.

В дальнейшем будем называть функцию $N(p, q)$ нормальной реакцией связи.

2.1 Случай положительной нормальной реакции. Предположим, что $N(p, q) > 0$ в некоторой области $D \subset \tilde{\Lambda}$. Пусть

$$S = D \times G, \quad G = \{(z, y): |z| \leq R, |y| \leq R\}$$

Предположим, что исходная система принадлежит классу C^3 . Тогда

$$H_0, F \in C^3(S); \quad h_1, h_2, f_1 \in C^2(S \times [0, \varepsilon_0])$$

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений (2.7) с начальными условиями из области S

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad z(0) = z_0, \quad y(0) = y_0 \quad (2.10)$$

Положив в системе (2.7) $\varepsilon = 0$, получаем вырожденную систему

$$p = -\frac{\partial H_0}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H_0}{\partial p}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

Решая систему (2.11) с начальными условиями $p(0) = p_0, q(0) = q_0$, получим

$$p = \tilde{p}(t), \quad q = \tilde{q}(t), \quad z = 0, \quad y = 0 \quad (2.12)$$

Предложение. Пусть $N(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) > 0$ для любого $t \in [0, T]$. Тогда существуют не зависящие от ε постоянные C, C_1, C_2 , такие, что для любого малого $\varepsilon > 0$ решение задачи (2.7), (2.10) существует для любого $t \in [0, T]$ и справедливы оценки

$$|p(t) - \tilde{p}(t)| + |q(t) - \tilde{q}(t)| < C\varepsilon, \quad |z(t)| < C_1, \quad |y(t)| < C_2; \quad t \in [0, T]$$

Доказательство. Вводя обозначения

$$\xi = (p, q), \quad \eta = (z, y), \quad h = (h_1, h_2), \quad h_0(\xi) = JH_{0\xi}, \quad f = (f_1, 0), \quad J = \begin{vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{vmatrix}$$

где E – единичная матрица порядка $n-1$, запишем систему (2.7) в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = h_0(\xi) + \varepsilon h(\xi, \eta, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d\eta}{dt} = \begin{vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{vmatrix} F_\eta(\xi, \eta) + \varepsilon f(\xi, \eta, \varepsilon) \quad (2.13)$$

Напомним, что $f_1(\xi, 0, \varepsilon) = 0$.

Так как $N(\tilde{\xi}(t)) > 0$, то матрица вторых производных $F_{\eta\eta}(\xi, \eta)$ функции F вида (2.6) определена положительно на решении (2.12).

Далее используется известный метод доказательства [7]. Найдутся не зависящие от ε постоянные $M > 0$ и $\mu > 0$, такие, что в области $S \times [0, \varepsilon_0]$ справедливы оценки

$$|f(\xi, \eta, \varepsilon)| \leq M|\eta|, \quad |h'_0(\xi)| \leq M, \quad |h(\xi, 0, 0)| \leq M$$

$$|h'_\xi(\xi, \eta, \varepsilon)| \leq M, \quad |h'_\eta(\xi, \eta, \varepsilon)| \leq M, \quad |h'_\varepsilon(\xi, \eta, \varepsilon)| \leq M, \quad |h_0(\xi) + \varepsilon h(\xi, \eta, \varepsilon)| \leq M$$

$$\frac{1}{2}\mu|\eta|^2 \leq F(\xi, \eta) \leq M|\eta|^2, \quad |F_\xi(\xi, \eta)| \leq M|\eta|^2, \quad |F_\eta(\xi, \eta)| \leq M|\eta|$$

Находим

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F_\eta \frac{d\eta}{dt} + F_\xi \frac{d\xi}{dt} = F_\eta f + F_\xi (h_0(\xi) + \varepsilon h(\xi, \eta, \varepsilon)) \leq \\ &\leq M^2|\eta|^2 + M^2|\eta|^2 \leq \frac{4M^2}{\mu} F(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Интегрируя, получаем

$$F(t) \leq F(0)e(t), \quad e(t) = \exp\left(\frac{4M^2}{\mu}t\right)$$

Поскольку $F(0) \leq M|\eta(0)|^2$, то $F(t) \leq M|\eta(0)|^2 e(t)$. Следовательно,

$$|\eta(t)| \leq \sqrt{\frac{2M}{\mu}} |\eta(0)| e\left(\frac{T}{2}\right)$$

и решение $\eta(t)$ ограничено на отрезке $[0, T]$, т.е.

$$|\eta(t)| \leq \tilde{C}, \quad |z(t)| \leq C_1, \quad |y(t)| \leq C_2; \quad \forall t \in [0, T]$$

где \tilde{C} – не зависящая от ε положительная постоянная.

Оценим отличие решения $\xi = \xi(t)$ системы (2.13) от решения $\tilde{\xi}(t)$ вырожденной системы. Для этого выполним замену $\xi = \tilde{\xi}(t) + \Delta$. После подстановки в первое уравнение системы (2.13), следуя известному подходу [7], получаем

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dt} + \frac{d\Delta}{dt} = h_0(\tilde{\xi} + \Delta) + \varepsilon h(\tilde{\xi} + \Delta, \eta, \varepsilon)$$

$$\frac{d\Delta}{dt} = h_{0\varepsilon}'(\tilde{\xi} + \theta\Delta)\Delta + \varepsilon h(\tilde{\xi} + \Delta, \eta, \varepsilon), \quad 0 < \theta < 1$$

С учетом приведенных выше оценок имеем

$$\frac{d|\Delta|}{dt} \leq M|\Delta| + \varepsilon M(1 + |\Delta| + |\eta| + \varepsilon)$$

Тогда

$$|\Delta(t)| \leq \varepsilon(\tilde{C} + \varepsilon) \exp(M(1 + \varepsilon)t) \leq \varepsilon(\tilde{C} + 1) \exp(2MT) = C\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]$$

Поскольку $p_n = \varepsilon^2 z$, $q_n = \varepsilon y$, то в исходных переменных можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $N(p, q) > 0$ в некоторой области D на многообразии $\tilde{\Lambda}$ в фазовом пространстве. Пусть $\tilde{p}(t)$, $\tilde{q}(t)$ – решение уравнений Гамильтона с гамильтонианом (2.5) с начальными условиями

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0 \in D \tag{2.14}$$

и $N(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) > 0$ для любого $t \in [0, T]$. Тогда существуют не зависящие от ε положительные постоянные C, C_1, C_2 , такие, что для любого малого $\varepsilon > 0$ и любых начальных данных $p(0), q(0), p_n(0), q_n(0)$, удовлетворяющих условиям (2.14) и неравенствам

$$|p_n(0)| < \varepsilon^2, \quad |q_n(0)| < \varepsilon$$

решение уравнений Гамильтона с гамильтонианом (2.2) существует на отрезке $[0, T]$ и справедливы оценки

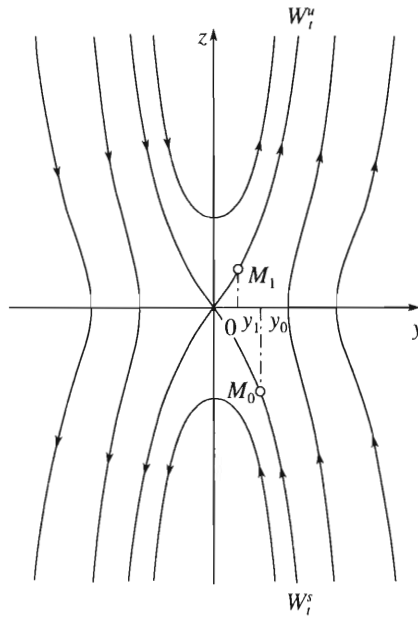
$$|p(t) - \tilde{p}(t)| + |q(t) - \tilde{q}(t)| < C\varepsilon, \quad |p_n(t)| < C_1\varepsilon^2, \quad |q_n(t)| < C_2\varepsilon; \quad \forall t \in [0, T]$$

2.2. Случай отрицательной нормальной реакции. Предположим, что $N(p, q) < 0$ в некоторой области $D \subset \tilde{\Lambda}$. Пусть

$$S = D \times G, \quad G = \{(z, y) : |z| \leq R, |y| \leq R\}$$

Предположим, что исходная система принадлежит классу C^∞ . Тогда

$$H_0, F \in C^\infty(S); \quad h_1, h_2, f_1 \in C^\infty(S \times [0, \varepsilon_0])$$



Фиг. 1

Подставив решение $p = \tilde{p}(t)$ и $q = \tilde{q}(t)$ вырожденной системы (2.11) с начальными условиями $(p_0, q_0) \in D$ в последние два уравнения системы (2.7), получаем

$$\varepsilon \dot{z} = -\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon f_1(\tilde{p}, \tilde{q}, z, y, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y} = \frac{\partial F}{\partial z} \quad (2.15)$$

где

$$F(z, y, t) = F(p, q, z, y)|_{p, q \rightarrow \tilde{p}, \tilde{q}} = \frac{z^2}{2(cy^2 + \bar{c})} + \frac{1}{2}N(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))y^2 \quad (2.16)$$

Положим $t = \varepsilon\tau$. Тогда система (2.15) примет вид

$$\frac{d\eta}{d\tau} = JF_\eta(\eta, t) + \varepsilon f(\eta, t, \varepsilon) \quad (2.17)$$

где

$$\eta = (z, y), \quad J = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad f = (f_1, 0)$$

Зафиксировав t , построим фазовый портрет системы (2.17) при $\varepsilon = 0$. Фазовые траектории задаются уравнением $F = \text{const}$. Поскольку $N(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) < 0$ на отрезке $[0, T]$, то фазовые траектории имеют вид, изображенный на фиг. 1.

Пусть W_t^s – устойчивая сепаратриса седлового положения равновесия $z = 0, y = 0$, соответствующая значению параметра t , а W_t^u – неустойчивая сепаратриса. Поскольку фазовые траектории не замкнуты, то для почти всех начальных условий решение зада-

чи Коши для системы (2.15) при $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченно растет. Поэтому почти все решения системы (2.7) с начальными условиями (2.14) и $z(0) = z_0 \neq 0, y(0) = y_0$ уходят от многообразия $\tilde{\Lambda}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.7) с граничными условиями из области S

$$p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1 \tag{2.18}$$

Будем искать решение задачи (2.7), (2.18) в виде [8, 9]

$$\zeta(t, \varepsilon) = \chi(t, \varepsilon) + \rho(t/\varepsilon, \varepsilon) + \sigma((t - T)/\varepsilon, \varepsilon)$$

где $\zeta = (p, q, z, y)$, а χ, ρ, σ – регулярные функции своих аргументов. Функция $\rho(t/\varepsilon, \varepsilon)$ описывает поведение системы в погранслое в окрестности $t = 0$, функция $\sigma((t - T)/\varepsilon, \varepsilon)$ описывает поведение системы в погранслое в окрестности $t = T$, а функция $\chi(t, \varepsilon)$ описывает поведение системы вне погранслоев. Решение краевой задачи ищется в виде асимптотического разложения по ε отдельно для составляющих движения вне и внутри погранслоев. Алгоритм построения решения приведен ранее [9].

Следуя этому алгоритму, построим нулевое приближение решения задачи (2.7), (2.18). Для переменных p, q имеем

$$p(t) = \tilde{p}(t) + O(\varepsilon), \quad q(t) = \tilde{q}(t) + O(\varepsilon) \tag{2.19}$$

т.е. решение $p(t), q(t)$ в нулевом приближении по ε не содержит погранслоевых функций и является решением вырожденной системы (2.11).

Для построения решения $z(t), y(t)$ вернемся к рассмотрению системы (2.17). Пусть $g_t^\tau: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ – отображение за время τ , заданное системой (2.17), соответствующее значению параметра t . На сепаратрисе W_0^s возьмем точку M_0 так, чтобы $y_{M_0} = y_0$, а на сепаратрисе W_T^u – точку M_1 так, чтобы $y_{M_1} = y_1$ (фиг. 1). Используя известные результаты [9] (см. также [8]), можно показать, что решение системы (2.7) для переменных $\eta = (z, y)$ имеет вид

$$\eta(t) = g_0^{t/\varepsilon}(M_0) + g_T^{(t-T)/\varepsilon}(M_1) + \tilde{\eta}(t) \tag{2.20}$$

где $|\tilde{\eta}| < L\varepsilon$, а L – не зависящая от ε и t постоянная. Всюду, за исключением некоторой окрестности точки $t = 0$, величина $g_0^{t/\varepsilon}(M_0)$ сколь угодно мала; таким образом, $g_0^{t/\varepsilon}(M_0)$ – решение в погранслое в окрестности точки $t = 0$. Аналогично $g_T^{(t-T)/\varepsilon}(M_1)$ – решение в погранслое в окрестности $t = T$. Так как $M_0 \in W_0^s$, а $M_1 \in W_T^u$, то для любого момента $t \in \varepsilon[\delta, T - \delta], \delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(t) = g_0^\infty(M_0) + g_T^{-\infty}(M_1) = 0$$

равномерно по $t \in [\delta, T - \delta]$. Таким образом, решение (2.20) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к решению вырожденной системы $\eta = 0$.

Из известных результатов [9] следует, что решение (2.19), (2.20) является нулевым приближением решения задачи (2.7), (2.18) и справедливы оценки

$$|p(t) - \tilde{p}(t)| + |q(t) - \tilde{q}(t)| < C\varepsilon, \quad \left| \eta(t) - g_0^{t/\varepsilon}(M_0) - g_T^{(t-T)/\varepsilon}(M_1) \right| < C_1\varepsilon; \quad \forall t \in [0, T]$$

В исходных переменных можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $N(p, q) < 0$ в некоторой области D на многообразии $\tilde{\Lambda}$ в фазовом пространстве. Пусть $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ – решение уравнений Гамильтона с гамильтонианом (2.5) с начальными условиями (2.14) и $N(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) < 0$ для любого $t \in [0, T]$. Тогда существуют не зависящие от ε положительные постоянные C, C_1, C_2 , такие, что для любого малого $\varepsilon > 0$ и любых граничных данных $p(0), q(0), q_n(0), q_n(T)$, удовлетворяющих условиям (2.14) и неравенствам

$$|q_n(0)| \leq \varepsilon, \quad |q_n(T)| \leq \varepsilon$$

существует единственное решение уравнений Гамильтона с гамильтонианом (2.2) на отрезке $[0, T]$ и справедливы оценки

$$|p(t) - \tilde{p}(t)| + |q(t) - \tilde{q}(t)| < C\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$|p_n(t)| < C_1\varepsilon^3, \quad |q_n(t)| < C_2\varepsilon^2; \quad \forall t \in (0, T)$$

2.3 Интерпретация результатов. Полученные результаты можно проинтерпретировать следующим образом.

1°. Пусть нормальная реакция к гиперповерхности Λ положительна в некоторой области D многообразия $\tilde{\Lambda}$. Тогда для достаточно малого ε траектории, начавшиеся в окрестности Ω_ε области D в фазовом пространстве, не выйдут из этой окрестности в течение некоторого промежутка времени $t \in [0, T]$.

Пусть $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ – решение системы со связью $q_n = 0$ при начальных данных $p_0, q_0 \in D$ и нормальная реакция связи, отвечающая решению $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$, положительна на отрезке $t \in [0, T]$. Рассмотрим ε -трубку решения $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ в фазовом пространстве

$$\tilde{\Sigma}_\varepsilon = \{(p, p_n, q, q_n) : |p - \tilde{p}(t)| < \varepsilon, \quad |q - \tilde{q}(t)| < \varepsilon, \quad |p_n| < \varepsilon^2, \quad |q_n| < \varepsilon\}$$

При достаточно малом ε траектории исследуемой системы, начавшиеся в $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$, не покидают трубку:

$$\tilde{\Sigma}_{C\varepsilon} = \{(p, p_n, q, q_n) : |p - \tilde{p}(t)| < C\varepsilon, \quad |q - \tilde{q}(t)| < C\varepsilon, \quad |p_n| < C\varepsilon^2, \quad |q_n| < C\varepsilon\}$$

где $C > 0$ – не зависящая от ε постоянная, и при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к решению системы со связью.

2°. Пусть нормальная реакция отрицательна в некоторой области D многообразия $\tilde{\Lambda}$. Тогда почти все траектории покидают окрестность Ω_ε области D в фазовом пространстве за время порядка $\varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$.

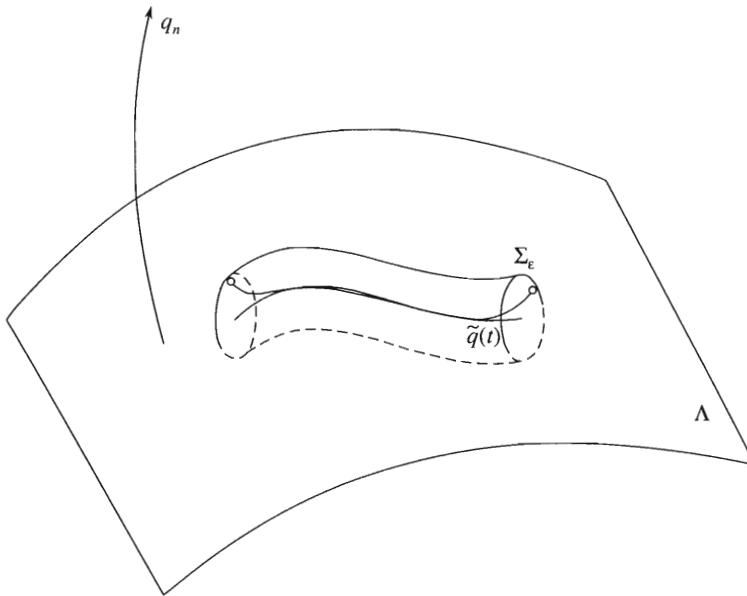
Пусть $\tilde{q}(t)$ – решение системы со связью $q_n = 0$ при начальных данных q_0, \dot{q}_0 и нормальная реакция связи, отвечающая решению $\tilde{q}(t)$, отрицательна на отрезке $t \in [0, T]$. Рассмотрим ε -трубку решения $\tilde{q}(t)$ в конфигурационном пространстве

$$\Sigma_\varepsilon = \{(q, q_n) : |q - \tilde{q}(t)| < \varepsilon, \quad |q_n| < \varepsilon\}$$

При достаточно малом ε существует единственная траектория, соединяющая любые две точки из Σ_ε , не покидающая трубку:

$$\Sigma_{C\varepsilon} = \{(q, q_n) : |q - \tilde{q}(t)| < C\varepsilon, \quad |q_n| < C\varepsilon\}$$

и проходящая вдоль Λ (фиг. 2). При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта траектория стремится к траектории системы со связью.



Фиг. 2

2.4. К вопросу об ослаблении условий инвариантности. Условия инвариантности относительно преобразования $x_n \rightarrow -x_n$, накладываемые на кинетическую и потенциальную энергию системы, достаточно сильны.

Предположим, что кинетическая энергия системы при $\epsilon = 0$ вырождена на поверхности $\Lambda = \{x_n = 0\}$ и имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(A(x, x_n, \epsilon^2)\dot{x}, \dot{x}) + (b(x, x_n, \epsilon^2), \dot{x})\dot{x}_n + \frac{1}{2}c(x, x_n, \epsilon^2)\dot{x}_n^2, \quad A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n-1$$

Выполняя замену переменных $(x, x_n) \rightarrow (q, q_n)$ по формулам [6]

$$x = \varphi(q_1, \dots, q_n, \epsilon^2), \quad x_n = q_n$$

приведем матрицу кинетической энергии к диагональному виду. Имеем [6]

$$\varphi(q_1, \dots, q_{n-1}, 0, \epsilon^2) = q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} = -A^{-1}b \tag{2.21}$$

Кинетическая энергия в новых координатах принимает вид

$$T = \frac{1}{2}(\hat{A}(q, q_n, \epsilon^2)\dot{q}, \dot{q}) + \frac{1}{2}\hat{c}(q, q_n, \epsilon^2)\dot{q}_n^2, \quad \hat{A} = (\hat{a}_{lk}), \quad l, k = 1, \dots, n-1 \tag{2.22}$$

$$\hat{a}_{lk} = \sum_{i, j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_l} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \Big|_{x, x_n \rightarrow q, q_n}, \quad \hat{c} = c - (A^{-1}b, b) \Big|_{x, x_n \rightarrow q, q_n} \tag{2.23}$$

причем $\hat{c}(q, 0, 0) = 0$, так как кинетическая энергия вырождена на Λ .

Разложим потенциальную энергию и коэффициенты, входящие в кинетическую энергию, в ряд по степеням q_n

$$\hat{A}(q, q_n, 0) = \hat{A}_0(q) + \hat{A}_1(q)q_n + \frac{1}{2}\hat{A}_2(q)q_n^2 + O(q_n^3)$$

$$\hat{c}(q, q_n, 0) = \hat{c}_1(q)q_n + \frac{1}{2}\hat{c}_2(q)q_n^2 + O(q_n^3)$$

$$V(q, q_n, \varepsilon) = V_0(q, \varepsilon) + V_1(q, \varepsilon)q_n + \frac{1}{2}V_2(q, \varepsilon)q_n^2 + O(q_n^3)$$

Очевидно, что при $\hat{A}_1(q) = 0$, $\hat{c}_1(q) = 0$ и $V_1(q, \varepsilon) = \varepsilon^2 \tilde{V}_1$ структура системы (2.7) не изменится. В силу этого условия четности, накладываемые на потенциальную и кинетическую энергию, можно заменить на условия равенства нулю производной по q_n при $q_n = 0$ и $\varepsilon = 0$, и результаты, полученные выше, останутся справедливыми. Для любой функции $f(x, x_n, \varepsilon)$ по правилу дифференцирования сложной функции и с учетом формулы замены (2.21) имеем

$$\left. \frac{\partial f}{\partial q_n} \right|_{q_n=0, \varepsilon=0} = \left(- \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T A^{-1} b + \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Big|_{x_n=0, \varepsilon=0}$$

Выбирая в качестве функции f функции V и \hat{c} вида (2.23), получаем следующие условия применимости теорем 1 и 2

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T A^{-1} b = \left. \frac{\partial V}{\partial x_n} \right|_{x_n=0, \varepsilon=0}, \quad \left(\frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \right)^T A^{-1} b = \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial x_n} \right|_{x_n=0, \varepsilon=0} \quad (2.24)$$

Аналогично получаем условия для коэффициентов матрицы кинетической энергии A ; эти условия здесь не приводятся в силу своей громоздкости. Если кинетическая энергия системы не зависит от переменных x , тогда $\hat{a}_{lk} = a_{lk}|_{x_n \rightarrow q_n}$ и условия принимают вид

$$\left. \frac{\partial a_{lk}}{\partial x_n} \right|_{x_n=0, \varepsilon=0} = 0 \quad l, k = 1, \dots, n-1 \quad (2.25)$$

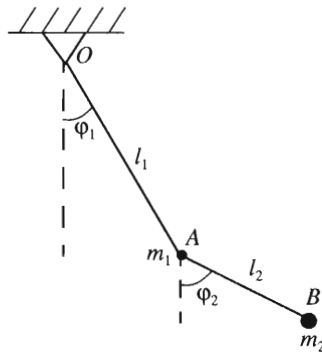
Обсудим, как вычислять нормальную реакцию связи в исходных переменных. С учетом замечания нормальную реакцию (2.9) запишем в виде

$$N(\dot{q}, q) = \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial q_n^2} \dot{q}, \dot{q} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial q_n^2} \right) \Big|_{q_n=0, \varepsilon=0} \quad (2.26)$$

Следовательно, для вычисления нормальной реакции связи необходимо, аналогично тому как это делалось выше, вычислить вторые частные производные V , \hat{A} по q_n при учете соотношений (2.21), (2.23) и того, что $\dot{q} = \dot{x}$ при $q_n = 0$. В случае, когда функция $f(x, x_n, \varepsilon)$ не зависит от переменных x , имеем

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_n^2} \right|_{q_n=0, \varepsilon=0} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \right|_{x_n=0, \varepsilon=0}$$

3. Задача о движении двойного математического маятника. Рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , соединенных между собой не-



Фиг. 3

весомым стержнем длины l_2 , точка с массой m_1 соединена с неподвижной точкой невесомым стержнем длины l_1 (фиг. 3). Система совершает колебания в вертикальной плоскости. Исследуем поведение системы в случае, когда масса точки, ближайшей к точке подвеса, мала: $m_1 = \varepsilon^2 \tilde{m}_1$. Для определенности будем полагать, что $l_1 > l_2$. Случай $l_1 < l_2$ полностью аналогичен. Случай $l_1 = l_2$ не охватывается предлагаемой теорией.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1, φ_2 , которые образуют стержни с вертикалью. Вычислим кинетическую и потенциальную энергии системы. Конфигурационное пространство системы – двумерный тор. Для кинетической энергии имеем

$$T = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2l_1l_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2]$$

Для потенциальной энергии, если ее в положении $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ считать равной нулю, будем иметь

$$V = m_1gl_1(1 - \cos\varphi_1) + m_2g(l_1(1 - \cos\varphi_1) + l_2(1 - \cos\varphi_2))$$

Полагая $m_1 = \varepsilon^2 \tilde{m}_1$, запишем матрицу кинетической энергии

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon^2) = \left\| \begin{array}{cc} (m_2 + \varepsilon^2 \tilde{m}_1)l_1^2 & m_2l_1l_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ m_2l_1l_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) & m_2l_2^2 \end{array} \right\| \quad (3.1)$$

Определитель матрицы (3.1) при $\varepsilon = 0$ равен

$$\det A(\varphi_1, \varphi_2, 0) = m_2^2 l_1^2 l_2^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Следовательно, при $\varphi_2 = \varphi_1$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ кинетическая энергия системы вырождена.

Таким образом, кривая вырождения Λ распадается на две компоненты

$$\Lambda_1 = \{\varphi_2 = \varphi_1\}, \quad \Lambda_2 = \{\varphi_2 = \varphi_1 + \pi\}$$

Рассмотрим поведение системы вблизи компоненты Λ_1 . Выполним замену $\varphi_2 - \varphi_1 = \psi$. Тогда кинетическая и потенциальная энергия примут вид

$$T = \frac{1}{2}m_2l_1^2[a\dot{\varphi}_1^2 + 2b\dot{\varphi}_1\dot{\psi} + c\dot{\psi}^2] \quad (3.2)$$

$$V = V_0 - m_2 g l_1 ((\varepsilon^2 n + 1) \cos \varphi_1 + k \cos(\varphi_1 + \psi)) \quad (3.3)$$

где

$$a = 1 + 2k \cos \psi + k^2 + \varepsilon^2 n, \quad b = k(\cos \psi + k^2), \quad c = k^2$$

$$k = \frac{l_2}{l_1}, \quad n = \frac{\tilde{m}_1}{m_2}, \quad V_0 = m_2 g (l_1 + l_2) + \varepsilon^2 \tilde{m}_1 g l_1$$

Согласно сказанному в разд. 2.4 заменой переменных вида (2.21) можно привести матрицу кинетической энергии к диагональному виду. В данной задаче переменной x соответствует φ_1 , а переменной q_n соответствует переменная ψ . Замена переменных $(\varphi_1, \psi) \rightarrow (\theta, \psi)$ задается формулой $\varphi_1 = f(\theta, \psi)$, причем $f'_\psi = -b/a$.

Поскольку кинетическая энергия (3.2) системы не зависит от переменной φ_1 , то в результате замены получаем

$$T = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 (a \dot{\theta}^2 + \hat{c} \dot{\psi}^2), \quad \hat{c} = \frac{ca - b^2}{a} = \frac{k^2 (\sin^2 \psi + \varepsilon^2 n)}{1 + 2k \cos \psi + k^2 + \varepsilon^2 n}$$

Проверим условия, необходимые для выполнения теорем 1 и 2. Для потенциальной энергии (3.3) имеем $\partial V / \partial \psi|_{\psi=0, \varepsilon=0} = 0$. В силу четности a и \hat{c} относительно ψ условия (2.24), (2.25), при которых теоремы 1 и 2 применимы, выполнены.

Найдем нормальную реакцию связи $\psi = 0$. Согласно формуле (2.26) имеем

$$N(\dot{\theta}, \theta) = \left(-\frac{1}{2} m_2 l_1^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \psi^2} \dot{\theta}^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \right) \Big|_{\psi=0, \varepsilon=0}$$

С учетом того, что $(\cos \psi)'|_{\psi=0} = 0$ и $\varphi_1 = 0$ при $\psi = 0$, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} \Big|_{\psi=0, \varepsilon=0} = \frac{m_2 l_1 g k}{1+k} \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial \psi^2} = -2k \cos \psi$$

Тогда

$$N(\dot{\theta}, \theta) = \frac{m_2 l_1 k}{k+1} [(l_1 + l_2) \dot{\theta}^2 + g \cos \theta] \quad (3.4)$$

Как отмечалось выше (см. замечание), полученная функция (3.4) не является в точности физической нормальной реакцией связи, а пропорциональна ей.

При движении по связи $\dot{\theta}$ и θ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{2} m_2 (l_1 + l_2)^2 \dot{\theta}^2 + m_2 g (l_1 + l_2) (1 - \cos \theta) = h \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.4) и (3.5) видно, что при $\psi = 0$ поведение двойного маятника описывается движением точки с массой m_2 по окружности радиуса $R = l_1 + l_2$. Выражая $\dot{\theta}$ из равенства (3.5) и подставляя в равенство (3.4), получаем, что

$$N = \frac{m_2 l_1 k}{1+k} (C - 2g + 3g \cos \theta); \quad C = \frac{2h}{m_2 (l_1 + l_2)}$$

Следовательно, нормальная реакция положительна, если $\cos\theta > 2/3 - C/(3g)$. Если

$$h > \frac{5}{2}m_2(l_1 + l_2)g \tag{3.6}$$

то нормальная реакция компоненты границы Λ_1 положительна всюду, а значит, траектории предельной системы, начавшиеся на границе Λ_1 с касательной к Λ_1 скоростью, не покинут границу. Если знак неравенства (3.6) меняется на противоположный, то на некотором участке компоненты границы Λ_1 , заданном углами $\theta \in (-\theta^*, \theta^*)$, где $\theta^* = \arccos(2/3 - C/(3g))$, нормальная реакция положительна, а на участке границы Λ_1 , заданном углами $\theta \in (\theta^*, 2\pi - \theta^*)$, отрицательна.

Аналогично рассматривается движение вблизи компоненты Λ_2 . Уравнение связи в этом случае имеет вид $\psi = \pi$, нормальная реакция связи равна

$$N(\dot{\theta}, \theta) = -\frac{m_2 l_1 k}{1-k} [(l_1 - l_2)\dot{\theta}^2 + g \cos\theta]$$

При движении по связи $\dot{\theta}$ и θ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{2}m_2(l_1 - l_2)^2\dot{\theta}^2 + m_2g(l_1 - l_2)(1 - \cos\theta) = h - 2m_2gl_2$$

Видно, что поведение двойного маятника при $\psi = \pi$ описывается движением точки с массой m_2 по внешней стороне окружности радиуса $r = l_1 - l_2$. Аналогично предыдущему случаю существует область компоненты границы Λ_2 , где нормальная реакция отрицательна, и область компоненты границы Λ_2 , где нормальная реакция положительна. При достаточно больших h нормальная реакция отрицательна всюду на границе $\psi = \pi$.

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ для фиксированного уровня энергии системы h движения предельной системы являются движениями точки с массой m_2 в гравитационном поле внутри кольца

$$D = \{z = (x, y): r \leq |z| \leq R\}; \quad r = l_1 - l_2, \quad R = l_1 + l_2$$

На границах кольца кинетическая энергия вырождена. Если траектории предельной системы подходят к границе под ненулевым углом, то поведение траекторий таково, что угол падения равен углу отражения (бильярдные траектории) [4].

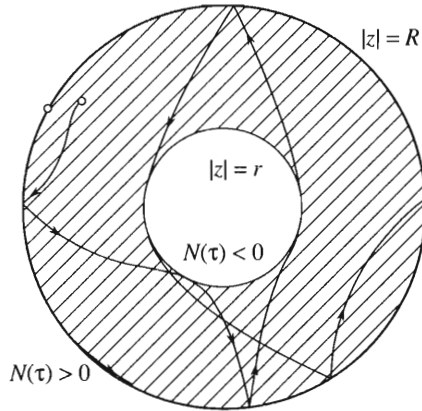
У предельной системы в окрестности границы существуют траектории другого типа. А именно:

1) если нормальная реакция положительна на некотором участке границы, то траектории, начавшиеся на этом участке со скоростью, касательной к границе, проходят вдоль границы вплоть до выхода в область отрицательной реакции;

2) если нормальная реакция границы отрицательна на некотором участке границы, то почти все траектории покидают границу, но существует единственная траектория, соединяющая любые две точки границы и проходящая вдоль нее (фиг. 4).

Когда энергия h системы достаточно велика, нормальная реакция связи $|z| = R$ положительна в каждой точке границы, а нормальная реакция связи $|z| = r$ отрицательна.

Поведение двойного математического маятника в случае, когда масса точки, ближайшей к точке подвеса, мала, рассматривалось ранее [10]. Для значений энергии, близких к максимуму потенциальной энергии, с использованием вариационных методов была доказана неинтегрируемость задачи о двойном математическом маятнике при определенном соотношении между массами материальных точек и длин его звеньев. С использованием методов теории возмущений были доказаны [11] существование хаотических



Фиг. 4

траекторий двойного маятника и неинтегрируемость системы для достаточно малых отношений масс и достаточно больших значений энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-136.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-01119).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A.M. On generalized Hamiltonian dynamics // *Canad. J. Math.* 1950. V. 2. № 2. P. 129–148 = Дирак П. Обобщенная гамильтонова динамика // Дирак П. Лекции по квантовой механике. Ижевск: Ижевская респ. тип., 1998. С. 72–98.
2. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
3. Дерябин М.В. О гамильтоновом формализме Дирака и реализации связей малыми массами // *ПММ.* 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 41–46.
4. Шахова Т.В. Об одном способе реализации неустойчивых связей // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 2000. № 2. С. 30–35.
5. Birkhoff G.D. *Dynamical System.* N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927 = Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1999. 408 с.
6. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды: Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
7. Lebovitz R., Neishtadt A. Slow evolution in perturbed Hamiltonian systems // *Stud. Appl. Math.* 1994. V. 92. № 2. P. 127–144.
8. Bolotin S., MacKay R. Multibump orbits near the anti-integrable limit for Lagrangian systems// *Nonlinearity.* 1997. V. 10. P. 1015–1029.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.
10. Bolotin S., Negrini P. A Variational criterion for nonintegrability // *Russ. Math. Physics.* 1998. V. 5. № 4. P. 415–436.
11. Моауро В., Негрини П. Хаотические траектории двойного математического маятника // *ПММ.* 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 892–895.