УДК 539.374

© 2006 г. А. И. Глушко, И. И. Нещеретов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ТЕЛ

Предлагается метод приближенного решения квазистатических задач для упрочняющихся упругопластических тел. Определяющее соотношение модели принято в виде вариационного неравенства. Приближенное решение исходной задачи строится по шагам по времени и с помощью метода конечных элементов сводится к решению системы двух вариационных неравенств в соответствующем конечномерном пространстве. Показано, что решение этой системы эквивалентно нахождению седловой точки соответствующего квадратичного функционала. Для поиска седловой точки используется алгоритм Удзавы, благодаря чему нахождение вектора скорости и тензора напряжений сводится к последовательному нахождению этих величин: вектор скорости определяется из вариационного неравенства, соответствующего уравнению равновесия, а тензор напряжений – из вариационного неравенства, соответствующего определяющему соотношению. Последнее неравенство приводится к некоторому нелинейному уравнению, содержащему операцию проектирования на замкнутое выпуклое множество, соответствующее упругим деформациям среды. В свою очередь, решение нелинейного уравнения строится с помощью метода последовательных приближений. В качестве примера применения предлагаемого метода рассматривается одномерная задача о квазистатическом деформировании цилиндрической трубы под действием нагрузки, приложенной к ее внутренней поверхности.

Модель упрочняющегося упругопластического тела (УУПТ), рассматриваемая в механике твердого деформируемого тела, существенно отличается от других моделей тем, что связи между тензором скоростей деформаций и тензором напряжений и его производными (определяющие соотношения) записываются в виде альтернативной системы уравнений и неравенств. С помощью неравенств задается область в пространстве напряжений, где поведение твердого тела описывается законами теории упругости, а также условия нагружения и разгрузки, когда тело находится в пластическом состоянии.

Формально систему определяющих соотношений можно привести к некоторой системе уравнений с разрывными коэффициентами. В связи с этим известный прием линеаризации нелинейных уравнений, которым обычно пользуются, чтобы получить конечномерную аппроксимацию определяющих соотношений, неприменим. Во многих работах, в которых исследуется этот вопрос, используется процедура коррекции напряжений, предложенная Уилкинсом [1, 2].

Поясним суть этой процедуры на примере идеально пластического тела с условием текучести Мизеса, когда поверхность текучести в пространстве главных напряжений представляет собой цилиндр. Вычисление напряжений в каждой точке тела на следующем шаге по времени можно представить в виде такого алгоритма. Сначала вычисляются с помощью закона Гука приращения напряжений $\Delta\sigma$ по приращениям деформаций. Затем вычисляются напряжения на следующем шаге как сумма $\Delta\sigma$ и значений напряжений в данный момент времени. Если вычисленные таким образом напряжения σ^* выходят за предел текучести, т.е. лежат вне цилиндра, то следует сделать коррекцию напряжений. С этой целью из точки σ^* опускают перпендикуляр на поверхность текучести и находят точку их пересечения. Напряжения, соответствующие этой точке, и принимаются за напряжения, соответствующие следующему шагу времени. С.С. Григорян в примечании к работе [1] показал, что можно получить те же самые значения напряжений на следующем шаге по времени, если исходить из конечно-разностной аппроксимации уравнений Прандтля – Рейсса. Тем самым процедура коррекции напряжений получила строгое обоснование для идеально пластических тел с условием текучести Мизеса.

Подобный анализ для УУПТ, насколько известно авторам, не проводился. Однако благодаря своей простой геометрической интерпретации процедура коррекции напряжений стала довольно часто применяться для решения многих практических задач УУПТ.

С физической точки зрения этот прием представляется вполне обоснованным. Вместе с тем возникает естественный вопрос, нельзя ли найти другой подход, в котором операция проектирования на замкнутое множество в шестимерном пространстве напряжений, которой, по существу, является процедура коррекции, вытекала бы естественным образом из математической постановки задачи и была строго обоснована.

В настоящей работе речь пойдет об одном из таких подходов [3]. Он основан на вариационной формулировке эволюционных задач, моделирующих квазистатические процессы деформирования УУПТ, при описании которых, как известно, можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения. В дальнейшем будем для краткости также называть такие эволюционные задачи "квазистатическими". Суть этого метода кратко может быть представлена следующим образом. Исходная задача записывается в виде двух вариационных неравенств: одно в пространстве напряжений, другое – в пространстве скоростей. Отрезок времени, на котором строится решение, разбиваем на конечное число интервалов. Для каждого момента времени аппроксимируем компоненты вектора скорости и тензора напряжений с помощью соответствующих пространств конечных элементов. Производные по времени аппроксимируются конечно-разностными соотношениями и с исходной системой вариационных неравенств сопоставляются два неравенства в конечномерном пространстве.

Решение этой системы вариационных неравенств строится с помощью итерационного алгоритма Удзавы для нахождения седловых точек нелинейных функционалов. Главное достоинство данного алгоритма состоит в том, что определение двух неизвестных величин сводится к попеременному определению то одной величины, то другой. Можно показать (см. приложение), что этот итерационный процесс сходится к решению конечномерной задачи. Более того, решение конечномерной задачи сходится к решению исходной вариационной задачи. Чтобы определить тензор напряжений на каждой итерации, можно воспользоваться двумя способами. Один способ определения напряжений базируется на эквивалентности вариационного неравенства задаче минимизации квадратичной функции на замкнутом выпуклом множестве. Другой способ, предлагаемый в данной работе, приводит к решению нелинейного уравнения методом последовательных приближений, причем при определении каждой итерации используется операция проектирования на поверхность нагружения.

Работа [3] является одной из последних из серии работ этого автора, посвященных доказательству теорем существования и построению численных методов решения квазистатических задач теории идеально пластических тел и УУПТ. Она отличается от других работ этой серии излишней сжатостью изложения, что затрудняет понимание ряда утверждений. Кроме того, в ней имеется ряд опечаток, которые делают непонятными отдельные математические выкладки при доказательствах теорем и предложений. Одна из целей настоящей работы – дать по возможности полное изложение и исправить опечатки в той части, которая касается построения приближенного метода и доказательства его сходимости.

1. Математическая модель упрочняющихся упругопластических тел. Введем некоторые обозначения. Будем рассматривать пространство симметричных тензоров второго ранга как шестимерное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(\sigma, \tau) \equiv \sigma : \tau = \sigma_{ij}\tau_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Линейные операторы в этом пространстве записываются с помощью тензоров четвертого ранга A по формуле

$$\varepsilon = A\sigma \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

Ниже будем рассматривать тензор четвертого ранга $A = \{A_{ijkl}\}$, характеризующий только упругое поведение среды, т.е. такое, при котором деформации обратимы. Он обладает свойством симметрии и положительной определенности

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}; \quad (A\sigma : \sigma) \geq \alpha(\sigma : \sigma), \quad \alpha > 0$$

Для изотропного тела компоненты тензора A представляются в виде

$$A_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, δ_{ij} – символ Кронекера. Обозначим через $\upsilon = \upsilon(x)$ и $\sigma = \sigma(x)$ поля скоростей и напряжений соответственно. Компоненты тензора скоростей деформаций $e(\upsilon)$ имеют вид

$$e_{ij}(\upsilon) = (\partial\upsilon_i/\partial x_j + \partial\upsilon_j/\partial x_i)/2$$

Перейдем к формулировке математической модели, описывающей поведение определяющих соотношений УУПТ. Будем исходить из того, что задано некоторое начальное состояние (начальная конфигурация) твердого тела, в котором внутренние напряжения обращаются в нуль. Далее будем считать, что в шестимерном пространстве напряжений задано некоторое семейство областей упругого поведения твердого тела: при любых напряжениях внутри этих областей процесс деформирования обратим, и связь между тензорами напряжений и деформаций задается законом Гука. Граница областей называется поверхностью нагружения. В теории УУПТ считается, что семейство поверхностей нагружения задается с помощью некоторых величин, которые называются параметрами упрочнения. Эти параметры при обратимых процессах остаются неизменными.

В общем случае уравнение поверхности нагружения записывается в виде

$$F(\sigma, \chi, T, \mu) = 0$$

Здесь $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m\}$ – параметры упрочнения, T – температура, $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$ – некоторое число параметров иной физико-химической природы. При $F(\sigma, \chi, T, \mu) < 0$ тело ведет себя упруго. Выбор той или иной величины в качестве параметров упрочнения опирается на физические соображения.

Поведение многих практически важных деформируемых твердых тел можно описать с помощью двух частных моделей: модели изотропного УУПТ и модели трансляционного УУПТ.

В первом случае уравнение поверхности нагружения имеет вид

$$F(\sigma, \chi, T) = f(\sigma, T) - H(\chi, T) = 0$$

Здесь χ – параметр упрочнения, который должен монотонно возрастать при необратимых процессах, функция $H = H(\chi, T)$ монотонно возрастает при увеличении χ и называется пределом нагружения. В качестве такого параметра можно принять величину "пластической" работы (Тэйлор, Куини, Шмидт)

$$\chi = \int \frac{(\sigma : e^p)}{f(\sigma, T)} dt$$

или параметр Одквиста

$$\chi = \int (e^p : e^p)^{1/2} dt$$

который является мерой накопления пластических деформаций. Здесь $e^p = e(\upsilon) - A\dot{\sigma}$ – тензор скоростей пластических деформаций. Точкой обозначена производная по времени.

В случае трансляционного УУПТ уравнение поверхностей нагружения записывается в виде

$$F(\sigma, \chi, T) = f(\sigma - \chi, T) = 0$$

Здесь параметр упрочнения является тензором второго ранга.

Чтобы вывести определяющие соотношения модели УУПТ, будем следовать термодинамическому подходу [4–7]. В соответствии с этим подходом будем рассматривать компоненты тензора пластических деформаций и параметр упрочнения как внутренние параметры состояния. Далее ограничиваемся рассмотрением изотермических процессов деформирования при малых деформациях. Примем, что свободная (удельная) энергия F зависит от тензора полных деформаций ε, тензора пластических деформаций ε^p, параметра упрочнения χ и представляется в виде

$$F = (A^{-1}(\varepsilon - \varepsilon^p) : (\varepsilon - \varepsilon^p)) + \gamma\chi^2/2, \quad \gamma > 0$$

Далее будем рассматривать тензор скоростей пластических деформаций $e^p(e^p \approx \dot{\varepsilon}^p)$ и скорость изменения $\dot{\chi}$ параметра упрочнения χ как обобщенные термодинамические потоки и введем обозначение $\Psi = (e^p, \dot{\chi})$. Им соответствуют обобщенные термодинамические силы

$$\mathcal{R} = (\sigma, r)\colon e^p \to \sigma, \quad \dot{\chi} \to r = \partial F/\partial\chi = \gamma\chi$$

с помощью которых скорость возрастания энтропии за счет необратимых внутренних процессов W представляется в виде

$$W = \sigma : e^p + r\dot{\chi} = (\mathcal{R}, \Psi)$$

Чтобы установить определяющие соотношения для УППТ, будем исходить из гипотезы "нормальности диссипации" [8]. Согласно этой гипотезе для любой упругопластической среды можно задать функцию диссипации $\varphi = \varphi(e^p, \dot{\chi})$, с помощью которой связь между обобщенными термодинамическими силами $\mathcal{R}$ и потоками $(e^p, \dot{\chi})$ устанавливается в виде:

$$\mathcal{R} \in \partial\varphi \tag{1.1}$$

Здесь $\partial\varphi(e^p, \dot{\chi})$ – субдифференциал [7–9] функции $\varphi = \varphi(e^p, \dot{\chi})$. В случае гладкой функции субдифференциал является градиентом функции, т.е. $\partial\varphi(\mathcal{R}) = (\partial\varphi/\partial\varepsilon^p, \partial\varphi/\partial\dot{\chi})$.

Функция $\varphi = \varphi(e^p, \dot{\chi})$ должна быть выпуклой и полунепрерывной снизу [6, 8]. В этом случае будет удовлетворено неравенство Клаузисуса – Дюгема, которое эквивалентно второму началу термодинамики – закону возрастания энтропии при необратимых процессах [4, 5]. Если ввести преобразование Лежандра – Фенхеля $\varphi^* = \varphi^*(\mathcal{R})$ от функции $\varphi = \varphi(e^p, \dot{\chi}) = \varphi(\Psi)$ по формуле

$$\varphi^*(\mathcal{R}) = \sup_{\Psi}((\mathcal{R}, \Psi) - \varphi(\Psi)) = \sup_{t,s}(\sigma : t + rs - \varphi(t, s)), \quad \text{где} \quad t = e^p, \quad s = \dot{\chi}$$

то соотношение (1.1) можно обратить и записать в виде [9]

$$(e^p, \dot{\chi}) \in \partial\varphi^*(\mathcal{R}) \tag{1.2}$$

Преобразование Лежандра – Фенхеля является обобщением преобразования Лежандра [10] на случай бесконечномерных нормированных пространств. В случае конечномерных евклидовых пространств нетрудно показать, что для дифференцируемых функций оно совпадает с преобразованием Лежандра.

В теории УППТ в качестве функции $\varphi^* = \varphi^*(\mathcal{R})$ берется индикаторная функция

$$\vartheta_B(\mathcal{R}) = \begin{cases} 0, & \mathcal{R} \in B \\ \infty, & \mathcal{R} \notin B \end{cases}$$

замкнутого выпуклого множества B, внутри которого поведение тела описывается законами упругости. В этом случае соотношения (1.2) эквивалентны неравенству

$$(e^p : (\tau - \sigma)) - \gamma\dot{\chi}(\eta - \chi) \le 0, \quad \forall(\tau, \eta) \in B \tag{1.3}$$

Именно это неравенство принимается ниже в качестве определяющего соотношения.

Заметим, что в ряде работ [11–15] используются другие принципы, позволяющие получать определяющие соотношения: принцип максимальной диссипации Мизеса, постулат Дракера или ассоциированный закон течения [16], причем в качестве параметра упрочнения принимаются упоминавшиеся выше параметры Тейлора – Куини – Шмидта или Одквиста.

Можно показать, что предлагаемая формулировка (1.2) согласуется с постулатом Дракера и дает более общую связь между скоростью изменения параметра упрочнения $\dot{\chi}$ и параметрами состояния $\mathcal{R} = (\sigma, \chi)$.

2. Постановка математической задачи. Будем считать, что упрочнение характеризуется одним параметром упрочнения χ, и будем рассматривать совместно тензор напряжений и параметр упрочнения как точку в семимерном пространстве $(\sigma, \chi) \in R^6 \times R$. Введем в этом пространстве замкнутое выпуклое множество с помощью соотношения

$$B := \{(\sigma, \chi) | F(\sigma, \chi) \le 0\}$$

В точках множества B, где выполняется неравенство $F(\sigma, \chi) < 0$, поведение твердого тела описывается законами упругости. Соответственно введем функциональное пространство H, образованное парами (σ, χ), $H := \{(\sigma, \chi)\}$. Множество допустимых пар полей напряжений $\sigma = \sigma(x)$ и параметра упрочнения $\chi = \chi(x)$ задается с помощью соотношения

$$P := \{(\sigma, \chi) \in H | (\sigma(x), \chi(x)) \in B, \forall x \in \Omega\}$$

Перейдем к математической формулировке задачи. Будем считать, что на части границы Γ_u области Ω заданы нулевые перемещения, а на части Γ_σ – заданы внешние усилия P_N, $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ – граница области Ω). Заметим, что с помощью стандартного приема можно рассмотреть также и случай ненулевых условий на Γ_u.

При постановке задачи будем исходить из вариационной формулировки определяющих соотношений. Обозначим через V множество допустимых полей скоростей, т.е. таких полей, которые обращаются в нуль на поверхности Γ_u. Задача может быть сформулирована следующим образом.

Задача 1. Найти поля скоростей $\upsilon = \upsilon(x) \in V$, напряжений $\sigma(x)$ и параметра упрочнения $\chi(x)$, $(\sigma, \chi) \in P$, такие, что выполняются соотношения

$$(\sigma : e(w)) - (P_N, w)_s = (g, w), \quad \forall w \in V$$

$$((e(\upsilon) - A\dot{\sigma}) : (\tau - \sigma)) - \dot{\chi}(\eta - \chi) \le 0, \quad \forall(\tau, \eta) \in P$$

$$\sigma(0, x) = \sigma_0(x)$$

Здесь первое соотношение – вариационное неравенство – следует из уравнений равновесия и называется принципом виртуальных работ, g – плотность распределенных сил, $(P_N, w)_s$ – интеграл по поверхности Γ_σ, P_N – усилие на поверхности Γ_σ, $\sigma_0(x)$ – некоторая заданная функция.

Ниже главное внимание будет уделено построению численного решения сформулированной выше задачи с помощью метода конечных элементов. С этой целью рассмотрим соответствующую задачу в конечномерном пространстве, аппроксимируя функциональные пространства V и H пространствами конечных элементов V_h и H_h и заменяя производную по времени конечно-разностным соотношением.

Будем строить решение на отрезке $[0, T]$; разобьем его на N частей, обозначим через Δ шаг по времени, $\Delta = T/N$, $t_n = n\Delta$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Далее в области Ω введем триангуляцию $T_h = \cup_\nu T^h_\nu$. Здесь T^h_ν $(\nu = 1, \ldots, M)$ треугольник из разбиения области Ω, M – число треугольников. Предполагается, что триангуляция удовлетворяет обычным условиям регулярности [17].

Аппроксимируем пространство V с помощью пространства кусочно-линейных функций V_h, а пространство H – с помощью пространства кусочно-постоянных функций H_h. Множество P заменим множеством

$$P_h = P \cap H_h$$

Всякий элемент $\bar{\sigma}_h$ пространства H_h может быть представлен в виде

$$\bar{\sigma}_h(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \bar{\sigma}_\nu \theta_\nu(x), \quad \bar{\sigma}_\nu = (\sigma_\nu, \chi_\nu), \quad \theta_\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \in T^h_\nu \\ 0, & x \notin T^h_\nu \end{cases}$$

Здесь k – число элементов разбиения, $\theta_\nu(x)$ – характеристическая функция элемента T^h_ν. Скалярное произведение любых двух элементов $\bar{\sigma}_h$, $\bar{\tau}_h \in H_h$ представляется в виде суммы

$$(\bar{\sigma}_h, \bar{\tau}_h) = \sum_{\nu=1}^{k} (\bar{\sigma}_\nu, \bar{\tau}_\nu)\left|T^h_\nu\right|$$

Здесь $|T^h_\nu|$ – мера конечного элемента T^h_ν, $(\bar{\sigma}_\nu, \bar{\tau}_\nu) = (\sigma_\nu : \tau_\nu) + \xi_\nu\eta_\nu$, если $\bar{\sigma}_\nu = (\sigma_\nu, \tau_\nu)$, $\bar{\tau}_\nu = (\sigma_\nu, \tau_\nu)$. Приведем также формулу для расстояния от любой точки $\bar{\sigma}_h = (\sigma, \chi) \in H_h$ до множества B P_h

$$d_B(\bar{\sigma}_h) = \min_{(\tau_\nu, \eta_\nu) \in B} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{k} \left(\left|\sigma_\nu - \tau_\nu\right|^2 + \left|\chi_\nu - \eta_\nu\right|^2\right)\left|T^h_\nu\right|}$$

3. Аппроксимация точного решения. Теперь сформулируем следующую задачу в конечномерном пространстве $V_h \times H_h$.

Задача 2. Найти последовательности $\upsilon^n \in V_h$, $(\sigma^n, \chi^n) \in P_h$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$, такие, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &(e(\upsilon^n) - A(\sigma^n - \sigma^{n-1})/\Delta):(\tau - \sigma^n) - \gamma(\chi^n - \chi^{n-1})(\eta - \chi^n)/\Delta \le 0, \quad \forall(\tau, \eta) \in P_h \\ &(\sigma^n : e(w)) - (g, w) - (P_N, w)_s = 0, \quad \forall w \in V_h \\ &\sigma(0, x) = \sigma_0(x) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Таким образом, если при $t = t_{n-1}$ известны величины $(\sigma^{n-1}, \chi^{n-1})$, то (σ^n, χ^n) и υ^n могут быть определены из решения вариационной задачи 2. Чтобы получить приближенное решение задачи 1 при любом $t \in [0, T]$, интерполируем линейно на каждом отрезке времени $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, последовательные значения υ^{k-1}, υ^k, а также σ^{k-1}, σ^k и χ^{k-1}, χ^k.

Введем обозначение $\bar{\sigma}^n = (\sigma^n, \chi^n)$. Тогда неизвестные υ^n и $\bar{\sigma}^n$ можно рассматривать как координаты в прямом произведении пространств $V_h \times H_h$. Можно показать, что задача 2 эквивалентна нахождению седловой точки функционала

$$L(\bar{\sigma}, w) = [(A(\sigma^n - \sigma^{n-1}):\sigma) + \gamma(\chi^n - \chi^{n-1})\chi]/(2\Delta) - (e(w):\sigma) + (g, w) + (P_N, w)_s$$

выпуклого по переменной $\bar{\sigma}$ и вогнутого по переменной w.

Напомним, что точка $(\bar{\sigma}_0, w_0)$ называется седловой точкой функционала $L(\bar{\sigma}, w)$, если выполняются условия

$$L(\bar{\sigma}, w_0) > L(\bar{\sigma}_0, w_0) > L(\bar{\sigma}_0, w)$$

Для дифференцируемых функционалов эти условия эквивалентны вариационным неравенствам

$$\left(\frac{\partial L(\bar{\sigma}_0, w_0)}{\partial \bar{\sigma}}:(\bar{\tau} - \bar{\sigma}_0)\right) \geq 0, \quad \forall \bar{\tau} \in P_h; \quad \left(\frac{\partial L(\bar{\sigma}_0, w_0)}{\partial w}:(w - w_0)\right) \leq 0, \quad \forall w \in V_h \qquad (3.2)$$

Если выполнить здесь все преобразования и подставить $\bar{\sigma}^n$ и υ^n вместо $\bar{\sigma}_0$ и w_0, то получим в точности вариационную задачу 2. Учитывая это, перейдем к построению итерационной процедуры, которая позволит найти седловую точку функционала $L = L(\bar{\sigma}, w)$ и тем самым получить численное решение задачи 2.

4. Алгоритм приближенного решения. Будем искать седловую точку функционала $L = L(\bar{\sigma}, w)$ с помощью алгоритма Удзавы. Он состоит в том, что строятся две сходящиеся последовательности $\{\bar{\sigma}_j^n\}$ и $\{\bar{\upsilon}_j^n\}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$[(A(\sigma_j^n - \sigma^{n-1}):(\tau - \sigma_j^n) + \gamma(\chi_j^n - \chi^{n-1})(\eta - \chi_j^n))]/\Delta - (e(\upsilon_{j-1}^n):(\tau - \sigma_j^n)) \geq 0, \ \forall(\tau, \eta) \in P_h \qquad (4.1)$$

$$(e(\upsilon_j^n):e(w)) = (e(\upsilon_{j-1}^n):e(w)) + \rho[(g^n, w) - (e(w):\sigma_j^n) + (P_N, w)_s], \quad \forall w \in V_h \qquad (4.2)$$

Здесь $\rho > 0$ – параметр, оценка которого будет дана ниже, в приложении.

Этот алгоритм можно представить схематически в виде построения следующей последовательности (υ_0^n берется произвольно из множества допустимых):

$$\upsilon_0^n \to \bar{\sigma}_1^n \to \upsilon_1^n \to \bar{\sigma}_2^n \to \ldots \to \upsilon_j^n \to \bar{\sigma}_{j+1}^n \to \upsilon_{j+1}^n \to \ldots$$

Таким образом, члены последовательности σ_j^n определяются из вариационного неравенства (4.1) при известном υ_{j-1}^n, а члены последовательности υ_j^n – из вариационного равенства (4.2) при известном σ_j^n. Можно показать (см. приложение), что при $\rho < 2\alpha/\Delta$ последовательность $\bar{\sigma}_j^n$ сходится к $\bar{\sigma}^n$, при $j \to \infty$.

Таким образом, алгоритм Удзавы сводит решение нелинейной задачи 2 для неизвестных $\bar{\sigma}^n$, υ^n к последовательному определению величин $\bar{\sigma}_j^n$ и υ_j^n.

Перейдем к определению $\bar{\sigma}_j^n$ из вариационного неравенства (4.2). Эту задачу, в свою очередь, можно свести к задаче минимизации квадратичной функции на замкнутом выпуклом множестве P_h. Более того, так как каждая тензор-функция и множество P_h постоянны на каждом треугольнике T_ν^h, то нахождение σ_j^n сводится к последовательному решению задач минимизации на замкнутом выпуклом множестве $B \subset R^6 \times R$ для каждого треугольника T_ν^h.

Можно воспользоваться также другим методом. Он основан на том, что вариационное неравенство (4.2) эквивалентно нелинейному уравнению

$$x = \pi_P\{x - \bar{\rho}[\bar{A}(x - \bar{\sigma}^{n-1})/\Delta - \bar{e}(\upsilon_{j-1}^n)]\}, \quad \bar{A} = \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & \gamma \end{matrix} \right\|, \quad \bar{e} = \left\| \begin{matrix} e(\upsilon) \\ 0 \end{matrix} \right\| \tag{4.3}$$

Здесь $x = \bar{\sigma}_j^n$, $\bar{\rho}$ – итерационный параметр, $\pi_P = \pi_P(\bar{\sigma})$ – оператор проектирования на замкнутое выпуклое множество P_h.

Напомним, что $\pi_P(\bar{\sigma})$ – проекция "вектора" $\bar{\sigma}$ на множество P_h, если выполняется условие

$$\|\bar{\sigma} - \pi_P(\bar{\sigma})\| = \min_{\bar{\tau} \in P_h} \|\bar{\sigma} - \bar{\tau}\|$$

Если множество P_h замкнуто и выпукло, то такой элемент $\pi_P(\bar{\sigma})$ существует и единствен.

Решение нелинейного уравнения (4.3) строится методом последовательных приближений. Определяется последовательность $\{\bar{\sigma}_l\}$ ($l = 1, 2, \ldots$) где $\bar{\sigma}_l$ вычисляется по формуле

$$\bar{\sigma}_l = \pi_P\{\bar{\sigma}_{l-1} - \bar{\rho}[A(\bar{\sigma}_{l-1} - \bar{\sigma}^{n-1})/\Delta - e(\upsilon_{j-1}^n)]\} \tag{4.4}$$

Так как напряжения и параметр упрочнения кусочно постоянны, оператор проектирования действует на множестве $B \subset R^6 \times R$ для каждого треугольника T_ν^h разбиения. Последовательность $\{\bar{\sigma}_l\}$ сходится при $l \to \infty$, $\bar{\sigma}_l \to \bar{\sigma}_j^n$. Если задать точность с помощью некоторого числа δ, $0 < \delta < 1$, то итерационный процесс закончится при некотором $\bar{l}$, и тогда можно принять $\bar{\sigma}_j^n \approx \bar{\sigma}_{\bar{l}}$.

Из соотношения (4.2) определяется υ_j^n. Эта задача эквивалентна решению линейной системы алгебраических уравнений, причем матрица коэффициентов этой системы одна и та же при любых значениях n и j. Тогда представляется рациональным вычислить обратную матрицу и определять все υ_j^n с помощью операции умножения одной и той же матрицы на вектор, который зависит от номеров j и n.

5. Пример. В качестве примера рассмотрим одномерную задачу о квазистатическом деформировании изотропной цилиндрической трубы под действием равномерно распределенной нагрузки $P_0(t)$, приложенной к внутренней поверхности трубы. Будем рассматривать движение трубы в цилиндрической системе координат r, φ. В этом случае отличны от нуля только одна компонента вектора скорости $\upsilon = \upsilon_r$, две компоненты тензора скоростей деформаций $e_r = \partial v/\partial r$ и $e_\varphi = v/r$ и три компоненты тензора напряжений: $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$. Тензор $A\sigma$ также имеет три отличные от нуля компоненты

$$(A\sigma)_\xi = (1+\nu)\left[\frac{\sigma_\xi}{E} - \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z}{3}\right], \quad \xi = r, \varphi, z \tag{5.1}$$

Билинейная форма $A = A(\sigma, \tau)$ записывается тогда следующим образом:

$$A(\sigma, \tau) = \frac{1+\nu}{E}\int_{r_1}^{r_2} r\left(\sigma_r\tau_r + \sigma_\varphi\tau_\varphi + \sigma_z\tau_z - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)(\tau_r + \tau_\varphi + \tau_z)\right)dr$$

Вариационное равенство (4.2) можно привести к виду

$$\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v_j w}{r^2}\right)r dr = P_0(t) - \int_{r_1}^{r_2}\left(\sigma_r^n\frac{\partial w}{\partial r} + \sigma_\varphi^n\frac{w}{r}\right)r dr, \quad v_j = v_j^n - v_{j-1}^n \tag{5.2}$$

Переходя к итерационной процедуре решения конечномерной задачи, введем на отрезке $[1, r]$ сетку Δ_h, т.е. разбиение отрезка на n частей с узлами $1 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n = r$. На сетке Δ_h задается пространство кусочно-линейных функций V_h и пространство H_h кусочно-постоянных тензорных полей $\sigma_h = (\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z)_h \in H_h$. Очевидно, что любой элемент из V_h однозначно определяется с помощью $(n + 1)$ значений скорости в узлах сетки, а любой элемент из H_h однозначно определяется с помощью $3n$ значений тензора напряжений на каждом отрезке разбиения.

Из вариационного равенства (5.2) следует система уравнений, позволяющая определить неизвестные значения скоростей в узлах сетки. Можно проверить, что матрица этой системы симметричная диагональная и обладает свойством преобладания диагональных элементов. Поэтому для решения системы целесообразно воспользоваться методом прогонки, который, как хорошо известно, устойчив и эффективен. Если учесть, что матрица этой системы не зависит от номера итерации, а также от параметров ρ и $\bar{\rho}$, то можно полагать, что предложенный алгоритм также будет устойчив и эффективен.

Тензор напряжений на каждой итерации определяется из соотношения (4.4). Условно вычисления можно разбить на два этапа:

1) вычисление величины, стоящей в фигурных скобках в формуле (4.4);

2) проектирование этой величины на множество $P_h = H_h \cap P$.

Как отмечалось выше, второй этап сводится к решению задачи нелинейного программирования на каждом элементе сетки в пространстве переменных $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \chi)$. Для решения этой задачи разработаны эффективные численные методы [18, 19]. Заметим, что второй этап – наиболее трудоемкая часть алгоритма решения квазистатической задачи. Предлагаемый способ представляет собой один из возможных способов решения вариационных неравенств. Можно воспользоваться и другими методами, однако любой из них так или иначе сводит решение вариационного неравенства к некоторой итерационной процедуре.

Метод, связанный с операцией проектирования, был здесь выбран лишь с той целью, чтобы получить возможность сопоставить этот способ с другими методами, где используется процедура коррекции напряжений. Рассмотренный способ решения вариационного неравенства (4.1) имеет строгое обоснование, однако число итераций, за которое может быть построено решение задачи нелинейного программирования, зависит от задаваемой точности. Этим рассмотренный способ отличается от других способов, основанных на процедуре коррекции напряжений, где сама процедура состоит из некоторого, заранее известного числа заданных действий.

6. Приложение. Покажем, что итерационный процесс, построенный с помощью алгоритма Удзавы, сходится к решению конечномерной задачи. С этой целью в первом неравенстве (3.1) возьмем в качестве пробной функции $\tau = \bar{\sigma}_j^n$, а в неравенстве (4.1) $\tau = \bar{\sigma}^n$, и затем сложим оба неравенства. Получим

$$[(\bar{\sigma}_j^n - \bar{\sigma}^n), (\bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_j^n)] - \Delta(e(\upsilon_{j-1}^n - \upsilon^n):(\sigma^n - \sigma_j^n)) \ge 0 \tag{6.1}$$

Первое слагаемое в левой части неравенства (6.1) представляет собой скалярное произведение, ассоциированное с симметричной билинейной нормой

$$[\bar{\sigma}, \bar{\tau}] = (A\sigma, \tau) + \chi\gamma\eta, \quad \bar{\sigma} = (\sigma, \chi), \quad \bar{\tau} = (\tau, \eta)$$

Связанную с ним норму будем обозначать через $\langle \bar{\sigma} \rangle \equiv [\bar{\sigma}, \bar{\sigma}]^{1/2}$. Далее умножим второе уравнение (3.1) на ρ и вычтем из него соотношение (4.2). В качестве пробной функции w введем

$w_j = \upsilon_j^n - \upsilon^n$

Тогда получим

$$(e(w_j):e(w_j)) = (e(w_{j-1}):e(w_j)) + \rho((\sigma^n - \sigma_j^n):e(w_j)) =$$
$$= ((e(w_{j-1}) + \rho(\sigma^n - \sigma_j^n)):e(w_j)) \le \|e(w_{j-1}) + \rho(\sigma^n - \sigma_j^n)\| \|e(w_j)\|$$

Последняя оценка следует из неравенства Коши. Сокращая обе части неравенства на общий множитель, приходим к соотношениям

$$\|e(w_j)\|^2 \le \|e(w_{j-1}) + \rho(\sigma^n - \sigma_j^n)\|^2 =$$
$$= \|e(w_{j-1})\|^2 + \rho^2\|\sigma^n - \sigma_j^n\|^2 + 2\rho(e(w_j):(\sigma^n - \sigma_j^n)) \tag{6.2}$$

Последнее слагаемое в правой части можно исключить, если воспользоваться неравенством (6.1). Умножив неравенство (6.1) на $2\rho/\Delta$ и сложив с равенством (6.2), получим

$$\|e(w_j)\|^2 + 2(\rho/\Delta)\langle \sigma^n - \sigma_j^n \rangle^2 \le \|e(w_{j-1})\|^2 + \rho^2\|\sigma^n - \sigma_j^n\|^2 \le$$
$$\le \|e(w_{j-1})\|^2 + (\rho^2/\alpha)\langle \sigma^n - \sigma_j^n \rangle^2$$

так как $\|\sigma^n - \sigma_j^n\|^2 \le \langle \bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_j^n \rangle^2/\alpha$. Приведем теперь подобные члены и просуммируем по j от единицы до некоторого M. Переходя от функций w_{j-1}, w_j к функциям υ_{j-1}^n, υ_j^n, получим

$$\left(\frac{2\rho}{\Delta} - \frac{\rho^2}{\alpha}\right)\sum(M) + \|e(w_M)\|^2 \le \|e(w_0)\|^2, \quad \sum(M) = \sum_{j=1}^{M} \langle \bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_j^n \rangle^2$$

Выберем ρ так, чтобы множитель перед знаком суммы был положителен, т.е. $\rho < 2\alpha/\Delta$. Тогда из последнего неравенства будет следовать, что ряд $\sum(\infty)$ сходится, и значит $\langle \bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_j^n \rangle \to 0$ при $j \to \infty$, что и доказывает сходимость итерационного процесса к решению конечномерной задачи.

В обсуждении замысла и первоначальных вариантов статьи принимал участие старший научный сотрудник Института проблем механики РАН Александр Николаевич Ковшов (1941–2002), кандидат физико-математических наук, автор более пятидесяти работ по механике твердого деформируемого тела. Посвящаем эту работу его памяти.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике / Ред. Б. Олдер и др. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
2. *Owen D.R., Hinton E.* Finite elements in plasticity. N.-Y.: McGraw-Hill, 1980. 594 p.
3. *Johnson C.* A mixed finite element method for plasticity problems with hardening // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14. P. 575–584.
4. *Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н.* Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 4–15.
5. *Седов Л.И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 5. С. 771–785.
6. *Halphen B., Nguyen Quoc Son.* Sur les matériaux standards géneralisés // J. Méc. 1975. V. 14. № 1. P. 39–63.
7. *Eve R.A., Reddy B.D., Rockafellar R.T.* An internal variable theory of elastoplasticity based on the maximum plastic work inequality // Quart. Appl. Math. 1990. V. 48. №1. P. 59–83.
8. *Moreau J.J.* Sur le lois de frootterment, de plasticité et de viscosité // C. r. Acad. sci. Ser. A et B. 1970. T. 217. № 13. P. A608-A611.
9. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam etc. North Holland, 1976 = *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и его применения. М.: Мир, 1979. 399 с.
10. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. V. 2. Partial Differential Equations. N.-Y., L.: Intersci. 1962 = *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
11. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
12. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
13. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
14. *Седов Л.И.* Механика сплошных сред. Т.2. М.: Наука, 1976. 576 с.
15. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950 = *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
16. *Drucker D. C.* A definition of stable inelastic material // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1959. V. 26. № 1. P. 101–106.
17. *Ciarlet Ph.* The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam etc. North Holland, 1979 = *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для решения эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
18. *Bazaraa M.S., Shetty C.M.* Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. N.-Y., etc.: Wiley, 1979 = *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.
19. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация. М.: Наука, 1981. 400 с.

Москва
e-mail:glai@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
4.III.2004