

УДК 539.3

© 2006 г. В. Б. Зеленцов

ОБ УДАРЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Рассматривается нестационарная динамическая контактная задача об ударе плоского абсолютно твердого штампа в упругую полуплоскость. Решение интегрального уравнения рассматриваемой задачи относительно неизвестной трансформанты Лапласа контактных напряжений на основании штампа построено специальным методом последовательных приближений. Решение поставленной нестационарной динамической контактной задачи получено после применения обратного преобразования Лапласа к решению интегрального уравнения во всем временном диапазоне процесса удара, а закон внедрения штампа в упругую среду определяется из интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерры. На основании полученного решения формулируются условия начала отрыва штампа от упругой полуплоскости и подробно исследуются все этапы процесса отрыва. При этом закон движения штампа на упругой полуплоскости и ширина изменяющейся при отрыве зоны контакта определяются из решения интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерры при выполнении дополнительного условия.

Ранее был получен [1–3] нулевой член асимптотики рассматриваемой задачи. Был описан [3] алгоритм построения решения, когда выполнение граничных условий задачи на каждом шаге ее решения осуществляется путем решения ряда специальным образом поставленных смешанных задач.

1. Постановка задачи и ее интегральное уравнение. Рассматривается нестационарная динамическая контактная задача об ударе абсолютно твердого плоского штампа ширины $2a$ массы m в упругую полуплоскость $(-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty)$ с начальной скоростью v_0 . Штамп внедряется в полуплоскость вдоль оси y , являющейся осью его симметрии. Силы трения и сцепления между основанием штампа и полуплоскостью отсутствуют. В начальный момент времени полуплоскость находится в покое и поэтому смещения упругой среды $u = u(x, y, t), v = v(x, y, t)$ и их скорости при $t = 0$ равны нулю. На бесконечности в среде (при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$) напряжения и смещения равны нулю.

Постановка рассматриваемой задачи в общепринятых в теории упругости обозначениях [3–6] включает следующие смешанные граничные условия ($t > 0$):

$$u(x, 0, t) = \epsilon(t), \quad |x| \leq a; \quad \sigma_{yy}(x, 0, t) = 0, \quad a < |x| < \infty; \quad \sigma_{xy}(x, 0, t) = 0, \quad |x| < \infty \quad (1.1)$$

где σ_{yy}, σ_{xy} – нормальное и касательное напряжения, $\epsilon(t)$ – закон движения штампа на упругой полуплоскости.

Поставленная задача с помощью интегральных преобразований Лапласа (по времени t) с параметром p и Фурье (по координате x), последовательно применяющихся к дифференциальным уравнениям теории упругости [4, 5] и к граничным условиям (1.1), с учетом условий на бесконечности и нулевых начальных условий приводится к решению интегрального уравнения (ИУ) первого рода в безразмерной форме [1, 2]

$$\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f^L(p), \quad |x| \leq 1 \quad (1.2)$$

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(u) e^{iut} du, \quad K(u) = 2 \frac{(1 - \beta^2) \sigma_2}{R(u)}, \quad R(u) = (2u^2 + 1)^2 - 4u^2 \sigma_1 \sigma_2$$

$$f^L(p) = 2 \frac{(1 - \beta^2) \mu}{a} \varepsilon^L(p), \quad \beta = \frac{c_2}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.3}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{u^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2 + \beta^2}, \quad \Lambda = \frac{c_2}{\rho a}$$

где $\varphi^L(x, p)$ – трансформанта Лапласа функции $\varphi(x, t)$ – искомой функции распределения контактных напряжений под штампом, $\varepsilon^L(p)$ – трансформанта Лапласа функции $\varepsilon(t)$ (1.1), c_1, c_2 – скорости распространения продольной и поперечной упругих волн смещений и напряжений, λ, μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность материала упругой полуплоскости. Контур интегрирования Γ в комплексной плоскости $u = \sigma + it$ проходит от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль действительной оси $\tau = 0$ под углом $-\arg p$ к ее положительному направлению.

2. Нулевой член решения интегрального уравнения и поставленной задачи. Решение ИУ (1.2) в форме нулевого члена асимптотического решения ИУ [4] для больших p (малые Λ) было построено [1, 2] в виде суперпозиции

$$\varphi_0^L(x, p) = -\varphi_{\infty}^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_{0+}^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_{0-}^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right), \quad |x| \leq 1 \tag{2.1}$$

для $0 \leq \Lambda \leq 2\beta$. Нулевой индекс здесь соответствует номеру члена решения $\varphi^L(x, p)$ ИУ (1.2); $\varphi_{0\pm}^L(x, p)$ – решения ИУ

$$\int_{-1}^{\infty} \varphi_{0+}^L\left(\frac{1+\xi}{\Lambda}, p\right) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f^L(p), \quad -1 \leq x < \infty \tag{2.2}$$

$$\int_{-\infty}^1 \varphi_{0-}^L\left(\frac{1-\xi}{\Lambda}, p\right) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f^L(p), \quad -\infty < x \leq 1 \tag{2.3}$$

а $\varphi_{\infty}^L(x, p)$ – решение ИУ свертки на всей оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\infty}^L\left(\frac{\xi}{\Lambda}, p\right) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = 2\pi f^L(p), \quad -\infty < x < \infty \tag{2.4}$$

ИУ (2.2), (2.3) с помощью линейных замен сводятся к ИУ на полуоси, решение которых строится методом Винера–Хопфа, а символ ядра $K(u)$ (1.3) аппроксимируется выражением специального вида [1, 2]

$$K(u) = \frac{\sqrt{u^2 + \beta^2}}{u^2 + \eta_R^2} \exp[d_0(\omega(u) + \omega(-u))] \tag{2.5}$$

$$\omega(u) = (\sqrt{1-iu} - \sqrt{\beta-iu})^2, \quad d_0 = \frac{2}{(1-\sqrt{\beta})^2} \ln \frac{K(0)\eta_R^2}{\beta}$$

где $\pm i\eta_R$ – полюсы Релея, определяемые из уравнения Релея $R(u) = 0$. Аппроксимация (2.5) позволяет преодолеть основную трудность метода Винера–Хопфа – факторизацию функции $K(u)$, т.е. представление ее в виде произведения двух функций $K_{\pm}(u)$ регулярных в верхней (индекс плюс) и нижней (индекс минус) полуплоскостях. Факторизация аппроксимации функции $K(u)$ (2.5) достигается элементарными средствами; имеем

$$K_{\pm}(u) = \frac{\sqrt{\beta \mp iu}}{\eta_R \mp iu} \exp[d_0 \omega(\mp u)] \quad (2.6)$$

Решения ИУ (2.2), (2.3), полученные ранее [1, 2], можно представить в новой форме

$$\Phi_{0\pm}^L(x, p) = \Phi_{\infty}^L(x, p) + \tilde{\Phi}_{0\pm}^L(x, p) \quad (2.7)$$

где

$$\tilde{\Phi}_{0\pm}^L(x, p) = -\frac{f^L(p)}{\pi \Lambda K_-(0)} \int_{\beta}^{\infty} w(\xi) e^{-\xi x} d\xi, \quad w(\xi) = \frac{1}{\xi} l(\xi) w_*(\xi) \quad (2.8)$$

$$l(\xi) = \frac{\eta_R - \xi}{\sqrt{\xi - \beta}}, \quad w_*(\xi) = \begin{cases} \exp(d_0(\sqrt{\xi - \beta} - \sqrt{\xi - 1})^2), & 1 \leq \xi < \infty \\ \exp(d_0(1 + \beta - 2\xi)) \cos(2d_0\sqrt{\xi - \beta}\sqrt{1 - \xi}), & \beta \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

Функция $\Phi_{\infty}^L(x, p)$, являющаяся решением ИУ (2.4) и полученная [1, 2] с помощью интегрального преобразования Фурье, определяется формулой

$$\Phi_{\infty}^L(x, p) = \frac{f^L(p)}{\Lambda K(0)} \quad (2.9)$$

Функции $\tilde{\Phi}_{0\pm}^L(x, p)$ (2.8) – трансформанты Лапласа дифракционных волн, порожденных угловыми точками $x = \pm 1$ краев основания штампа.

Нулевой член (2.1) асимптотики решения ИУ (1.2) при учете формулы (2.7) с выделенными трансформантами Лапласа дифракционных волн приобретает новую форму

$$\Phi_0^L(x, p) = \Phi_{\infty}^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) + \tilde{\Phi}_{0+}^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \tilde{\Phi}_{0-}^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) \quad (2.10)$$

с функциями $\tilde{\Phi}_{0\pm}^L(x, p)$ и $\Phi_{\infty}^L(x, p)$, определяемыми формулами (2.8), (2.9) соответственно.

После вычисления обратного преобразования Лапласа от функции (2.10) получим нулевой член решения поставленной задачи [1, 2], записанный в новой форме

$$\Phi_0(x, t) = \Phi_{\infty}\left(\frac{ax}{c_2}, t\right) + \tilde{\Phi}_{0+}\left(\frac{a(1+x)}{c_2}, t\right) + \tilde{\Phi}_{0-}\left(\frac{a(1-x)}{c_2}, t\right), \quad 0 < t < t_1; \quad t_1 = \frac{2a}{c_1} \quad (2.11)$$

где

$$\Phi_{\infty}(u, t) = \frac{a}{c_2 K(0)} H(t)(f(t) + f(0)\delta(t)) \quad (2.12)$$

$$\tilde{\Phi}_{0\pm}(u, t) = -\frac{1}{\pi K_-(0)c_2} \frac{a}{\sqrt{u}} \frac{H(t - \beta u)}{\sqrt{u}} \int_0^{t - \beta u} f(\tau) q(t - \tau, u) w_*\left(\frac{t - \tau}{u}\right) d\tau \quad (2.13)$$

$$f(t) = 2 \frac{(1 - \beta^2)\mu}{a} \varepsilon(t), \quad q(t, u) = \frac{u\eta_R - t}{t\sqrt{t - \beta u}}$$

$H(t)$ – функция Хевисайда, точкой обозначена производная по времени t функции $f(t)$.

Функции $\tilde{\varphi}_{0\pm}(x, t)$ (2.13) описывают дифракционные волны, порожденные угловыми точками краев основания штампа $x = \pm 1$ в начальный момент времени ($t = 0$) внедрения штампа. Здесь просматриваются фронт продольной волны напряжений (см. выражение для $q(t, u)$ с корневой особенностью $(c_1 t - a(1 \pm x))^{-1/2}$ в случае $f(0) \neq 0$ или гладкий фронт типа $(c_1 t - a(1 \pm x))^{1/2}$ в случае $f(0) = 0$, фронт поперечной волны в $w_*(t)$, постоянная (не зависящая от времени в период внедрения штампа и до момента начала его отрыва от упругой среды) особенность корневого типа $(1 \pm x)^{-1/2}$ в угловых точках краев основания штампа $x = \pm 1$.

Найденное решение (2.11)–(2.13) является нулевым членом решения поставленной задачи и определено для интервала времени $0 < t < t_1$, т.е. до тех пор, пока дифракционные волны (2.13), порожденные угловыми точками краев основания штампа, не достигнут противоположных им угловых точек краев основания штампа.

Закон движения штампа $\varepsilon(t)$ как движение его центра масс определяется из дифференциального уравнения [1, 2]

$$m\ddot{\varepsilon}(t) = Q(t), \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = v_0 \tag{2.14}$$

для периода времени $0 < t < t_1$, в течение которого сила $Q(t)$ упругого сопротивления среды внедрению штампа равна взятой с обратным знаком силе контактного воздействия штампа на упругую среду

$$P(t) = a \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx \tag{2.15}$$

На рассматриваемом временном интервале, согласно формуле (2.11), имеем

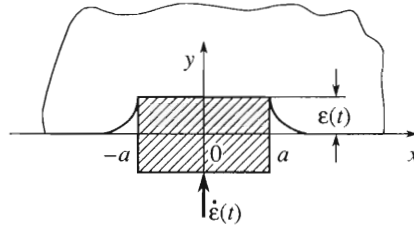
$$P(t) = a \int_{-1}^1 \varphi_0(x, t) dx = P_{\infty}(t) + \tilde{P}_{0+}(t) + \tilde{P}_{0-}(t), \quad 0 < t < t_1 \tag{2.16}$$

$$P_{\infty}(t) = a \int_{-1}^1 \varphi_{\infty}\left(\frac{ax}{c_2}, t\right) dx = \frac{at_2}{K(0)}(f(t) + f(0)\delta(t))H(t), \quad t_2 = \frac{2a}{c_2} \tag{2.17}$$

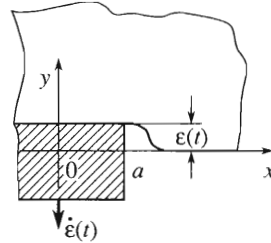
$$\tilde{P}_{0\pm}(t) = a \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_{0\pm}\left(\frac{a(1 \pm x)}{c_2}, t\right) dx = -\frac{a}{\pi K_-(0)} H(t) f(t) \int_{\beta}^{\infty} \frac{w(\xi)}{\xi} d\xi \tag{2.18}$$

Полученные формулы позволяют рассчитать изменение скалярного поля контактных напряжений под штампом $\varphi_0(x, t)$, определить закон внедрения штампа $\varepsilon(t)$, скорость внедрения $\dot{\varepsilon}(t)$ и другие характеристики процесса внедрения штампа в период времени $0 < t < t_1$, если в течение этого периода не произошел отрыв штампа от упругой среды.

3. Отрыв штампа от упругой среды. В ряде работ ([1–3, 6] и др.), в которых использовались аналитические методы при решении нестационарных динамических контактных задач, основное внимание уделялось исследованию процесса внедрения плоского жесткого штампа в упругую среду в предположении, что либо известен закон внедрения штампа, либо известно, что штамп приклеен к поверхности упругой среды, а ширина зоны контакта фиксирована и совпадает с шириной штампа. Исследование процессов, сопровождающих удар, предполагает изучение не только процесса внедрения штампа в упругую среду, но также и его вторую фазу – процесс выдавливания штампа, которая



Фиг. 1



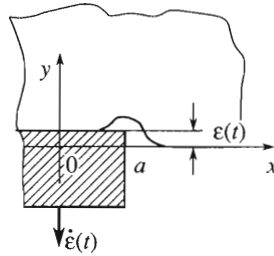
Фиг. 2

включает в себя процесс отрыва штампа от упругой среды. Анализ процесса отрыва штампа позволяет установить и исследовать дополнительные важные характеристики процессов, сопровождающих удар, такие как длительность контакта, скорость отрыва и т.д.

При фиксированной ширине зоны контакта $2a$, которая совпадает с шириной штампа, при наличии решения задачи (2.11)–(2.13) для $0 < t < t_1$ остается определить из уравнения (2.14) закон внедрения штампа $\varepsilon(t)$ и подставить его в соотношения (2.11)–(2.13). Формулы (2.11)–(2.13) показывают, что при внедрении плоского штампа угловые точки краев основания штампа $x = \pm 1$ являются точками концентрации напряжений и образуют излом поверхности упругой среды вне основания штампа (фиг. 1). Направление скорости движения штампа $\dot{\varepsilon}(t)$ на приведенных фигурах обозначено стрелкой; длина стрелки соответствует величине скорости. Сила упругого сопротивления среды внедрению штампа $Q(t)$ ($0 < t < t_1$) сначала останавливает штамп (в заглубленном положении), а затем начинает выдавливать его, что сопровождается локальным выпучиванием среды под штампом. В результате наступает такой момент времени $t = t_*$, когда угловые точки краев основания штампа отрываются от упругой среды и при этом теряют свое основное свойство – свойство концентраторов напряжений, а на поверхности вне штампа при этом пропадает излом, и она становится гладкой (фиг. 2). С математической точки зрения, это означает, что в полученном решении $\varphi_0(x, t)$ рассматриваемой задачи (2.11)–(2.13) в момент времени $t = t_*$ пропадает постоянная (не зависящая от времени) особенность корневого типа $\omega_0(x, t) (1 - x^2)^{-1/2}$ в угловых точках краев основания штампа. Это может произойти только в случае, если коэффициент

$$C_0(t, a) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - x^2} \varphi_0(x, t) = \lim_{x \rightarrow \mp 1 \pm 0} \sqrt{1 \pm x} \varphi_{0\pm} \left(\frac{a(1 \pm x)}{c_2}, t \right) \quad (3.1)$$

стоящий при этой особенности, обратится в нуль: $C_0(t_*, a) = 0$, $0 < t_* < t_1$. Тогда для определения момента времени $t = t_*$ начала отрыва штампа необходимо решить уравнение



Фиг. 3

$$C_0(t, a) = -\frac{H(t)}{\pi K_-(0)} \sqrt{\frac{a}{c_2}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0, \quad 0 < t < t_1 \tag{3.2}$$

при $a = \text{const}$. При этом в момент времени $t = t_*$ решение $\varphi_0(x, t)$ (2.11)–(2.13) ИУ (1.2) переходит из класса интегрируемых функций

$$\varphi_0(x, t) = \omega_0(x, t)(1 - x^2)^{-1/2} (\omega_0(x, t) \in C_{[-1,1]} \text{ для каждого } t \in (0, t) \text{ на участке } |x| < 1)$$

допускающих корневую особенность в угловых точках краев основания штампа, в класс непрерывных функций $\varphi_0(x, t) \in C_{[-1,1]}$ на участке $|x| \leq 1$.

После отрыва угловых точек краев основания штампа $x = \pm 1$ от упругой среды при $t > t_*$ ($t_* < t_1$) начинает изменяться во времени полуширина зоны контакта a (фиг. 3). Так как угловые точки краев основания штампа при $t = t_*$ оторвались от упругой среды, решение $\varphi_0(x, t)$ (2.11)–(2.13) при $t \geq t_*$ должно определяться в классе непрерывных функций, чего можно добиться только за счет выполнения условия (3.2) при $t > t_*$. Этого можно добиться только за счет подбора полуширины зоны контакта a , в результате чего для каждого $t > t_*$ условие (3.2) превращается в алгебраическое уравнение для определения соответствующего моменту времени t значения функции $a(t)$

$$C_0(t, a(t)) = 0, \quad t_* < t < t_1 \tag{3.3}$$

Из формулы (3.2) следует, что $C_0(t, a(t))$ зависит от закона внедрения штампа $\epsilon(t)$, поэтому решение уравнения (3.3) относительно $a(t)$ осуществляется на каждом шаге по t численного интегрирования дифференциального уравнения движения штампа (2.14), правая часть которого зависит в свою очередь не только от t , но и от полуширины зоны контакта $a(t)$, фигурирующей в формулах (2.15)–(2.18). Следует подчеркнуть, что в соотношениях (3.3) a не зависит от переменной интегрирования τ , а зависит только от t .

Можно показать, что решение $a(t)$ уравнения (3.3) – убывающая функция для $t_* < t < t_{**} < t_1$, где t_{**} – время отрыва штампа от упругой среды, т.е. время, когда $a(t_{**}) = 0$. Функция $P(t)$ (2.16)–(2.18), определяющая правую часть дифференциального уравнения (2.14), является функцией, убывающей при $a \rightarrow 0$, для которой справедлива оценка

$$P(t) = k_0(t)a + O(a\sqrt{a}) \quad \text{при } a \rightarrow 0, \quad t_* < t < t_{**} \tag{3.4}$$

Важная характеристика процесса отрыва штампа от упругой среды – скорость его отрыва $v_* = \dot{\epsilon}(t_{**})$, определяемая в ходе решения задачи (2.14) совместно с условием (3.3); при этом определяется и скорость изменения полуширины зоны контакта $\dot{a}(t)$ ($t_* < t < t_{**}$).

Следует заметить, что выражение для $C_0(t, a)$ можно видоизменить, вычислив интеграл в равенстве (3.2) по частям. Тогда получим условие

$$C_0(t, a(t)) = H(t) \left(\int_0^t P(\tau) \sqrt{t - \tau} d\tau + m v_0 \sqrt{t} \right), \quad 0 < t < t_1 \quad (3.5)$$

в котором $P(\tau)$, как и $f(\tau)$, зависит от $a(t)$ (см. формулы (2.16)–(2.18)), m – масса штампа. Применение условия (3.5) часто бывает более удобно, чем (3.2), при численной реализации метода решения.

4. Решение задачи во всем временном диапазоне процесса удара. Построим решение рассматриваемой задачи для промежутка времени $t_1 < t < 2t_1$, считая, что за время $t \in (0, t_1)$ отрыв штампа от упругой среды не произошел. Дифракционные волны $\varphi_0(x, t)$, порожденные краями основания штампа в начальный момент удара, пробежали вдоль всего основания штампа от одного края до другого и при $t = t_1$, породив в противоположных угловых точках краев основания штампа $x = \pm 1$ новые дифракционные волны $\tilde{\varphi}_{1\pm}(x, t)$, вышли на свободную поверхность упругой среды вне штампа $-\infty < x < -1$, $1 < x < \infty$, вследствие чего нарушилась постановка исходной задачи для $t > t_1$. Для снятия нагрузки от дифракционной волны $\tilde{\varphi}_{0\pm}(x, t)$ на поверхности вне штампа при $t_1 < t < 2t_1$, где должна быть поверхность, свободная от напряжений, требуется корректировка граничных условий исходной задачи на поверхности вне штампа, как это сделано ранее [3].

Для получения первого члена $\varphi_1(x, t)$ решения задачи на новом временном промежутке $t_1 < t < 2t_1$ необходимо определить $\varphi_1^L(x, p)$ для $2\beta < \Lambda < 4\beta$, что сводится к построению первого шага специального метода последовательных приближений решения ИУ (1.2). С этой целью вычтем и прибавим $\varphi_0^L(x, p)$ (2.1) к $\varphi^L(x, p)$ в ИУ (1.2) и, учитывая соотношения (2.2)–(2.4) для $\varphi_{0\pm}^L\left(\frac{1 \pm x}{\Lambda}, p\right)$, $\varphi_{\infty}^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right)$, а также структуру $\varphi_{0\pm}^L\left(\frac{1 \pm x}{\Lambda}, p\right)$ (2.7), получим новое интегральное соотношение

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_1^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right) d\xi &= H(1+x) \int_1^{\infty} \tilde{\varphi}_{0+}^L\left(\frac{1+\xi}{\Lambda}, p\right) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi + \\ &+ H(1-x) \int_{-\infty}^1 \tilde{\varphi}_{0-}^L\left(\frac{1-\xi}{\Lambda}, p\right) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Индексом единица отмечен первый член решения ИУ (1.2):

$$\varphi_1^L(x, p) = \varphi^L(x, p) - \varphi_0^L(x, p) \quad (4.2)$$

В интегральном соотношении (4.1) дифракционные волны $\tilde{\varphi}_{0\pm}^L(x, p)$ для $2\beta < \Lambda < 4\beta$, соответствующие временному промежутку $t_1 < t < 2t_1$, находятся вне основания штампа. Для того чтобы избежать выхода дифракционных волн, необходимо нагрузку в правой части соотношения (4.1) зеркально отобразить относительно угловых точек основания штампа $x = \pm 1$ по оси x , что легко достигается, если поменять местами функции Хевисайда $H(1 \pm x)$, стоящие перед интегралами в правой части равенства (4.1). Решение, по-

лученное в результате ИУ для определения $\varphi_1^L(x, p)$, можно построить в виде суперпозиции новых дифракционных волн

$$\varphi_1^L(x, p) = \tilde{\varphi}_{1+}^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \tilde{\varphi}_{1-}^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) \quad (4.3)$$

Функции в правой части равенства (4.3) – решения следующих ИУ на полуосях:

$$\int_{-1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{1+}^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \int_{-\infty}^{-1} \tilde{\varphi}_{0-}^L\left(\frac{1-\xi}{\Lambda}, p\right) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi, \quad -1 \leq x < \infty \quad (4.4)$$

$$\int_{-\infty}^1 \tilde{\varphi}_{1-}^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi = \int_1^{\infty} \tilde{\varphi}_{0+}^L\left(\frac{1+\xi}{\Lambda}, p\right) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}\right) d\xi, \quad -\infty < x \leq 1 \quad (4.5)$$

Решение этих уравнений, так же как ИУ (2.2), (2.3), может быть построено методом Винера–Хопфа [7], причем потребуются обратить тот же интегральный оператор, что и на нулевом шаге метода последовательных приближений при обращении интегральных операторов (2.2), (2.3). Осуществив линейные замены переменных в ИУ (4.4), (4.5)

$$x = \mp 1 \pm \Lambda x', \quad \xi = \mp 1 \pm \Lambda \xi'$$

и опустив штрихи, получим ИУ Винера–Хопфа на полуоси

$$\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_{1\pm}^L(\xi, p) k(\xi-x) d\xi = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}_{0\mp}^L\left(\frac{2}{\Lambda} - \xi, p\right) k(\xi-x) d\xi, \quad 0 \leq x < \infty \quad (4.6)$$

относительно неизвестных трансформант Лапласа $\varphi_{1\pm}^L(x, p)$ с тем же ядром $k(t)$ (1.3), что и у ИУ (1.2). Ввиду четности рассматриваемой задачи $\tilde{\varphi}_{1+}^L(x, p) = \tilde{\varphi}_{1-}^L(x, p)$, поэтому, как и ранее при решении ИУ (2.2), (2.3), достаточно решить одно из ИУ (4.6).

Применяя для решения ИУ (4.6) стандартную процедуру метода Винера–Хопфа, при реализации которой используется специальная аппроксимация символа ядра ИУ (1.2) $K(u)$ вида (2.5), получаем решение ИУ (4.6)

$$\tilde{\varphi}_{1\pm}^L(x, p) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 \tilde{\varphi}_{0\pm}^L\left(\frac{2}{\Lambda} - \xi, p\right) d\xi \int_{\beta}^{\infty} \eta_1 w(\eta_1) e^{-\eta_1 x} d\eta_1 \int_{\beta}^{\infty} \frac{r(u_1)}{\eta_1 - u_1} e^{u_1 \xi} du_1, \quad r(u) = \frac{w_*(u)}{l(u)} \quad (4.7)$$

Внутренний интеграл в равенстве (4.7) понимается в смысле главного значения по Коши [7] и содержит две точки разрыва подынтегральной функции $u_1 = \eta_R, u_1 = \eta_1$ на полубесконечном интервале интегрирования.

Подставляя в равенство (4.7) выражения (2.8) и вычисляя получившиеся при этом квадратуры, получаем решения ИУ (4.6) в развернутой форме

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{1\pm}^L(x, p) &= \frac{1}{\pi^3 K_-(0)} \frac{f^L(p)}{\Lambda} \int_{\beta}^{\infty} w(\eta_0) d\eta_0 \int_{\beta}^{\infty} \eta_1 w(\eta_1) \times \\ &\times \exp\left(-\eta_0 \frac{2}{\Lambda} - \eta_1 x\right) d\eta_1 \int_{\beta}^{\infty} \frac{r(u_1) du_1}{(\eta_0 + u_1)(\eta_1 - u_1)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Возвратившись к старым переменным, получим искомое решение в форме суперпозиции (4.3).

Таким образом, решение ИУ (1.2), определяемое специальным методом последовательных приближений, при учете формул (4.2), (2.11), (4.3) приобретает следующий вид для интервала $2\beta < \Lambda < 4\beta$:

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_\infty^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) + \sum_{k=0}^1 \left(\tilde{\varphi}_{k+}^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \tilde{\varphi}_{k-}^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) \right) \quad (4.9)$$

Функции $\tilde{\varphi}_{0\pm}^L(x, p)$, $\tilde{\varphi}_{1\pm}^L(x, p)$ и $\varphi_\infty^L(x, p)$ определены соотношениями (2.8), (4.8) и (2.9) соответственно. Следует заметить, что функция $\varphi^L(x, p)$ (4.9) определена в классе функций с интегрируемой особенностью в угловых точках $x = \pm 1$ краев основания плоского штампа, т.е.

$$\varphi^L(x, p) \in \omega_*(x, p)(1-x^2)^{-1/2}, \quad \omega_*(x, p) \in C_{[-1, 1]}. \quad (4.10)$$

С другой стороны, соотношение (4.1) является также решением поставленной задачи в трансформантах Лапласа для $2\beta < \Lambda < 4\beta$. Тогда, переходя в соотношении (4.9) к оригиналам Лапласа, получим решение поставленной задачи для временного интервала $0 < t < 2t_1$

$$\varphi(x, t) = \varphi_\infty\left(\frac{ax}{c_2}, t\right) + \sum_{k=0}^1 H((k+1)t_1 - t) \left(\tilde{\varphi}_{k+}\left(\frac{a(1+x)}{c_2}, t\right) + \tilde{\varphi}_{k-}\left(\frac{a(1-x)}{c_2}, t\right) \right) \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{1\pm}(u, t) &= \frac{H(t-t_1-u\beta)}{2\pi^3 K_-(0)\sqrt{u}} \int_0^{t-t_1-u\beta} f(\tau) d\tau \int_{\beta}^{(t-\tau-u\beta)/t_2} w(\eta_0) q_*\left(\frac{t-\tau}{t_2} - \eta_0, u\right) \times \\ &\times w_*\left(\frac{t-\tau-\eta_0 t_2}{u}\right) d\eta_0 \int_{\beta}^{\infty} \frac{r(u_1) du_1}{(\eta_0 + u_1)((t-\tau)/t_2 - \eta_0 - uu_1 t_2^{-1})}, \quad q_*(t, u) = \frac{u\eta_0 t_2^{-1} - t}{\sqrt{t - u\beta t_2^{-1}}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

а функции $\tilde{\varphi}_{0\pm}\left(\frac{a(1\pm x)}{c_2}, t\right)$, и $\varphi_\infty\left(\frac{ax}{c_2}, t\right)$ определены формулами (2.12) и (2.13).

Решение (4.12) для $t_1 < t < 2t_1$ построено в классе функций, аналогичном классу (4.10).

Для определения закона движения штампа $\varepsilon(t)$ из решения задачи (2.14) на новом временном интервале $t_1 < t < 2t_1$ сначала найдем функцию $Q(t) = -P(t)$, воспользовавшись формулами (2.15) и (4.11). Имеем

$$P(t) = P_\infty(t) + \sum_{k=0}^1 H((k+1)t_1 - t) (\tilde{P}_{k+}(t) + \tilde{P}_{k-}(t)), \quad 0 < t < 2t_1 \quad (4.13)$$

где

$$\tilde{P}_{1\pm}(t) = \frac{aH(t-t_1)^{1/2}}{\pi^3 K_-(0)} \int_{\beta}^{t-t_1} w(\eta_0) f(t-t_2\eta_0) d\eta_0 \int_{\beta}^{t-t_2\eta_0} w(\eta_1) d\eta_1 \int_{\beta}^0 \frac{r(u_1) du_1}{(\eta_0 + u_1)(\eta_1 - u_1)} \quad (4.14)$$

а функции $P_\infty(t)$, $\tilde{P}_{0\pm}(t)$ определены формулами (2.17), (2.18).

Условие начала отрыва штампа от упругой полуплоскости на временном интервале $t_1 < t < 2t_1$ может быть получено по той же схеме, что на предыдущем временном интервале $0 < t < t_1$ – за счет обращения в нуль коэффициента $C_1(t, a)$ при постоянной особенности $(1 - x^2)^{-1/2}$ в угловых точках краев основания плоского штампа (при $a = \text{const}$), аналогично условию (3.1),

$$C_1(t, a) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - x^2} \varphi(x, t) = \lim_{x \rightarrow \mp 1 \pm 0} \sqrt{1 \pm x} \sum_{k=0}^1 H((k+1)t_1 - t) \tilde{\varphi}_{k\pm} \left(\frac{a(1 \pm x)}{c_2}, t \right) \quad (4.15)$$

если условие (3.2) не выполнилось на предыдущем временном интервале $0 < t < t_1$. Учитывая формулу (4.11), заключаем, что реализация условия начала отрыва штампа на временном интервале $t_1 < t < 2t_1$ приводит к следующему соотношению:

$$\sum_{k=0}^1 H((k+1)t_1 - t) C_k(t, a) = 0 \quad (4.16)$$

где

$$C_1(t, a) = \frac{H(t - t_1)}{\sqrt{2\pi^3 K_-(0)}} \sqrt{\frac{a}{c_2}} \int_0^{t-t_1} f(\tau) d\tau \int_{\beta}^{(t-\tau)/t_2} \frac{w(\eta_0) d\eta_0}{\sqrt{(t-\tau)/t_2 - \eta_0 \beta}} \int_{\beta}^{\infty} \frac{r(u_1)}{(\eta_0 + u_1)} du_1 \quad (4.17)$$

а функция $C_0(t, a)$ дается формулой (3.2).

Из уравнения (4.16) определяется момент времени $t = t_*$ – начало отрыва штампа от упругой полуплоскости на временном интервале $t_1 < t < 2t_1$ при $a = \text{const}$. На этом временном интервале решение (4.11) при $t = t_*$ переходит из класса интегрируемых функций в класс непрерывных функций, а при $t > t_*$ условие (4.16) превращается в уравнение, из которого находим переменную полуширину зоны контакта $a(t)$.

Условие (4.16), как и (3.3), зависит от закона внедрения штампа $\varepsilon(t)$, определяемого из решения задачи (2.14), содержащей интегро-дифференциальное уравнение, причем $Q(t) = -P(t)$ определяется формулой для $P(t)$ (4.13) на интервале $t_1 < t < 2t_1$. Тогда для функций $a(t)$ и $\varepsilon(t)$ на интервале $t_* < t < 2t_1$ необходимо, как и в разд. 3, на каждом шаге численного решения интегро-дифференциального уравнения из уравнения (4.16) определить соответствующую этому моменту времени полуширину зоны контакта $a(t)$.

Описанный алгоритм решения задачи на нулевом ($0 < t < t_1$) и первом ($t_1 < t < 2t_1$) шаге, если до $t < 2t_1$ не произошел отрыв штампа от упругой среды, можно продолжить и получить решение поставленной задачи на n -м шаге решения для временного интервала

$$nt_1 < t < (n+1)t_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

процесса удара плоского штампа в упругую полуплоскость.

Скалярное поле контактных напряжений в зоне контакта для $nt_1 < t < (n+1)t_1$ рассчитывается по формуле

$$\varphi(x, t) = \varphi_{\infty} \left(\frac{ax}{c_2}, t \right) + \sum_{k=0}^n H((k+1)t_1 - t) \left(\tilde{\varphi}_{k+} \left(\frac{a(1+x)}{c_2}, t \right) + \tilde{\varphi}_{k-} \left(\frac{a(1-x)}{c_2}, t \right) \right) \quad (4.19)$$

Здесь

$$\tilde{\varphi}_{k\pm}(u, t) = \frac{(-1)^{k+1} H(t - kt_1 - u\beta)}{2\pi^{2k+1} K_-(0)} \sqrt{\frac{t_2}{u}} \int_0^{t-kt_1-u\beta} f(\tau) R_k \left(\frac{t-\tau}{t_2}, u \right) d\tau, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$$R_k(t, u) = \int_{\beta}^{t - (k-1)\beta - u\beta t_2^{-1}} w(\eta_0) F_k(\eta_0, t, u) d\eta_0$$

$$F_k(\eta_0, t, u) = \int_{\beta}^{\theta_0 \theta_1} \int_{\beta}^{\theta_{k-3} k-2} \dots \int_{\beta} \prod_{i=1}^{k-2} \eta_i w(\eta_i) d\eta_i \int_0^{\theta_{k-2}} \eta_{k-1} w(\eta_{k-1}) q_*(t - \zeta_{k-1}, u) w_* \left(\frac{t - \zeta_{k-1}}{u t_2^{-1}} \right) \times$$

$$\times G_k(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}, t, u) d\eta_{k-1} \quad (4.20)$$

$$G_k(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}, t, u) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{r(u_k) G_{k-1}^*(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}) du_k}{(\eta_{k-1} + u_k)(t - \zeta_{k-1} - u u_k \beta t_2^{-1})}$$

$$G_k^*(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k) = \int_{\beta}^{\infty} \dots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^k \Omega_i(u_i, \eta_i, \eta_{i-1}) du_i, \quad \Omega_i(a, b, c) = \frac{r(a)}{(c-a)(b-a)}$$

$$\theta_i = \gamma_i - \frac{u\beta}{t_2}; \quad \gamma_i = \frac{t}{t_2} - \beta(k-2-i)H(k-2-i) - \zeta_i, \quad \zeta_i = \sum_{j=0}^i \eta_j$$

Все интегралы по u_k понимаются в смысле главного значения по Коши. Функции $\varphi_{\infty}(u, t)$, $\tilde{\varphi}_{0\pm}(x, t)$, $\tilde{\varphi}_{1\pm}(x, t)$ определены формулами (2.12), (2.13), (4.12).

Сила контактного воздействия штампа на упругую среду дается формулой

$$P(t) = P_{\infty}(t) + \sum_{k=0}^n H((k+1)t_1 - t) (\tilde{P}_{k+}(t) + \tilde{P}_{k-}(t)), \quad nt_1 < t < (n+1)t_1$$

$$\tilde{P}_{k\pm}(t) = \frac{(-1)^{k+1} a H(t - kt_1)^{t/t_2 - k\beta}}{\pi^{2k+1} K_{-}(0)} \int_{\beta} w(\eta_0) \Phi_k(\eta_0, t) d\eta_0, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (4.21)$$

$$\Phi_k(\eta_0, t) = \int_{\beta}^{\gamma_0 \gamma_1} \dots \int_{\beta}^{\gamma_{k-2} k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \eta_i w(\eta_i) d\eta_i \int_0^{\gamma_{k-1}} w(\eta_k) f(t - t_2 \zeta_{k-1}) G_k^*(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k) d\eta_k$$

Функции $P_{\infty}(t)$, $\tilde{P}_{0\pm}(t)$, $\tilde{P}_{1\pm}(t)$ определены формулами (2.17), (2.18), (4.14); значения γ_i определены последними двумя формулами (4.20).

Интегро-дифференциальное уравнение движения штампа на упругой полуплоскости (2.14) на рассматриваемом временном интервале $nt_1 < t < (n+1)t_1$ определяется правой его частью, где вместо $Q(t)$ необходимо подставить $-P(t)$ согласно формуле (4.21).

Условие отрыва штампа на временном интервале (4.18) в предположении, что штамп не оторвался от полуплоскости при $0 < t \leq nt_1$ (из этого условия определяется время начала отрыва $t = t_*$ ($a = \text{const}$)), дается формулой

$$\sum_{k=0}^n H((k+1)t_1 - t) C_k(t, a) = 0, \quad nt_1 < t < (n+1)t_1 \quad (4.22)$$

где

$$C_k(t, a) = \frac{(-1)^{k+1} H(t - kt_1)}{2\pi^{2k+1} K_-(0)} \sqrt{\frac{a}{c_2}} \int_0^{t-kt_1} f(\tau) R_k^* \left(\frac{t-\tau}{t_2} \right) d\tau, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (4.23)$$

$$R_k^*(t) = \int_{\beta}^{t-(k-1)\beta} w(\eta_0) F_k^*(\eta_0, t) d\eta_0, \quad F_k^*(\eta_0, t) = \lim_{u \rightarrow 0} F_k(\eta_0, t, u)$$

$$F_k^*(\eta_0, t) = \int_{\beta}^{\gamma_0 \gamma_1} \dots \int_{\beta}^{\gamma_{k-2} \gamma_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} \eta_i w(\eta_i) du_i \int_0^{\gamma_{k-1}} \frac{\eta_{k-1} w(\eta_{k-1})}{\sqrt{t - \zeta_{k-1}}} G_k^{**}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}, t) d\eta_{k-1}$$

$$G_k^{**}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}, t) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{r(u_k) G_{k-1}^*(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})}{\eta_{k-1} + u_k} du_k$$

Функции $C_0(t, a)$, $C_1(t, a)$ определены формулами (3.2), (4.17).

При $t > t_*$ ($nt_1 < t_* < (n + 1)t_1$) условие (4.22) становится уравнением для определения полуширины зоны контакта $a(t)$ на каждом шаге решения интегро-дифференциального уравнения (2.14) с $Q(t) = -P(t)$ из соотношения (4.21) по определению закона внедрения штампа $\epsilon(t)$ в упругую полуплоскость, который входит вместе с функцией $f(t)$ в подынтегральное выражение (4.23). Следует заметить, что при $t \geq t_*$ решение $\phi(x, t)$ поставленной задачи (4.19), полученное для временного интервала (4.18), принадлежит классу непрерывных на отрезке $|x| \leq 1$ функций за счет выполнения условия (4.22), тогда как для $nt_1 < t < t_*$ решение $\phi(x, t)$ принадлежит классу интегрируемых функций с корневой особенностью при $x = \pm 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеленцов В.Б. Об одном асимптотическом методе решения нестационарных динамических контактных задач // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 317–326.
2. Зеленцов В.Б. Нестационарная контактная задача о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 3. С. 34–44.
3. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
6. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
7. Noble B. Method Based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L.: Pergamon Press, 1958 = Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.