УДК 539.3

© 2006 г. **В. М. Александров**

ДВЕ ЗАДАЧИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Для упругой ортотропной полосы рассматриваются две задачи: контактная задача и задача о трещине. Обе задачи приводятся к интегральным уравнениям первого рода с разностными ядрами, содержащими особенность: логарифмическую для первой задачи и сингулярную для второй задачи. Для построения приближенных решений этих интегральных уравнений используются регулярный и сингулярный асимптотические методы. Приводятся численные результаты.

Аналогичные задачи для упругой изотропной полосы рассматривались ранее ([1], контактная задача и [2], задача о трещине).

1. Постановка контактной задачи. Пусть упругая ортотропная полоса толщины h занимает область $|x| < \infty$, $0 \le y \le h$. Нижняя граница полосы $y = 0$ шарнирно закреплена, а в верхнюю границу $y = h$ вдавливается силой P жесткий штамп, область контакта которого с границей полосы определяется неравенством $|x| \le a$. Ось действия силы параллельна оси y и находится справа от нее на расстоянии $e < a$. Силами трения в области контакта будем пренебрегать.

В силу сказанного для контактной задачи будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} \upsilon(x,0) = \tau_{xy}(x,0) = 0, \quad \tau_{xy}(x,h) = 0; \quad |x| < \infty \\ \sigma_y(x,h) = 0, \quad |x| > a; \quad \upsilon(x,h) = -[\delta + \alpha x - f(x)], \quad |x| \le a \end{gathered} \tag{1.1}$$

О т р е д а к ц и и. 1 января 2006 года исполнилось 70 лет Виктору Михайловичу Александрову, главному научному сотруднику Института проблем механики РАН, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации, лауреату Государственной премии Российской Федерации, действительному члену Российской академии естественных наук (секция физики).

Главные направления научной деятельности В.М. Александрова: механика контактных взаимодействий и механика разрушения деформируемых твердых тел; контактные задачи трибологии, теория концентрации напряжений вблизи тонких дефектов, задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями, интегральные, интегро-дифференциальные и функциональные уравнения задач математической физики. Список его трудов насчитывает более 350 наименований, среди которых девять монографий (список монографий приведен на с. 149).

Под руководством В.М. Александрова выполнено 30 кандидатских диссертаций. Семеро из его учеников впоследствии защитили докторские диссертации.

В.М. Александров – член Национального комитета по теоретической и прикладной механике, Национального комитета по трибологии, Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, Межведомственного научного совета по трибологии. Награжден орденом Почета.

Редколлегия и редакция ПММ, коллеги и ученики сердечно поздравляют В.М. Александрова с юбилеем, желают ему здоровья и новых достижений в науке.

Здесь υ – перемещение по оси y, τ_{xy} и σ_y – касательное и нормальное напряжения, δ – поступательное перемещение штампа вдоль отрицательного направления оси y под действием силы P, α – угол поворота штампа под действием момента Pe, $f(x)$ – функция, описывающая форму основания штампа.

Примем, что полоса находится в условиях плоской деформации. Тогда формулы закона Гука для полосы можно представить в виде [3]

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu_{31}\nu_{13}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1}\sigma_x + \frac{1-\nu_{32}\nu_{23}}{E_2}\sigma_y$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}}; \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{32}\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}\nu_{23}}{E_2} \tag{1.2}$$

Здесь σ_x – нормальное напряжение, ε_x, ε_y и γ_{xy} – деформации, ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, E_1 и E_2 – модули Юнга, G_{12} – модуль сдвига (всего семь независимых механических величин). К формулам (1.2) нужно добавить уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{1.4}$$

а также соотношение

$$\upsilon = \int\varepsilon_y dy \tag{1.5}$$

2. Интегральное уравнение контактной задачи. Полагая

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{2.1}$$

удовлетворим уравнениям равновесия (1.3). Подставляя затем выражения (2.1) в выражения (1.2), а преобразованные выражения (1.2) – в уравнение (1.4), получим для функции Эри следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} + 2A\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + B\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} = 0 \tag{2.2}$$

$$A = \frac{E_1[E_2 - G_{12}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})]}{G_{12}E_2(1-\nu_{31}\nu_{13})}, \quad B = \frac{E_1(1-\nu_{32}\nu_{23})}{E_2(1-\nu_{31}\nu_{13})}$$

Далее полагаем, что $A > 0$ и $B > 0$.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу с граничными условиями

$$\upsilon(x,0) = \tau_{xy}(x,0) = 0, \quad \tau_{xy}(x,h) = 0, \quad \sigma_y(x,h) = -\tilde{q}(x); \quad |x| < \infty$$
$$\tilde{q}(x) = q(x), \quad |x| \le a; \quad \tilde{q}(x) = 0, \quad |x| > a \tag{2.3}$$

Разыскивая функцию Эри в виде интеграла Фурье по x

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(y,\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{2.4}$$

и предполагая пока, что $A^2 > B$, из уравнения (2.2) найдем следующее выражение для трансформанты Фурье:

$$\Phi^*(y,\alpha) = c_1\operatorname{sh}(\kappa_1\alpha y) + c_2\operatorname{ch}(\kappa_1\alpha y) + c_3\operatorname{sh}(\kappa_2\alpha y) + c_4\operatorname{ch}(\kappa_2\alpha y)$$
$$\kappa_{1,2} = \sqrt{A \pm \sqrt{A^2 - B}} \tag{2.5}$$

где $c_1, \ldots, c_4$ – функции от α, которые нужно определить из факта выполнения граничных условий (2.3). Производя это определение, в результате решения вспомогательной задачи (2.3) найдем

$$\upsilon(x,h) = -\frac{1}{2\pi\theta}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha)\frac{L(\alpha h)}{\alpha}\mathrm{e}^{-i\alpha x}d\alpha, \quad Q(\alpha) = \int_{-a}^{a} q(\xi)\mathrm{e}^{i\alpha\xi}d\xi$$
$$L(u) = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2\operatorname{cth}(\kappa_1 u) - \kappa_1\operatorname{cth}(\kappa_2 u)}, \quad \theta = \frac{E_2\kappa_1\kappa_2}{(\kappa_1+\kappa_2)(1-\nu_{32}\nu_{23})} \quad (A^2 > B) \tag{2.6}$$

$Q(\alpha)$ – трансформанта Фурье разрывной функции $\tilde{q}(x)$ вида (2.3).

Перейдем к основной задаче. Удовлетворяя с помощью соотношений (2.6) последнему граничному условию (1.1) (остальные условия (1.1) уже удовлетворены в ходе получения первого соотношения (2.6)), придем к интегральному уравнению (ИУ) относительно функции контактного давления $q(x)$

$$\int_{-a}^{a} q(\xi)K\left(\frac{\xi - x}{h}\right)d\xi = \pi\theta[\delta + \alpha x - f(x)], \quad |x| \le a; \quad K(t) = \int_0^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos ut\, du \tag{2.7}$$

Приведем еще выражения для функции $L(u)$ и величины θ при $A^2 = B$ и $A^2 < B$

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch}(2Au) - 1}{\operatorname{sh}(2Au) + 2Au}, \quad \theta = \frac{E_2 A}{2(1-\nu_{32}\nu_{23})} \quad (A^2 = B)$$

$$L(u) = \frac{d[\operatorname{ch}(2cu) - \cos(2du)]}{d\operatorname{sh}(2cu) + c\sin(2du)}, \quad \theta = \frac{E_2(c^2+d^2)}{2c(1-\nu_{32}\nu_{23})} \quad (A^2 < B) \tag{2.8}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}b, \quad d = \frac{D}{\sqrt{2}b}, \quad D = \sqrt{B - A^2}, \quad b = \sqrt{A + \sqrt{A^2 + D^2}}$$

Заметим, что ИУ (2.7) для случаев $A^2 = B$ и $A^2 < B$ своего вида не изменяет.

3. Асимптотическое решение при большой относительной толщине полосы. Для всех трех случаев соотношения между величинами A^2 и B имеют место формулы

$$L(u) = 1 + O(\mathrm{e}^{-2\kappa u}), \quad u \to \infty$$
$$\kappa = \inf(\kappa_1, \kappa_2)\ (A^2 > B), \quad \kappa = A\ (A^2 = B), \quad \kappa = c\ (A^2 < B) \tag{3.1}$$
$$L(u) = lu + O(u^5), \quad u \to 0$$

$$l = \frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\ (A^2 > B), \quad l = \frac{A}{2}\ (A^2 = B), \quad l = \frac{c^2+d^2}{2c}\ (A^2 < B)$$

На основании соотношений (3.1) ядро ИУ (2.7) можно представить в форме [1]

$$
\begin{gathered}
K(t) = -\ln t - \sum_{i=0}^{\infty} d_i t^{2i} \\
d_0 = \int_0^{\infty} \frac{1 - L(u) - \mathrm{e}^{-u}}{u} du, \quad d_i = \frac{(-1)^i}{(2i)!} \int_0^{\infty} [1 - L(u)] u^{2i-1} du, \quad i = 1, 2, \ldots
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Ряд в выражении (3.2) абсолютно сходится при $|t| < 2\kappa$.

Переходя в ИУ (2.7) к безразмерным переменным и обозначениям по формулам

$$
\xi' = \frac{\xi}{a}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad \varphi(x') = \frac{q(x)}{\theta}, \quad g(x') = \frac{\delta + \alpha x - f(x)}{a}, \quad \lambda = \frac{h}{a} \tag{3.3}
$$

и подставляя в него выражение (3.2) для $K(t)$, будем иметь

$$
-\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| d\xi = \pi g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i}{\lambda^{2i}} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)(\xi - x)^{2i} d\xi, \quad |x| \le 1 \tag{3.4}
$$

Здесь и далее штрихи у безразмерных переменных опущены.

Будем искать решение ИУ (3.4) в форме ряда

$$
\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \lambda^{-2n} \tag{3.5}
$$

Поставляя выражение (3.5) в ИУ (3.4) и приравнивая в нем слева и справа члены при одинаковых степенях λ^{-2}, придем [1] к бесконечной системе последовательно решаемых ИУ относительно функций $\varphi_n(x)$. Приведем результат такого решения

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) = {} & \frac{N_0}{\pi\sqrt{1 - x^2}}\left[1 - \frac{2d_1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{2} - x^2\right) - \frac{4d_2}{\lambda^4}\left(\frac{7}{8} - x^2 - x^4\right) - \right. \\
& \left. - \frac{3d_1 d_2}{\lambda^6}\left(\frac{1}{2} - x^2\right) - \frac{6d_3}{\lambda^6}\left(\frac{13}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x^4 - x^6\right)\right] - \\
& - \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} g'(t)\left(\frac{1}{t - x} + \frac{2d_1 x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^4}[-d_1^2 x + d_2(3t - 2x + \right. \\
& + 2xt^2 - 6x^2 t + 6x^3)] + \frac{1}{\lambda^6}\Big\{2x[d_1^3 - d_1 d_2(1 + 2t^2 + 6x^2)] + \\
& + 3d_3\Big[5t + 5t^3 - \frac{1}{2}(11 + 18t^2 - 4t^4)x + (5t - 10t^3)x^2 + \\
& \left. + (5 + 20t^2)x^3 - 20x^4 t + 10x^5\Big]\Big\}\right) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Величина безразмерной вдавливающей силы

$$
N_0 = \frac{P}{\theta a} = \frac{1}{\theta a} \int_{-a}^{a} q(\xi) d\xi = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) d\xi \tag{3.7}
$$

должна быть определена из соотношения [1]

$$N_0 \ln 2\lambda = \int_{-1}^{1} \frac{g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i}{\lambda^{2i}} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)(\xi - t)^{2i} d\xi \tag{3.8}$$

Подставляя выражение (3.6) в равенство (3.8), получим

$$N_0 = \left[\ln 2\lambda - d_0 - \frac{d_1}{\lambda^2} - \frac{d_1^2}{4\lambda^4} - \frac{9d_2}{4\lambda^4} - \frac{2d_1 d_2}{\lambda^6} - \frac{25 d_3}{4\lambda^6} + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} g'(t) t \left[\frac{d_1}{\lambda^2} + \frac{d_2}{\lambda^4}\left(\frac{7}{2} + t^2\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{d_3}{\lambda^6}\left(\frac{39}{4} + 8t^2 + t^4\right)\right] dt + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right)\right\} \tag{3.9}$$

Найдем еще выражение для момента Pe, действующего на штамп. Введем безразмерный момент соотношением

$$N_1 = \frac{Pe}{\theta a^2} = \frac{1}{\theta a^2} \int_{-a}^{a} \xi q(\xi) d\xi = \int_{-1}^{1} \xi \varphi(\xi) d\xi \tag{3.10}$$

Подставляя выражение (3.6) в равенство (3.10), получим

$$N_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} g'(t) \left[1 - \frac{d_1}{\lambda^2} + \frac{d_1^2}{\lambda^4} - \frac{d_2}{\lambda^4}\left(\frac{5}{2} + 2t^2\right) - \frac{d_1^3}{\lambda^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{d_1 d_2}{\lambda^6}\left(\frac{11}{2} + 2t^2\right) - \frac{3d_3}{\lambda^6}\left(\frac{9}{4} + 3t^2 + t^4\right)\right] dt + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right) \tag{3.11}$$

4. Асимптотическое решение при малой относительной толщине полосы. Ограничимся построением главного члена асимптотики решения ИУ (2.7). Как было показано [1], он дается выражением

$$\varphi(x) = \varphi^{(1)}\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - \varphi^{(0)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \tag{4.1}$$

причем функции $\varphi^{(1)}(t)$, $\varphi^{(2)}(t)$ и $\varphi^{(0)}(t)$ должны быть найдены из ИУ

$$\begin{gathered} \int_{0}^{\infty} \varphi^{(k)}(\tau) K(\tau - t) d\tau = \frac{\pi}{\lambda} g[(-1)^{k+1}(\lambda t - 1)], \quad 0 \le t < \infty; \quad k = 1, 2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(0)}(\tau) K(\tau - t) d\tau = \frac{\pi}{\lambda} g(\lambda t), \quad -\infty < t < \infty \end{gathered} \tag{4.2}$$

В формуле (4.1) и здесь по-прежнему приняты безразмерные переменные и обозначения (3.3).

Решения первых двух ИУ (4.2) могут быть найдены методом Винера – Хопфа [4]. Решение третьего ИУ (4.2) может быть найдено с помощью теоремы о свертке для интегрального преобразования Фурье [5].

Отметим, что в представлении (4.1) решения типа пограничного слоя $\varphi^{(1)}(t)$ и $\varphi^{(2)}(t)$ автоматически сращиваются с проникающим решением $\varphi^{(0)}(t)$.

5. Числовой пример. Ограничимся рассмотрением случая плоского наклонного штампа, т.е. случая, когда $f(x) \equiv 0$. При этом

$$g(x) = \varepsilon + \alpha x, \quad \varepsilon = \delta/a \tag{5.1}$$

Подставляя выражение (5.1) в формулы (3.9) и (3.11), найдем

$$\begin{aligned} N_0 &= \pi\varepsilon\left[\ln 2\lambda - d_0 - \frac{d_1}{\lambda^2} - \frac{d_1^2}{4\lambda^4} - \frac{9d_2}{4\lambda^4} - \frac{2d_1d_2}{\lambda^6} - \frac{25d_3}{4\lambda^6} + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right)\right]^{-1} \\ N_1 &= \frac{\pi\alpha}{2}\left[1 - \frac{d_1}{\lambda^2} + \frac{d_1^2}{\lambda^4} - \frac{3d_2}{\lambda^4} - \frac{d_1^3}{\lambda^6} + \frac{6d_1d_2}{\lambda^6} - \frac{75d_3}{8\lambda^6} + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right)\right] \end{aligned} \tag{5.2}$$

Решение третьего ИУ (4.2) для случая (5.1) находится несложно и имеет вид

$$\varphi^{(0)}(t) = (\varepsilon + \alpha\lambda t)/(\lambda l) \tag{5.3}$$

Величина l дается формулами (3.1).

Для построения решений первых двух ИУ (4.2) в аналитической форме аппроксимируем функцию $L(u)$ вида (2.6) (или вида (2.8)) выражением

$$L^*(u) = u\sqrt{u^2 + C^2}/(u^2 + D^2) \tag{5.4}$$

причем постоянные C и D подберем таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$L^*(u) = 1 + O(u^{-2}), \quad u \to \infty; \quad L^*(u) = lu + O(u^5), \quad u \to 0 \tag{5.5}$$

(ср. с (3.1)).

С учетом аппроксимации (5.4) и выражения (5.1) для функции $g(x)$ решения первых двух ИУ (4.2) могут быть построены методом Винера – Хопфа и имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= \frac{1}{\lambda}[\varepsilon - (-1)^{k+1}\alpha]\psi^{(0)}(t) + (-1)^{k+1}\alpha\psi^{(1)}(t), \quad k = 1, 2 \\ \psi^{(0)}(t) &= \frac{1}{l}\operatorname{erf}(\sqrt{Ct}) + \frac{\exp(-Ct)}{\sqrt{\pi l t}} \\ \psi^{(1)}(t) &= \frac{t}{l}\operatorname{erf}(\sqrt{Ct}) - \frac{\exp(-Ct)}{\sqrt{\pi C t}}\left(1 - \frac{D}{2C} - \frac{t}{l}\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Найдем теперь по формулам (3.7) и (3.10) величины N_0 и N_1

$$\begin{aligned} N_0 &= 2\varepsilon\int_0^{2/\lambda}\psi^{(0)}(\tau)d\tau - \frac{2\varepsilon}{\lambda l} \\ N_1 &= -2\alpha\int_0^{2/\lambda}\psi^{(0)}(\tau)(\lambda\tau - 1)d\tau + 2\alpha\lambda\int_0^{2/\lambda}\psi^{(1)}(\tau)(\lambda\tau - 1)d\tau - \frac{2\alpha}{3\lambda l} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Таблица 1

A	$\lambda = 8$	$\lambda = 4$	$\lambda = 2$		$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$
			N_0/ε			
2	1.429	2.033	3.157	3.338	5.747	10.63
1	1.293	1.786	2.738	2.899	4.859	8.832
1/2	1.207	1.633	2.477	2.636	4.332	7.764
			N_1/ε			
2	1.594	1.659	1.897	1.981	2.671	4.196
1	1.584	1.621	1.763	1.866	2.409	3.623
1/2	1.578	1.601	1.692	1.800	2.257	3.288

Подставляя в соотношения (5.7) выражения (5.6) функций $\psi^{(0)}(t)$ и $\psi^{(1)}(t)$ и вычисляя интегралы, получим

$$\frac{N_0}{\varepsilon} = \frac{2}{\lambda l}[2\operatorname{erf}(\Lambda) - 1] + \frac{1}{\sqrt{Cl}}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{Cl}}\right)\operatorname{erf}(\Lambda) + \frac{2}{l}\sqrt{\frac{2}{\pi C\lambda}}\exp(-\Lambda^2)$$

$$\frac{N_1}{\alpha} = \frac{2}{3\lambda l}[2\operatorname{erf}(\Lambda) - 1] + \left[\frac{1}{\sqrt{Cl}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{Cl}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{C}\left(2 - \frac{D}{C} - \frac{1}{\sqrt{Cl}} + \frac{1}{2Cl}\right)\lambda + \frac{1}{C^2}\left(-1 + \frac{D}{2C} + \frac{1}{4Cl}\right)\lambda^2\right]\operatorname{erf}(\Lambda) +$$

$$+ \left[\frac{2\sqrt{2}}{3l\sqrt{\pi Cl}} + \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{\pi l}}\left(2 - \frac{5}{3\sqrt{Cl}}\right)\sqrt{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{\pi C}}\left(2 - \frac{D}{C} - \frac{1}{2Cl}\right)\lambda^{3/2}\right]\exp(-\Lambda^2); \quad \Lambda = \sqrt{\frac{2C}{\lambda}} \tag{5.8}$$

Вспомним, что величины d_0, d_1, d_2, d_3 в формулах (5.2) и величины C, D, l в формулах (5.8) зависят от механических постоянных A и B вида (2.2). Приведем результаты вычисления при $B = 1$ для трех вариантов

$$\begin{aligned}
&1)\ A = 2\ (A^2 > B); \quad C = 1.2247, \quad D = 1.7321, \quad l = 0.40825 \\
&d_0 = 0.58817, \quad d_1 = -0.94427, \quad d_2 = 0.54479, \quad d_3 = -0.36100 \\
&2)\ A = 1\ (A^2 = B); \quad C = 1, \quad D = \sqrt{2}, \quad l = 1/2 \\
&d_0 = 0.35168, \quad d_1 = -0.52104, \quad d_2 = 0.13495, \quad d_3 = -0.034577 \\
&3)\ A = 1/2\ (A^2 < B); \quad C = 0.86603, \quad D = 1.2247, \quad l = 0.57735 \\
&d_0 = 0.17369, \quad d_1 = -0.30177, \quad d_2 = 0.017694, \quad d_3 = 0.0059917
\end{aligned} \tag{5.9}$$

В табл. 1 даны значения величин N_0/ε и N_1/α, найденные по формулам (5.2) (они показаны слева от вертикальной штриховой линии) и по формулам (5.8) (показаны справа) для указанных выше трех вариантов. Видно, что смыкание асимптотических решений для больших и малых λ наступает примерно при $\lambda = 2$.

6. Постановка задачи о трещине. Пусть упругая ортотропная полоса толщины $2h$ занимает область $|x| < \infty$, $-h \le y \le h$. Границы полосы $y = -h$ и $y = h$ шарнирно закреплены, а на оси $y = 0$ находится трещина длины $|x| \le a$. Берега трещины нагружены давлением $q(x)$. Далее ограничимся рассмотрением случая, когда $q(x)$ – четная функция.

В силу сказанного для задачи о трещине будем иметь уравнения (1.2)–(1.5) и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\upsilon(x, \pm h) = \tau_{xy}(x, \pm h) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0; \quad |x| < \infty \\ &\upsilon(x, 0) = 0, \quad |x| > a; \quad \sigma_y(x, 0) = -q(x), \quad |x| \le a \end{aligned} \tag{6.1}$$

7. Интегральное уравнение задачи о трещине. Вновь введем функцию Эри соотношениями (2.1) и придем к дифференциальному уравнению (2.2).

С учетом симметрии задачи (6.1) относительно координаты y рассмотрим сначала вспомогательную задачу для полосы толщины h с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\upsilon(x, h) = \tau_{xy}(x, h) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad \upsilon(x, 0) = \tilde{\gamma}(x); \quad |x| < \infty \\ &\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x), \quad |x| \le a; \quad \tilde{\gamma}(x) = 0, \quad |x| > a \end{aligned} \tag{7.1}$$

Разыскивая функцию Эри в виде интеграла Фурье (2.4) и предполагая пока, что $A^2 > B$, получим для трансформанты Фурье $\Phi^*(y, \alpha)$ функции Эри $\Phi(x, y)$ выражение (2.5). Определяя затем функции $c_k(\alpha)$ в этом выражении путем удовлетворения граничным условиям (7.1), найдем в итоге решения вспомогательной задачи соотношение

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{\theta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha)\frac{\alpha}{L(\alpha h)}e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad \Gamma(\alpha) = \int_{-a}^{a}\gamma(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi \tag{7.2}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – трансформанта Фурье разрывной функции $\tilde{\gamma}(x)$ вида (7.1), функция $L(u)$ и величина θ даются формулами (2.6).

Перейдем к основной задаче. Удовлетворяя с помощью соотношений (7.2) последнему граничному условию (6.1) (остальные условия (6.1) уже удовлетворены в ходе получения соотношения (7.2)), придем к ИУ относительно производной от функции $\gamma(x)$, описывающей перемещения точек берегов трещины,

$$\int_{-a}^{a}\gamma'(\xi)M\left(\frac{\xi - x}{h}\right)d\xi = -\frac{\pi h}{\theta}q(x), \quad |x| \le a; \quad M(t) = \int_0^{\infty}\frac{1}{L(u)}\sin ut\,du \tag{7.3}$$

Выражения для функции $L(u)$ и величины θ для случая $A^2 = B$ и случая $A^2 < B$ имеют вид (2.8). ИУ (7.3) для этих случаев своей формы не изменяет.

8. Асимптотическое решение при большой относительной толщине полосы. На основании соотношений (3.1) ядро ИУ (7.3) можно представить в форме [2]

$$M(t) = \frac{1}{t} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i+1}, \quad a_i = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\int_0^{\infty}\left[1 - \frac{1}{L(u)}\right]u^{2i+1}du \tag{8.1}$$

Ряд в выражении (8.1) для $M(t)$ абсолютно сходится при $|t| < 2\kappa$.

Переходя в ИУ (7.3) к безразмерным переменным

$$\xi' = \frac{\xi}{a}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad \varphi(x') = \gamma'(x), \quad p(x') = \frac{q(x)}{\theta}, \quad \lambda = \frac{h}{a} \tag{8.2}$$

и подставляя в него выражение (8.1) для $M(t)$, будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)}{\xi - x}d\xi = -\pi p(x) + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{\lambda^{2i+2}}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)(\xi - x)^{2i+1}d\xi \tag{8.3}$$

Здесь и далее штрихи у безразмерных переменных опущены.

Будем искать решение ИУ (8.3) в форме ряда (3.5). Подставляя выражение (3.5) в ИУ (8.3) и приравнивая в нем слева и справа члены при одинаковых степенях λ^{-2}, вновь придем [2] к бесконечной системе последовательно решаемых ИУ относительно функций $\varphi_n(x)$. Приведем результат такого решения с учетом четности функции $p(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,p(t)\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a_0 x}{\lambda^2}-\right.$$
$$-\frac{1}{2\lambda^4}[a_0^2 x+2a_1(-x+xt^2+3x^3)]-\frac{1}{4\lambda^6}\{a_0^3 x+a_0 a_1 x(1+2t^2+6x^2)+$$
$$\left.+a_2[-(11+18t^2-4t^4)x+(10+40t^2)x^3+20x^5]\}\right)dt+O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right) \tag{8.4}$$

9. Асимптотическое решение при малой относительной толщине полосы. Ограничимся построением главного члена асимптотики решения ИУ (7.3). Он дается выражением (4.1), где в силу четности функции $p(x)$

$$\varphi^{(2)}(t) = -\varphi^{(1)}(t) \tag{9.1}$$

а функции $\varphi^{(1)}(t)$ и $\varphi^{(0)}(t)$ теперь должны быть определены из ИУ

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \varphi^{(1)}(\tau)M(\tau-t)d\tau = -\pi p(\lambda t-1), \quad 0\le t<\infty\\ &\int_{-\infty}^\infty \varphi^{(0)}(\tau)M(\tau-t)d\tau = -\pi p(\lambda t), \quad -\infty<t<\infty\end{aligned} \tag{9.2}$$

Решение первого ИУ (9.2) может быть найдено методом Винера – Хопфа [4]. Решение второго ИУ (9.2) может быть найдено с помощью теоремы о свертке для интегрального преобразования Фурье [5].

10. Числовой пример. Ограничимся рассмотрением случая, когда на берега трещины действует равномерное давление, т.е. когда

$$p(x)\equiv p = \text{const}, \quad p = q/\theta \tag{10.1}$$

Подставляя выражение (10.1) в формулу (8.4), найдем

$$\varphi(x) = -\frac{px}{\sqrt{1-x^2}}\left\{1+\frac{a_0}{2\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^4}\left[a_0^2+6a_1\left(-\frac{1}{4}+x^2\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8\lambda^6}\left[a_0^3+3a_0a_1\left(\frac{1}{2}+2x^2\right)+20a_2\left(-\frac{3}{4}+x^2+x^4\right)\right]\right\}+O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right) \tag{10.2}$$

Решение второго ИУ (9.2) для случая (10.1) равно нулю.

Для построения решения первого ИУ (9.2) в аналитическом виде вновь воспользуемся аппроксимацией функции $L(u)$ вида (5.4), (5.5). С учетом указанной аппроксимации и выражения (10.1) для функции $p(x)$ решение первого ИУ (9.2) может быть построено методом Винера – Хопфа и имеет вид

$$\varphi^{(1)}(t) = p\sqrt{l}\left\{\frac{\exp(-Ct)}{\sqrt{\pi t}}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{D-C}\exp(-Dt)\mathrm{F}(\sqrt{(D-C)t})\right\} \tag{10.3}$$

Таблица 2

A	$\lambda = 8$	$\lambda = 4$	$\lambda = 2$		$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$
			$N/(q\sqrt{a})$			
2	0.686	0.631	–	0.510	0.360	0.255
1	0.694	0.658	0.544	0.564	0.399	0.282
1/2	0.698	0.673	0.591	0.606	0.429	0.303

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \exp(u^2)du$$

Имея в виду силовой критерий разрушения [6], определим коэффициент интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины (на ее продолжении) по формуле [2]

$$N = -\lim(\theta\gamma'(x)\sqrt{a-x}) \quad \text{при} \quad x \to a \tag{10.4}$$

На основании выражения (10.2) будем иметь

$$\frac{N}{q\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{a_0}{2\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^4}\left(a_0^2 + \frac{9}{2}a_1\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8\lambda^6}\left(a_0^3 + \frac{15}{2}a_0a_1 + 25a_2\right)\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right) \tag{10.5}$$

а на основании выражений (4.1) и (10.3) найдем

$$\frac{N}{q\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\lambda l}{\pi}} \tag{10.6}$$

Величины a_0, a_1, a_2 в формуле (10.5) и l в формуле (10.6) зависят от механических постоянных A и B вида (2.2). Для величины l примем значения, указанные в формулах (5.9). Для величин a_0, a_1, a_2 для указанных в разд. 5 вариантов соотношения между постоянными A и B при $B = 1$ найдем

$$1)\ A = 2\ (A^2 > B); \quad a_0 = -4.1123, \quad a_1 = 2.5705, \quad a_2 = -2.2572$$

$$2)\ A = 1\ (A^2 = B); \quad a_0 = -2.4674, \quad a_1 = 0.67645, \quad a_2 = -0.22254 \tag{10.7}$$

$$3)\ A = 1/2\ (A^2 < B); \quad a_0 = -1.6449, \quad a_1 = 0.13529, \quad a_2 = 0.031792$$

В табл. 2 даны значения величины $N/(q\sqrt{a})$, найденные по формуле (10.5) (они показаны слева от вертикальной штриховой линии) и формуле (10.6) (показаны справа) для указанных выше трех вариантов. Видно, что смыкание асимптотических решений при больших и малых λ для вариантов $A = 1$ и $A = 1/2$ наступает, как и ранее, примерно при $\lambda = 2$. Для варианта $A = 2$ смыкание наступает при $\lambda = 2.8$ с погрешностью 6.6% (сказывается отсутствие в формуле (10.5) членов порядка λ^{-8}).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00002), Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (03-01-96551), программы "Университеты России" (УР 04.02.527).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1993. 224 с.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
4. *Noble B.* Methods Based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L.: Pergamon Press, 1958 = *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
5. *Bochner S.* Lectures on Fourier Integrals. Princeton: Univ. Press, 1959 = *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.
6. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.2004

СПИСОК МОНОГРАФИЙ В.М. АЛЕКСАНДРОВА

Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.

Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.

Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.

Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1993. 224 с.

Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.

Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-Dimensional Contract Problems. Dordrecht: Kluwer, 2001. 406 p.

Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 302 с.

Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО “ЦВВР”, 2005. 108 с.