УДК 539.3: 534.1

© 2006 г. С. В. Кузнецов

ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Для описания волн Лява в слоистых анизотропных (моноклинных) средах предлагается модифицированный метод передаточных матриц. В замкнутом виде получены дисперсионные соотношения для сред, состоящих из одного и двух анизотропных упругих слоев, контактирующих с анизотропным полупространством. Анализируются условия существования волн Лява. Исследуются волны с горизонтальной поперечной поляризацией неканонического типа.

1. Введение. *Волны Лява в изотропном слое, контактирующем с изотропным полупространством.* Наряду с волнами Релея, волны Лява [1] играют важную роль в передаче сейсмической энергии и весьма часто регистрируются при сейсмической активности и взрывах. Поле перемещений, соответствующее волне Лява, может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(C_1 e^{-ir\gamma_1 x'} + C_2 e^{ir\gamma_2 x'}) e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)}, \quad \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(C_3 e^{ir\gamma_2 x'}) e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}_1$ – перемещения в слое, $\mathbf{u}_2$ – перемещения в полупространстве, $\mathbf{m}$ – единичная амплитуда (вектор поляризации). Предполагается, что вектор $\mathbf{m}$ ортогонален к сагиттальной плоскости (она определяется вектором $\mathbf{n}$, задающим направление распространения волнового фронта, и единичным вектором $\boldsymbol{\nu}$, нормальным к свободной поверхности); $x' \equiv \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x}$ – координата вдоль вектора $\boldsymbol{\nu}$, в дальнейшем считается, что x' принимает отрицательные значения в полупространстве, r – волновое число, c – фазовая скорость, t – время; неизвестные (комплексные) коэффициенты C_k определяются с точностью до множителя из граничных условий на внешней плоской границе

$$x' = 2h\colon \mathbf{t}_{\boldsymbol{\nu}} \equiv \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_1 = 0 \tag{1.2}$$

и контактных условий на поверхности раздела

$$x' = 0\colon \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C}_2 \cdot\cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \tag{1.3}$$

Параметры γ_1, γ_2 соответствуют комплексным корням уравнения Кристоффеля (оно будет введено позже), $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ – четырехвалентные тензоры упругости слоя и полупространства соответственно, $2h$ – толщина слоя.

Замечание 1.1. В соответствии с представлением (1.1) затухание по глубине в полупространстве обеспечивается параметром Кристоффеля γ_2 с отрицательной мнимой частью.

Следующее утверждение фактически принадлежит Ляву.

Предложение 1.1.А. Поверхностные волны с поперечной горизонтальной поляризацией могут возникать в изотропном слое и контактирующим с ним изотропном полупространстве в том и только том случае, когда фазовая скорость удовлетворяет условию

$$c_1^T < c < c_2^T; \quad c_k^T = \sqrt{\mu_k/\rho_k}, \quad k = 1, 2 \tag{1.4}$$

где c_k^T – скорости поперечных объемных волн слое ($k = 1$) и полупространстве ($k = 2$), μ_k – соответствующие постоянные Ламе, ρ_k – плотности.

Б. Дисперсионное соотношение между фазовой скоростью c и частотой ω может быть представлено в виде

$$\omega = \frac{c}{2h\sqrt{g_1-1}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\sqrt{\frac{1-g_2}{g_1-1}}\right)+n\pi\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad g_k = \frac{\rho_k c^2}{\mu_k}, \quad k = 1, 2 \tag{1.5}$$

Следствие 1.1.А. При фиксированной частоте ω существует конечное число волн Лява, распространяющихся с различными фазовыми скоростями $c \in (c_1^T, c_2^T)$.

Б. При фиксированной фазовой скорости $c \in (c_1^T, c_2^T)$ существует бесконечное число волн Лява с различными частотами ω.

Следствие 1.2. Не существует волн Лява, если $c_1^T > c_2^T$.

Волны Лява в анизотропном слое, контактирующем с анизотропным полупространством. Было показано [2], что волны Лява могут распространяться как в изотропной среде, так и в системе, состоящей из анизотропного слоя и контактирующего с ним анизотропного полупространства, при этом предполагалось, что слой и полупространство имеют ось упругой симметрии четвертого или шестого порядка, ориентированную вдоль вектора поляризации **m**. Для такой системы условия распространения и дисперсионные соотношения аналогичны изотропному случаю. На основе развитого подхода [2] были получены [3] дисперсионные соотношения для трансверсально изотропного слоя и контактирующего с ним трансверсально изотропного полупространства.

Волны Лява в многослойных средах. Для слоистых сред, состоящих из двух и большего числа слоев, контактирующих с полупространством, не существует аналитических решений, аналогичных решению для однослойной среды. Дисперсионные соотношения для волны Лява в слоистых средах могут быть получены численно с применением двух матричных методов, первоначально предложенных для анализа волн Лэмба. Эти подходы известны как метод передаточных матриц (МПМ) (иногда его называют методом Томсона – Хаскелла, по имени разработчиков [4, 5]) и метод глобальной матрицы (МГМ) [6, 7]. МПМ основан на последовательном решении контактных граничных задач на поверхностях раздела и построении соответствующих передаточных матриц. Ниже этот метод будет обсуждаться более подробно. МГМ основан на решении обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-однородными коэффициентами, приводящем в итоге к построению специальной "глобальной" матрицы.

С момента появления МГМ считалось, что при численных реализациях он приводит к (численно) более устойчивым решениям, чем МПМ. В дальнейшем предлагались разнообразные модификации МПМ и МГМ с целью сделать их более численно устойчивыми, см. [8–14]. Проблема численной устойчивости становится особенно актуальной, при большом числе слоев. В этом случае начинают сказываться преимущества МПМ, поскольку порядок соответствующих матриц остается неизменным при изменении числа слоев (в случае МГМ порядок соответствующей матрицы линейно растет с числом слоев).

Ниже развивается модифицированный МПМ, основанный на использовании гиперболических функций в представлении для парциальных волн и предназначенный как для аналитического исследования волн Лява в анизотропных средах с числом слоев от одного до трех, так и для численного анализа систем, содержащих большое число слоев. Далее будет показано, что представление (1.1) оказывается неверным, если в уравнении Кристоффеля появляются кратные корни (здесь обнаруживается аналогия с волнами Релея и Лэмба, структура которых меняется при появлении кратных корней, см. [15–17]). Верное представление для волн Лява и соответствующая модификация МПМ даны ниже. Кроме того, МПМ будет использоваться для получения разрешающих уравнений для волн с поперечной горизонтальной поляризацией, распространяющихся в слоистых пластинах со свободными и защемленными граничными поверхностями.

2. Основные соотношения. Ниже как слои, так и полупространство считаются однородными и линейно гиперупругими. Уравнения движения для упругой однородной анизотропной среды могут быть представлены в виде

$$\mathbf{A}(\partial_x, \partial_t)\mathbf{u} \equiv \mathrm{div}_x \mathbf{C} \cdot\cdot \nabla_x \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \tag{2.1}$$

где четырехвалентный тензор упругости $\mathbf{C}$ предполагается положительно определенным:

$$\mathbf{A} \tag{2.2}$$

Замечание 2.1.А. Предполагается, что все рассматриваемые среды имеют плоскости упругой симметрии, совпадающие с сагиттальной плоскостью $\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = 0$. Это эквивалентно наличию у тензора упругости моноклинной группы симметрии. Можно показать [18], что последнее влечет равенство нулю всех разложимых компонент тензора упругости (разложимыми называют компоненты, представимые в виде тензорного произведения векторов из R^3), у которых вектор $\mathbf{m}$ появляется нечетное число раз (в ортогональном базисе в R^3, образованном вектором $\mathbf{m}$ и любыми ортогональными векторами, принадлежащими сагиттальной плоскости). В случае моноклинной симметрии тензор упругости содержит 13 независимых разложимых компонент.

Б. В дальнейшем будет показано, что моноклинная симметрия обеспечивает достаточное условие коллинеарности вектора $\mathbf{m}$ поверхностных усилий на любой плоскости $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathrm{const}$.

Следуя описанному ранее методу [15, 16], рассмотрим более общее, чем (1.1), представление для волны Лява

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{m} f(irx') e^{ir(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \tag{2.3}$$

где $x' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$, так же как и в представлении (1.1); f – неизвестная скалярная функция; экспоненциальный множитель в правой части равенства (2.3) соответствует распространению волнового фронта в направлении $\mathbf{n}$ с фазовой скоростью c; r – волновое число. Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.1) и принимая во внимание замечание 2.1.А, получаем дифференциальное уравнение, характеристическое уравнение для которого, известное как уравнение Кристоффеля, имеет вид

$$\begin{gathered}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{v} \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{m})\gamma^2 + \\ + (\mathbf{m} \otimes \mathbf{v} \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{m})\gamma + (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} - \rho c^2) = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

Левая часть уравнения (2.4) – полином второго порядка относительно параметра Кристоффеля γ. Таким образом, для исследуемой упругой симметрии волна Лява в слое может состоять только из двух парциальных волн.

3. Перемещения и поверхностные усилия в полупространстве. В дальнейшем предполагается, что слоистая среда состоит из n слоев, контактирующих, если не оговорено иное, с полупространством, нижний индекс $n + 1$ будет относиться к полупространству. Поскольку поле перемещений в полупространстве должно затухать с глубиной, соответствующий корень уравнения Кристоффеля должен быть комплексным с отрицательной мнимой частью, см. замечание 1.1.

Предложение 3.1. Затухание по глубине в моноклинном полупространстве возможно в том и только том случае, если фазовая скорость c лежит в следующем диапазоне:

$$c \in (0, [\rho_{n+1}^{-1}(E_{n+1} - F_{n+1}^2/G_{n+1})]^{1/2}) \tag{3.1}$$

$$E_{n+1} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \cdot\cdot\, \mathbf{C}_{n+1} \cdot\cdot\, \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}, \quad F_{n+1} = \mathbf{m} \cdot \operatorname{sym}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{m}$$

$$G_{n+1} = \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\nu} \cdot\cdot\, \mathbf{C}_{n+1} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{m}$$

Соответствующий параметр Кристоффеля

$$\gamma_{n+1} = -F_{n+1}/G_{n+1} - i((E_{n+1} - \rho_{n+1}c^2)/G_{n+1} - (F_{n+1}/G_{n+1})^2)^{1/2} \tag{3.2}$$

имеет отрицательную мнимую часть.

Доказательство. Непосредственный анализ корней уравнения Кристоффеля (2.4) показывает, что они комплексны при отрицательном дискриминанте, что дает верхнюю границу диапазона (3.1). Положительность подкоренного выражения в (3.1) вытекает из анализа квадратичного полинома

$$P(x) \equiv \mathbf{m} \otimes (x\boldsymbol{\nu} + \mathbf{n}) \cdot\cdot\, \mathbf{C}_{n+1} \cdot\cdot\, (\mathbf{n} + x\boldsymbol{\nu}) \otimes \mathbf{m} \tag{3.3}$$

Он положителен при любых действительных x, поскольку тензор упругости положительно определен. Несуществование действительных корней этого полинома завершает доказательство, поскольку дискриминант этого полинома совпадает (с точностью до множителя $-(\rho_{n+1})^{-1/2}$) с верхней границей диапазона (3.1). Остается заметить, что выражение (3.2) получено из решения уравнения Кристоффеля.

Следствие 3.1. Параметр γ_{n+1} не может быть кратным корнем уравнения Кристоффеля.

Доказательство вытекает из условия неравенства нулю дискриминанта уравнения (3.2), что необходимо для затухания решения по глубине.

Следствие 3.2. Если рассматриваемый материал обладает еще одной плоскостью упругой симметрии, нормаль к которой совпадает с вектором $\mathbf{n}$ или $\boldsymbol{\nu}$ (такой материал необходимо ортотропен), то допустимый скоростной диапазон имеет вид

$$c \in (0, c_{n+1}^T) \tag{3.4}$$

где c_{n+1}^T – скорость поперечной объемной волны, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{n}$ и поляризованной в направлении вектора $\mathbf{m}$. Для рассматриваемого случая параметр Кристоффеля чисто мнимый:

$$\gamma_{n+1} = -i((E_{n+1} - \rho_{n+1}c^2)/G_{n+1})^{1/2} \tag{3.5}$$

Доказательство. Для такого материала величина F_{n+1} в выражении (3.2) становится равной нулю, поскольку векторы $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\nu}$ входят в нее нечетное число раз. Далее достаточно заметить, что при $F_{n+1} = 0$ подкоренное выражение в (3.1) совпадает с выражением для c_{n+1}^T. Оставшаяся часть доказательства вытекает из анализа уравнения Кристоффеля.

Представление (1.1) для полупространства дает следующее поле поверхностных усилий на плоскости $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{n+1}(\mathbf{x})|_{\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x} = 0} &= irC_{2n+1}(\gamma_{n+1}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{b}_{n+1})e^{ir(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)} \\ \mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C}_{n+1} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{m}, &\quad \mathbf{b}_{n+1} = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{C}_{n+1} \cdot\cdot\, \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Предложение 3.2. Поверхностные усилия (3.6) коллинеарны вектору $\mathbf{m}$.

Доказательство вытекает из предположенной принадлежности всех материалов моноклинной системе (она имеет группу симметрии, порождаемую вращениями $\mathbf{R}_{\mathbf{m}}^{\pi}$), что обеспечивает четное появление вектора $\mathbf{m}$ в разложимых компонентах тензора $\mathbf{C}_{n+1}$ в базисе, образованном векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$.

4. Перемещения и поверхностные усилия в слоях. В этом разделе нижний индекс $k(1 \le k \le n)$ относится к соответствующему слою.

Простые (некратные) корни. Для простых корней уравнения Кристоффеля и ортотропного материала с главными осями упругости, совпадающими с векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, представление (1.1) остается верным. Все же, для целей настоящего анализа, который включает в себя более общий класс материалов, принадлежащих моноклинной системе, представление (1.1) будет модифицировано следующим образом

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(C_{2k-1}\upsilon_k^{(1)} + C_{2k}\upsilon_k^{(2)})e^{ir(\beta_k x' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \quad (\gamma_k = \alpha_k + \beta_k) \tag{4.1}$$

где

$$\begin{gathered}\upsilon_k^{(1)} = \mathrm{sh}(ir\alpha_k x'), \quad \upsilon_k^{(2)} = \mathrm{ch}(ir\alpha_k x') \\ \alpha_k = -((E_k - \rho_k c^2)/G_k - (F_k/G_k)^2)^{1/2}, \quad \beta_k = -F_k/G_k\end{gathered} \tag{4.2}$$

Параметры E_k, F_k, G_k определяются формулами (3.1). Видно, что α_k – действительный или мнимый параметр, в зависимости от значения фазовой скорости, а β_k – действительный параметр, не зависящий от c.

Принимая во внимание представление (4.1), соответствующие поверхностные усилия на плоскости $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = x'$ запишем в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{t}_k(x') = i[(\mathbf{a}_k(\alpha_k\upsilon_k^{(2)} + \beta_k\upsilon_k^{(1)}) + \mathbf{b}_k\upsilon_k^{(1)})C_{2k-1} + \\ + (\mathbf{a}_k(\alpha_k\upsilon_k^{(1)} + \beta_k\upsilon_k^{(2)}) + \mathbf{b}_k\upsilon_k^{(2)})C_{2k}]re^{ir(\beta_k x' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)}\end{gathered} \tag{4.3}$$

Предложение 4.1. Поверхностные усилия (4.3) коллинеарны вектору $\mathbf{m}$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.2.

Принимая во внимание представление (4.3) и тот факт, что $\mathbf{b}_k = 0$ и $\gamma_k = \alpha_k$ ($\beta_k = 0$) для ортотропного материала с осями упругой симметрии, совпадающими с векторами $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, получаем следующее выражение для поверхностных усилий:

$$\mathbf{t}_k(x') = ir\gamma_k\mathbf{a}_k(C_{2k-1}\upsilon_k^{(2)} + C_{2k}\upsilon_k^{(1)})e^{ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)}, \quad \alpha_k = \gamma_k \tag{4.4}$$

Кратные корни. Представление (4.1) для волн Лява в слое становится неверным, когда в уравнении Кристоффеля появляются кратные корни, что происходит, когда параметр α_k, определяемый третьим соотношением (4.2), обращается в нуль.

Предложение 4.2.А. Фазовая скорость, при которой появляются кратные корни, определяется выражением

$$c = (\rho^{-1}(E_k - F_k^2/G_k))^{1/2} \tag{4.5}$$

Б. Соответствующий параметр Кристоффеля (необходимо действительный) имеет вид

$$\gamma_k = -F_k/G_k \tag{4.6}$$

В. Отвечающие кратным корням представления поля перемещений и соответствующих поверхностных усилий на плоскости $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = x'$, имеют вид

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(C_{2k-1} + iex'C_{2k})e^{ir(\gamma_k x' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \tag{4.7}$$

$$\mathbf{t}_k(x') = i(\mathbf{a}_k(\gamma_k C_{2k-1} + (1 + ir\gamma_k x')C_{2k}) + \mathbf{b}_k(C_{2k-1} + irx'C_{2k}))re^{ir(\gamma_k x' + \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - ct)} \tag{4.8}$$

Доказательство. Части утверждения А и Б вытекают из условия обращения в нуль дискриминанта в правой части равенства (3.2). Представления В соответствуют общему решению уравнения (2.4) в случае кратных корней; см. также [15–17].

Предложение 4.3. Поверхностные усилия (4.8) коллинеарны вектору **m**.

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.2.

5. Модифицированный МПМ. *Передаточные матрицы.* В соответствии с предложениями 4.1 и 4.2 скалярные амплитуды перемещений и поверхностных усилий в k-м слое на плоскости $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = x'$ могут быть представлены в виде

$$\begin{Vmatrix} u_k(x') \\ t_k(x') \end{Vmatrix} = \mathbf{M}_k(x')\begin{Vmatrix} C_{2k-1} \\ C_{2k} \end{Vmatrix}; \quad u_k(x') \equiv \left|\mathbf{u}_k(x')e^{-ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}\right|, \quad t_k(x') \equiv \left|\mathbf{t}_k(x')e^{-ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}\right| \tag{5.1}$$

где $u_k(x')$, $t_k(x')$ – соответствующие скалярные амплитуды, $\mathbf{M}_k$ – (2×2)-матрица. Принимая во внимание выражения (4.1)–(4.3), (4.5), (4.6) и вводя обозначение $H_k = \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}_k$, элементы матрицы $\mathbf{M}_k$ запишем в виде:

в случае простых корней

$$M_{1l(k)} = \upsilon_k^{(l)}e^{ir\beta_k x'}, \quad M_{2l(k)} = i(G_k(\alpha_k\upsilon_k^{(3-l)} + \beta_k\upsilon_k^{(l)}) + H_k\upsilon_k^{(l)})re^{ir\beta_k x'}; \quad l = 1, 2 \tag{5.2}$$

в случае кратных корней

$$\begin{aligned} &M_{11(k)} = e^{ir\gamma_k x'}, \quad M_{12(k)} = irx'e^{ir\gamma_k x'} \\ &M_{21(k)} = i(\gamma_k G_k + H_k)re^{ir\gamma_k x'}, \quad M_{22(k)} = i((1 + ir\gamma_k x')G_k + irx'H_k)re^{ir\gamma_k x'} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Заметим, что в соответствии с последним выражением (4.2) параметр β_k в соотношениях (5.2) не зависит от фазовой скорости c.

Предложение 5.1. Вне зависимости от кратности корней матрицы $\mathbf{M}_k$ не вырождены при любых действительных x'.

Доказательство. Заметим, что экспоненциальные множители в соотношениях (5.2), (5.3) отличны от нуля при любых x'; далее непосредственный анализ показывает, что матрицы с элементами (5.2), (5.3) не вырождены при любых x' (определитель матрицы с элементами (5.2) равен $-\alpha_k G_k e^{ir\beta_k x'}$ с $\alpha_k \neq 0$, поскольку корни простые; определитель матрицы с элементами (5.3) равен $G_k e^{ir\gamma_k x'}$).

Теперь, используя матрицы $\mathbf{M}_k$, перемещения и поверхностные усилия на поверхности раздела между n-м слоем и полупространством можно представить в терминах только коэффициентов C_1 и C_2

$$\begin{Vmatrix} u_n(-h_n) \\ t_n(-h_n) \end{Vmatrix} = \left(\prod_{k=2}^{n}(\mathbf{M}_k(-h_k)\cdot\mathbf{M}_k^{-1}(h_k))\right)\cdot\mathbf{M}_1(-h_1)\begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix} \tag{5.4}$$

где $2h_k$ ($k = 1, \ldots, n$) – толщины соответствующих слоев.

Граничные условия на внешней поверхности. Выражения (4.3), (4.8) позволяют записать условия отсутствия касательных напряжений на внешней поверхности первого слоя в виде

$$t_1(h_1) \equiv \tilde{\mathbf{B}}_1(h_1)\cdot\tilde{\mathbf{C}} = 0; \quad \tilde{\mathbf{B}}_1(h_1) = (X_1(h_1), Y_1(h_1)), \quad \tilde{\mathbf{C}} = (C_1, C_2) \tag{5.5}$$

где t_1 – соответствующая скалярная амплитуда, здесь и далее величины с тильдой означают двумерные векторы.

Вводя обозначения

$$w_k^{(1)} = \mathrm{sh}(ir\alpha_1 h_1), \quad w_k^{(2)} = \mathrm{ch}(ir\alpha_1 h_1), \quad H_1 = \mathbf{m}\otimes\mathbf{v}\cdot\cdot\,\mathbf{C}_1\cdot\cdot\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{m} \tag{5.6}$$

получим:

в случае простых корней

$$\begin{aligned} X_1(h_1) &= (G_1(\alpha_1 w_1^{(2)} + \beta_1 w_1^{(1)}) + H_1 w_1^{(1)})ire^{ir\beta_1 h_1}, \\ Y_1(h_1) &= (G_1(\alpha_1 w_1^{(1)} + \beta_1 w_1^{(2)}) + H_1 w_1^{(2)})ire^{ir\beta_1 h_1} \end{aligned} \tag{5.7}$$

в случае кратных корней

$$X_1(h_1) = (\gamma_1 G_1 + H_1)ire^{ir\gamma_1 h_1}, \quad Y_1(h_1) = ((1 + ir\gamma_1 h_1)G_1 + irh_1 H_1)ire^{ir\gamma_1 h_1} \tag{5.8}$$

Уравнения (5.1) позволяют выразить (с точностью до множителя) коэффициенты C_1 и C_2 в виде решения следующего уравнения:

$$\tilde{\mathbf{T}}_1(h_1)\times\tilde{\mathbf{C}} = 0; \quad \tilde{\mathbf{T}}_1(h_1) = (-Y_1(h_1), X_1(h_1)) \tag{5.9}$$

Видно, что двумерные векторы $\tilde{\mathbf{T}}(h_1)$ и $\tilde{\mathbf{C}}$ коллинеарны.

Граничные условия на поверхности раздела n-й слой – полупространство. Граничные условия на соответствующей поверхности раздела могут быть представлены в виде

$$\tilde{\mathbf{V}}_n(-h_n)\cdot\tilde{\mathbf{W}}_{n+1}(0) = 0 \tag{5.10}$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{V}}_n(-h_n) = (u_n(-h_n), t_n(-h_n)), \quad \tilde{\mathbf{W}}_{n+1}(0) = (-t_{n+1}(0), u_{n+1}(0)); \\ &t_{n+1}(0) = \left|\mathbf{t}_{n+1}(0)e^{-ir(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-ct)}\right| \end{aligned} \tag{5.11}$$

(вектор $\mathbf{t}_{n+1}(0)$ определен по формуле(3.6)).

Принимая во внимание соотношения (5.11), видим, что уравнение (5.10) выражает собой коллинеарность векторов $\tilde{\mathbf{V}}_n$ и $(u_{n+1}(0), t_{n+1}(0))$, последнее эквивалентно условию коллинеарности перемещений и усилий при переходе через поверхность раздела компонент. При записи второго соотношения (5.11) предполагается, что в локальной системе координат для полупространства плоскость раздела задается уравнением $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = 0$.

Разрешающее уравнение для волн Лява. Принимая во внимание соотношения (5.4), (5.9), (5.10) и второе соотношение (5.11), объединенное уравнение модифицированного МПМ можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{W}}_{n+1}(0)\cdot\left(\left(\prod_{k=2}^{n}\mathbf{M}_k(-h_k)\cdot\mathbf{M}_k^{-1}(h_k)\right)\cdot\mathbf{M}_1(-h_1)\right)\cdot\tilde{\mathbf{T}}(h_1) = 0 \tag{5.12}$$

Это искомое разрешающее уравнение для волн Лява.

Разрешающее уравнение для горизонтально поляризованных сдвиговых волн в слоистых пластинах. Получим разрешающее уравнение для горизонтально поляризованных сдвиговых волн в пластине, состоящей из n слоев ($n > 1$). Внешние поверхности пластины предполагаются либо свободными от поверхностных усилий, либо защемленными, либо на них ставятся смешанные граничные условия (одна из поверхностей свободна от усилий, а другая защемлена).

1°. Для слоистой пластины со свободными внешними поверхностями граничные условия имеют вид

$$\mathbf{t}_1(h_1) \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{t}_n(-h_n) \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}_n \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 \tag{5.13}$$

По аналогии с предыдущим, применение модифицированного МПМ позволяет получить разрешающее уравнение в виде

$$\tilde{\mathbf{T}}_n(-h_n) \cdot \mathbf{N}_n \cdot \tilde{\mathbf{T}}_1(h_1) = 0, \quad \mathbf{N}_n = \mathbf{M}_n^{-1}(h_n) \cdot \left(\prod_{k=2}^{n-1} \mathbf{M}_k(-h_n) \cdot \mathbf{M}_k^{-1}(h_k) \right) \cdot \mathbf{M}_1(-h_1)$$
$$\tilde{\mathbf{T}}_1 = (-Y_1(h_1), X_1(h_1)), \quad \tilde{\mathbf{T}}_n(-h_n) = (X_n(-h_n), Y_n(-h_n)) \tag{5.14}$$

Компоненты X_k, Y_k $(k = 1, n)$ определяются по формулам (5.7), (5.8).

2°. Для слоистой пластины с защемленными внешними поверхностями граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u}_1(h_1) = 0, \quad \mathbf{u}_n(-h_n) = 0 \tag{5.15}$$

Применение модифицированного МПМ дает следующее разрешающее уравнение:

$$\tilde{\mathbf{D}}_n(-h_n) \cdot \mathbf{N}_n \cdot \tilde{\mathbf{D}}_1(h_1) = 0; \; \tilde{\mathbf{D}}_1(h_1) = (-U_1(h_1), S_1(h_1)), \; \tilde{\mathbf{D}}_n(-h_n) = S_n(-h_n), U_n(-h_n) \tag{5.16}$$

$S_k(\pm h_k) = \pm w_k^{(1)}$, $U_k(\pm h_k) = w_k^{(2)}$ в случае простых корней; $S_k(\pm h_k) = 1$, $U_k(\pm h_k) = \pm irh_k$ в случае кратных корней. Здесь использованы соотношения (4.1), (4.7) и обозначения (5.6), параметр α_k определен третьей формулой (4.2).

3°. Для слоистой пластины, верхняя поверхность которой свободна, а нижняя защемлена, граничные условия имеют вид

$$\mathbf{t}_1(h_1) = 0, \quad \mathbf{u}_n(-h_n) = 0 \tag{5.17}$$

Разрешающее уравнение имеет вид

$$\tilde{\mathbf{D}}_n(-h_n) \cdot \mathbf{N}_n \cdot \tilde{\mathbf{T}}_1(h_1) = 0 \tag{5.18}$$

Модификация этого уравнения для случая, когда верхняя поверхность защемлена, а нижняя свободна, очевидна.

Замечание 5.1. Разрешающие уравнения (5.12), (5.14), (5.16) и (5.18) могут рассматриваться, как неявные уравнения относительно волнового числа r при фиксированной фазовой частоте ω. Используя в этих уравнениях соотношение $r = \omega/c$, можно получить (вообще говоря, неявное) дисперсионное уравнение, выражающее зависимость фазовой частоты от фазовой скорости.

6. Некоторые аналитические решения. *Один ортотропный слой на ортотропном полупространстве.* Пусть векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, и $\mathbf{m}$ совпадают с главными осями упругости слоя и полупространства. Для этого случая параметры Кристоффеля принимают вид

$$\gamma_k = (-1)^{k+1} i[(E_k - \rho_k c^2)/G_k]^{1/2}, \quad k = 1, 2 \tag{6.1}$$

Здесь и далее в этом разделе индекс 1 относится к слою, индекс 2 – к полупространству.

Замечание 6.1. А. Выражение (6.1) при $k = 1$ показывает, что кратные корни характеристического уравнения для слоя могут возникать, только если фазовая скорость совпадает со скоростью поперечной объемной волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}$ и поляризованной в направлении вектора $\mathbf{m}$.

Б. Несмотря на то, что некоторые аналитические результаты для ортотропного слоя, лежащего на ортотропном полупространстве, известны [2], соответствующее явное дисперсионное уравнение получено не было.

Скалярная амплитуда поверхностных усилий, определяемых последней формулой (5.1) при $k = 1$, на плоскости $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = x'$ в слое имеет вид

$$t_1(x') = ir\gamma_1 G_1(C_1 \operatorname{ch}(ir\gamma_1 x') + C_2 \operatorname{sh}(ir\gamma_1 x')) \text{ в случае простых корней} \tag{6.2}$$

$$t_1 = irG_1 C_2 \text{ в случае кратных корней} \tag{6.3}$$

Скалярная амплитуда поверхностных усилий, определяемых последней формулой (5.1) при $k = 2$, действующих на плоскости $x' = 0$ в полупространстве, имеет вид

$$t_2(0)|_{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0} = ir\gamma_2 G_2 C_3 \tag{6.4}$$

Предложение 6.1. Не существует волн Лява, распространяющихся в ортотропном слое на ортотропном полупространстве, когда в уравнении Кристоффеля для слоя возникают кратные корни.

Доказательство. Выражения (4.5), (6.1) показывают, что кратный корень γ_1 необходимо нулевой. Для этого случая имеем

$$C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_1 = 0 \tag{6.5}$$

Первое равенство следует из условия отсутствия поверхностных усилий (5.8), (5.9) и выражения (6.3), второе – из условий на поверхности раздела (5.10), выражений (6.4) и первого равенства (6.5), последнее – из второго равенства (6.5), обеспечивающего отсутствие перемещений на поверхности раздела.

Исключив кратные корни, обратимся к случаю простых корней. Применение соотношений (5.2) к ортотропному слою дает

$$\mathbf{M}_1(x') = \left\| \begin{matrix} \operatorname{sh}(ir\gamma_1 x') & \operatorname{ch}(ir\gamma_1 x') \\ ir\gamma_1 G_1 \operatorname{ch}(ir\gamma_1 x') & ir\gamma_1 G_1 \operatorname{sh}(ir\gamma_1 x') \end{matrix} \right\| \tag{6.6}$$

С точностью до скалярного множителя $ir\gamma_1 G_1$ векторы, определенные второй формулой (5.9) и второй формулой (5.11), можно представить в виде:

$$\tilde{\mathbf{T}}_1(h_1) = (-\operatorname{sh}(ir\gamma_1 h_1), \operatorname{ch}(ir\gamma_1 h_1)), \quad \tilde{\mathbf{W}}_2 = (-ir\gamma_2 G_2, 1) \tag{6.7}$$

Подстановка выражений (6.6), (6.7) в уравнение (5.12) после преобразований дает

$$\omega = \frac{c}{2\gamma_1 h_1}(\operatorname{arctg}(i\zeta_{21}) + n\pi), \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \zeta_{21} = \frac{\gamma_2 G_2}{\gamma_1 G_1} \tag{6.8}$$

Предложение 6.2. А. В рассматриваемом случае волны Лява могут распространяться тогда и только тогда, когда фазовая скорость лежит в диапазоне (c_1^T, c_2^T) где $c_k^T = \sqrt{E_k/\rho_k}$ $(k = 1, 2)$ – скорости соответствующих сдвиговых объемных волн с вектором поляризации $\mathbf{m}$ (для этого диапазона все корни уравнения Кристоффеля – простые).

Б. При фиксированной частоте ω существует не более чем конечное число волн Лява, распространяющихся с различными фазовыми скоростями $c \in (c_1^T, c_2^T)$.

В. При фиксированной скорости $c \in (c_1^T, c_2^T)$ существует счетное множество волн Лява, распространяющихся с различными частотами ω.

Доказательство Предположим, что $c_1^T < c_2^T$ (диапазон скоростей непустой). Анализ выражения (6.8) показывает, что при $c \in (c_1^T, c_2^T)$, согласно формуле (6.1), параметр

Кристоффеля γ_1 – действительный и отрицательный, тогда как параметр γ_2 – мнимый с отрицательной мнимой частью. Подставляя выражения для γ_1, γ_2 в формулу (6.8), получаем положительные значения фазовой частоты ω. Предполагая теперь, что $c < c_1^T$, получим

$$\omega = -\frac{c}{2|\gamma_1|h_1}\operatorname{arth}|\zeta_{21}|$$

т.е. $\omega < 0$, что не возможно. Часть А доказана. Остальные части утверждения вытекают непосредственно из выражения (6.8).

Следствие 6.1. В рассматриваемом случае не существует волн Лява, если $c_1^T > c_2^T$.

Два ортотропных слоя на ортотропном полупространстве (простые корни). В дополнение к имеющимся введем обозначения

$$\xi_k = 2r\gamma_k h_k, \quad \zeta_{kl} = \frac{\gamma_k G_k}{\gamma_l G_l}, \quad k, l = 1, 2, 3$$

Индексы 1 и 2 относятся к слоям, а индекс 3 – к полупространству. Получим выражение для произведения передаточных матриц

$$\mathbf{M}_2(-h_2)\cdot\mathbf{M}_2^{-1}(h_2)\cdot\mathbf{M}_1(-h_1) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \tag{6.9}$$

$$a_{11} = -i\left(\cos\xi_2\sin\frac{\xi_1}{2} + \zeta_{12}\sin\xi_2\cos\frac{\xi_1}{2}\right), \quad a_{12} = \cos\xi_2\cos\frac{\xi_1}{2} - \zeta_{12}\sin\xi_2\sin\frac{\xi_1}{2}$$

$$a_{21} = -ir\gamma_2 G_2\left(\sin\xi_2\sin\frac{\xi_1}{2} - \zeta_{12}\cos\xi_2\cos\frac{\xi_1}{2}\right), \quad a_{22} = r\gamma_2 G_2\left(\sin\xi_2\cos\frac{\xi_1}{2} + \zeta_{12}\cos\xi_2\sin\frac{\xi_1}{2}\right)$$

Выражения для векторов $\tilde{\mathbf{T}}_1$ и $\tilde{\mathbf{W}}_3$ остаются теми же, что (6.7), но с очевидным изменением индексов. Подстановка выражений (6.9) в уравнение (5.12) дает разрешающее уравнение в виде

$$\sin\xi_2(\cos\xi_1 + i\zeta_{32}\zeta_{12}\sin\xi_1) - \cos\xi_2(i\zeta_{32}\cos\xi_1 - \zeta_{12}\sin\xi_1) = 0 \tag{6.10}$$

В отличие от предыдущего случая уравнение (6.10), вообще говоря, неразрешимо относительно фазовой частоты ω.

Два ортотропных полупространства с ортотропным слоем между ними. Принимая во внимание следствие 3.1 из предложения 3.1, заключаем, что случай, приводящий к кратным корням для полупространств, должен быть исключен из рассмотрения. В то же время, в соответствии с замечанием 6.1.A, кратные корни в уравнении Кристоффеля для ортотропного слоя возникают в том и только том случае, когда фазовая скорость совпадает со скоростью поперечной объемной волны, и соответствующий параметр Кристоффеля γ_2 становится нулевым. Далее, в результате рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве предложения 6.1, приходим к следующему утверждению.

Предложение 6.3. Не существует волн Лява в системе, образованной двумя ортотропными полупространствами и ортотропным слоем между ними, если в уравнении Кристоффеля для слоя появляется кратный корень.

Исключив кратные корни, рассмотрим случай простых корней в уравнении Кристоффеля для слоя. Предположение о том, что в обоих полупространствах волна затухает по глубине, заставляет разыскивать решение при фазовых скоростях, удовлетворяющих неравенству

$$c < \min(c_1^T, c_3^T) \tag{6.11}$$

где c_1^T, c_3^T – скорости объемных горизонтально поляризованных поперечных волн, распространяющихся в соответствующих полупространствах в направлении вектора $\mathbf{n}$. Условие (6.11) обеспечивает отличие от нуля мнимых частей параметров Кристоффеля γ_1, γ_3.

Замечание 6.2. Затухание по глубине в "верхнем" полупространстве (когда $x' \to +\infty$) обеспечивается выбором γ_1 с положительной мнимой частью.

Переходя в уравнении (6.10) к пределу $h_1 \to \infty$ и учитывая замечание 6.2, получаем искомое дисперсионное соотношение в виде:

$$\omega = \frac{c}{2\gamma_2 h_2}\left(\operatorname{arctg}\left(i\frac{\zeta_{32}-\zeta_{12}}{1-\zeta_{12}\zeta_{32}}\right)+n\pi\right), \quad n = m, m+1, m+2, \ldots \tag{6.12}$$

Параметр m обеспечивает положительность частот ω, ниже он будет определен явно. Очевидно, что при $\zeta_{12} = 0$ (вакуум) дисперсионное соотношение (6.12) переходит в соотношение (6.8).

Предложение 6.4. А. В рассматриваемой системе волна Лява может распространяться в том и только том случае, когда

$$c \in (c_2^T, \min(c_1^T, c_3^T)) \tag{6.13}$$

Б. При фиксированной частоте ω существует не более чем конечное число волн Лява, распространяющихся с различными скоростями в диапазоне (6.13).

В. При фиксированной фазовой скорости в диапазоне (6.13) (при условии, что он непустой) существует счетное число волн Лява, распространяющихся с различными частотами ω.

Доказательство. Если $c > \min(c_1^T, c_3^T)$, то волна Лява не может распространяться, поскольку не выполняется условие затухания в полупространствах. Предположим, что $c < \min(c_1^T, c_2^T, c_3^T)$, тогда все параметры γ_k оказываются чисто мнимыми:

$$\gamma_1 = +i|\gamma_1|, \quad \gamma_2 = \pm i|\gamma_2|, \quad \gamma_3 = -i|\gamma_3| \tag{6.14}$$

При выборе знаков учтено замечание 6.2. Введем обозначения

$$\eta_\pm = \frac{|\zeta_{32}|+|\zeta_{12}|}{1\pm|\zeta_{32}||\zeta_{12}|}$$

Подстановка значений (6.14) в выражение (6.12) дает

$$\omega = -\frac{c}{2|\gamma_2|h_2}\operatorname{arth}\eta_+ \tag{6.15}$$

Но при этом оказывается, что $\omega < 0$, что невозможно.

Остается показать, что при фазовой скорости в диапазоне (6.13) соответствующая частота ω положительна. Для этого диапазона параметры γ_1 и γ_2 удовлетворяют соответственно первому и третьему соотношениям (6.14), а $\gamma_2 = \pm|\gamma_2|$. Аналогично предыдущему получаем

$$\omega = -\frac{c}{2|\gamma_2|h_2}(\operatorname{arctg}\eta_- + n\pi), \quad n = m, m+1, m+2, \ldots \tag{6.16}$$

Целочисленный параметр m определяется из условия

$$m = -\operatorname{entier}(\pi^{-1}\operatorname{arctg}\eta_-) \tag{6.17}$$

обеспечивающего положительность ω. Часть А доказана.

Доказательство частей Б и В утверждения вытекает непосредственно из соотношения (6.16).

Следствие 6.1. Волна Лява не может распространяться, если $c_2^T > \min(c_1^T, c_3^T)$.

Замечание 6.3. Полученные в разд. 6 результаты могут служить объяснением появления высокочастотного волновода для волн с поперечной горизонтальной поляризацией, распространяющихся в системе, представляющей собой ортотропный слой между ортотропными полупространствами.

Автор благодарит за поддержку У. Майгре и И. Джеран-Майгре (Франция).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00781) и Программы Отделения энергетики, математики, механики и проблем управления РАН "Структурная механика материалов и элементов конструкций. Взаимодействие нано-микро-мезо-макро масштабов".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Love A.E.H.* Some Problems of Geodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1911. 180 p.
2. *Dieulesaint E., Royer D.* Elastic Waves in Solids. N.Y.: Wiley, 1980. 511p.
3. *Sengupta P.R., Nath S.* Surface waves in fiber-reinforced anisotropic elastic media // Sadhana. 2001. V. 26. № 4. P. 363–370.
4. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. № 2. P. 89–93.
5. *Haskell N.A.* Dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. America. 1953. V. 43. № 1. P. 17–34.
6. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seismol. Soc. America. 1964. V. 54. № 1. P. 431–438.
7. *Mal A.K., Knopoff L.A.* Differential equation for surface waves in layers with varying thickness // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 21. № 2. P. 431–441.
8. *Dunkin J.W.* Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bull. Seismol. Soc. America. 1965. V. 55. № 2. P. 335–358.
9. *Kundu T., Mal A.K.* Elastic waves in a multilayered solid due to a dislocation source // Wave Motion. 1985. V. 7. № 5. P. 459–471.
10. *Evans R.B.* The decoupling of seismic waves // Wave Motion. 1986. V. 8. № 4. P. 321–328.
11. *Castaings M., Hosten B.* Delta operator technique to improve the Thomson-Haskell method stability for propagation in multilayered anisotropic absorbing plates // J. Acoust. Soc. America. 1994. V. 95. № 4. P. 1931–1941.
12. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 1995. V. 42. № 4. P. 525–542.

13. *Mallah M., Philippe L., Depollier C., Khater A.* Numerical calculations of elastic wave propagation in anisotropic thin films deposited on substrates // Comput. Mater. Sci. 1999. V. 15. № 4. P. 411–421.
14. *Wobst R.* The generalized eigenvalue problem and acoustic surface wave computations // Computing. 1987. V. 39. № 1. P. 57–69.
15. *Kuznetsov S.V.* "Forbidden" planes for Rayleigh waves // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. № 1. P. 87–97.
16. *Kuznetsov S.V.* Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. № 3. P. 577–587.
17. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // Quart. Appl. Math. 2003. V. 61. № 3. P. 575–582.
18. *Gurtin M.E.* The Linear Theory of Elasticity // Handbuch der Physik. Berlin: Springer, 1972. Bd VIa/2. S. 1–295.

Москва
e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию
1.IV.2004