УДК 539.3:534.1

© 2006 г. Л. А. Агаловян, Л. Г. Гулгазарян

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

В трехмерной постановке рассматриваются собственные колебания ортотропных оболочек при разных вариантах граничных условий на лицевых поверхностях: жесткое защемление – жесткое защемление, жесткое защемление – свободная поверхность, смешанные условия. Найдены асимптотические решения соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости. Определены главные значения частот собственных колебаний. Показано, что в оболочке возникают собственные колебания трех типов: два сдвиговых и продольное, которые обусловлены лишь граничными условиями на лицевых поверхностях. Доказано, что каждой собственной частоте соответствует свой пограничный слой. Определены функции типа пограничного слоя, установлены скорости их убывания при удалении от боковой поверхности внутрь оболочки.

Асимптотическому методу решения классической статической краевой задачи для пластин и оболочек (на лицевых поверхностях заданы соответствующие компоненты тензора напряжений) посвящены работы [1–4]. Тем же методом рассмотрены классические задачи о собственных и вынужденных колебаниях оболочек [5–8]. Развита другая ветвь асимптотического метода и построена асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек [9]. Метод оказался особенно эффективным для решения неклассических краевых задач тонких тел (на лицевых поверхностях заданы значения вектора перемещения или смешанные условия). Характерная особенность этих задач состоит в том, что для их решения гипотезы и допущения классической теории неприменимы. Установлена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, позволившая найти решение соответствующей трехмерной задачи теории упругости с заранее заданной асимптотической точностью [10–14]. Решены также некоторые неклассические задачи о собственных и вынужденных колебаниях тонких тел [15–19]; имеется обзор работ этого направления [20].

1. Основные уравнения и постановка краевых задач. Рассмотрим собственные колебания ортотропной оболочки толщины $2h$: $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in \Omega_0, -h \le \gamma \le h\}$, где Ω_0 – срединная поверхность, α, β – линии кривизны срединной поверхности оболочки, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к срединной поверхности. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат при серии граничных условий на лицевых поверхностях $\gamma = \pm h$. Для упрощения выкладок будем пользоваться компонентами несимметричного тензора напряжений τ_{ij} [1, 9, 21].

Имеем

уравнения движения

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\tau_{\alpha\alpha}) - k_\beta\tau_{\beta\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}(A\tau_{\beta\alpha}) + k_\alpha\tau_{\alpha\beta} + \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\gamma} + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}}{R_1} = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$(A \leftrightarrow B;\ \alpha \leftrightarrow \beta;\ R_1, R_2;\ U, V)$

$$\frac{\partial\tau_{\gamma\gamma}}{\partial\gamma} - \left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}}{R_1} + \frac{\tau_{\beta\beta}}{R_2}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}}{\partial\beta} + k_\beta\tau_{\alpha\gamma} + k_\alpha\tau_{\beta\gamma} = \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\alpha\beta} = \left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\beta\alpha} \text{ (условие симметрии)},$$

уравнения состояния (соотношения упругости)

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\alpha}+k_\alpha V+\frac{W}{R_1}\right) = \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{11}\tau_{\alpha\alpha}+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{12}\tau_{\beta\beta}+a_{13}\tau_{\gamma\gamma}$$

$$(A, B;\ \alpha\leftrightarrow\beta;\ R_1\leftrightarrow R_2;\ U\leftrightarrow V;\ a_{11}, a_{22};\ a_{13}, a_{23})$$

$$\left[1+\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\gamma^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial W}{\partial\gamma} = \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{13}\tau_{\alpha\alpha}+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{23}\tau_{\beta\beta}+a_{33}\tau_{\gamma\gamma}$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial\beta}-k_\beta V\right)+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial\alpha}-k_\alpha U\right) = \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{66}\tau_{\alpha\beta} \qquad (1.2)$$

$$\left[1+\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\gamma^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial U}{\partial\gamma}-\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{U}{R_1}+\frac{1}{A}\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial W}{\partial\alpha} = \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{55}\tau_{\alpha\gamma}$$

$$(A, B;\ \alpha, \beta;\ R_1\leftrightarrow R_2;\ U, V;\ a_{55}, a_{44})$$

где k_α, k_β – геодезические кривизны, A, B – коэффициенты первой квадратичной формы, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности, ρ – плотность, a_{ij} – постоянные упругости ($a_{ij} = a_{ji}$).

На лицевой поверхности $\gamma = h$ задана одна из следующих групп условий:

$$\tau_{\alpha\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}(h) = 0 \qquad (1.3)$$

или

$$U(h) = 0, \quad V(h) = 0, \quad W(h) = 0, \qquad (1.4)$$

а на поверхности $\gamma = -h$ – одна из следующих групп условий:

$$U(-h) = 0, \quad V(-h) = 0, \quad W(-h) = 0 \qquad (1.5)$$

или

$$\tau_{\alpha\gamma}(-h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(-h) = 0, \quad W(-h) = 0 \qquad (1.6)$$

Условия на боковой поверхности пока не будем конкретизировать. Они влияют на значения амплитуд колебаний в пограничном слое.

2. Решение внутренней задачи. В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам

$$\alpha = R\xi, \quad \beta = R\eta, \quad \gamma = \varepsilon R\zeta = h\zeta, \quad U = Ru, \quad V = Rv, \quad W = Rw$$

где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров срединной поверхности), $\varepsilon = h/R$ – малый параметр. Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{jk}(\xi, \eta, \zeta)e^{i\omega t}\ (\alpha, \beta, \gamma); \quad j, k = 1, 2, 3 \qquad (2.1)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ – любая из величин напряжений и перемещений, ω – частота собственных колебаний. В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему относительно Q_{jk}

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}(B\tau_{11})-k_\beta R\tau_{22}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}(A\tau_{21})+k_\alpha R\tau_{12}+(\varepsilon^{-1}+r_1\zeta)\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\zeta}+2r_1\tau_{13} = -\varepsilon^{-2}\omega_*^2 u$$

$$(A\leftrightarrow B;\ \alpha\leftrightarrow\beta;\ r_1, r_2;\ \xi\leftrightarrow\eta;\ u, v;\ \tau_{11}\leftrightarrow\tau_{22};\ \tau_{12}\leftrightarrow\tau_{21};\ \tau_{13}, \tau_{23})$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial\tau_{33}}{\partial\zeta}-(r_1\tau_{11}+r_2\tau_{22})+\frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\eta}+k_\beta R\tau_{13}+k_\alpha R\tau_{23} = -\varepsilon^{-2}\omega_*^2 w$$

$$(1+\varepsilon r_2\zeta)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\xi}+k_\alpha R\upsilon+r_1 w\right) = (1+\varepsilon r_1\zeta)a_{11}\tau_{11}+(1+\varepsilon r_2\zeta)a_{12}\tau_{22}+a_{13}\tau_{33}$$

$$(A, B;\ \alpha, \beta;\ r_1\leftrightarrow r_2;\ \xi, \eta;\ u\leftrightarrow\upsilon;\ \tau_{11}\leftrightarrow\tau_{22};\ a_{11}, a_{22};\ a_{13}, a_{23})$$

$$[\varepsilon^{-1}+\zeta(r_1+r_2)+\varepsilon\zeta^2 r_1 r_2]\frac{\partial w}{\partial\zeta} = (1+\varepsilon r_1\zeta)a_{13}\tau_{11}+(1+\varepsilon r_2\zeta)a_{23}\tau_{22}+a_{33}\tau_{33} \qquad (2.2)$$

$$(1+\varepsilon r_1\zeta)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\eta}-k_\beta R\upsilon\right)+(1+\varepsilon r_2\zeta)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}-k_\alpha R u\right) = (1+\varepsilon r_1\zeta)a_{66}\tau_{12}$$

$$[\varepsilon^{-1}+\zeta(r_1+r_2)+\varepsilon\zeta^2 r_1 r_2]\frac{\partial u}{\partial\zeta}-(1+\varepsilon r_2\zeta)r_1 u+\frac{1}{A}(1+\varepsilon r_2\zeta)\frac{\partial w}{\partial\xi} = (1+\varepsilon r_1\zeta)a_{55}\tau_{13}$$

$$(A, B;\ r_1\leftrightarrow r_2;\ \xi, \eta;\ u, \upsilon;\ \tau_{13}, \tau_{23};\ a_{55}, a_{44})$$

$$(1+\varepsilon r_1\zeta)\tau_{12} = (1+\varepsilon r_2\zeta)\tau_{21}$$

$$r_1 = \frac{R}{R_1},\quad r_2 = \frac{R}{R_2},\quad \omega_*^2 = \rho h^2\omega^2$$

Решение системы (2.2) есть сумма решений внутренней задачи и пограничного слоя [1, 9]. Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического представления [9, 17]

$$\tau_{jk}(\xi,\eta,\zeta) = \varepsilon^{-1+s}\tau_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad j,k = 1,2,3;\quad s = \overline{0,N}$$

$$(u(\xi,\eta,\zeta), \upsilon(\xi,\eta,\zeta), w(\xi,\eta,\zeta)) = \varepsilon^s(u^{(s)}(\xi,\eta,\zeta), \upsilon^{(s)}(\xi,\eta,\zeta), w^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)) \qquad (2.3)$$

$$\omega_* = \varepsilon^s\omega_*^{(s)}$$

Здесь и далее $s=\overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $0, N$.

Из асимптотики (2.3) следует, что в отличие от классической теории [1, 9] для данного класса задач все компоненты тензора напряжений асимптотически равноправны, равноправны (имеют одинаковый порядок) также перемещения, и допущения классической теории пластин и оболочек здесь неприменимы.

Подставив выражения (2.3) в систему (2.2) и применив правило Коши умножения рядов, для определения неизвестных коэффициентов разложения $Q_{jk}^{(s)}$ получим непротиворечивую систему

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}(B\tau_{11}^{(s-1)})-k_\beta R\tau_{22}^{(s-1)}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}(A\tau_{21}^{(s-1)})+k_\alpha R\tau_{12}^{(s-1)}+\frac{\partial\tau_{13}^{(s)}}{\partial\zeta}+r_1\zeta\frac{\partial\tau_{13}^{(s-1)}}{\partial\zeta}+$$

$$+2r_1\tau_{13}^{(s-1)}+c^{(m)}u^{(s-m)} = 0,\quad m = \overline{0,s}$$

$$(A\leftrightarrow B;\ \alpha\leftrightarrow\beta;\ r_1, r_2;\ \xi\leftrightarrow\eta;\ u, \upsilon;\ \tau_{12}\leftrightarrow\tau_{21};\ \tau_{11}\leftrightarrow\tau_{22};\ \tau_{13}, \tau_{23})$$

$$\frac{\partial\tau_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}-r_1\tau_{11}^{(s-1)}-r_2\tau_{22}^{(s-1)}+\frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}+k_\beta R\tau_{13}^{(s-1)}+k_\alpha R\tau_{23}^{(s-1)}+c^{(m)}w^{(s-m)} = 0$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + k_\alpha R\upsilon^{(s-1)} + r_1 w^{(s-1)} + r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \xi} + k_\alpha R\upsilon^{(s-2)} + r_1 w^{(s-2)}\right) =$$

$$= r_1\zeta a_{11}\tau_{11}^{(s-1)} + r_2\zeta a_{12}\tau_{22}^{(s-1)} + \sum_1^{(s)}$$

$$\left(A, B;\ \alpha, \beta;\ r_1 \leftrightarrow r_2;\ \xi, \eta;\ u \leftrightarrow \upsilon;\ \tau_{11} \leftrightarrow \tau_{22};\ a_{11}, a_{22};\ \sum_1^{(s)}, \sum_2^{(s)}\right) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + \zeta(r_1 + r_2)\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \zeta^2 r_1 r_2 \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \zeta} = \sum_3^{(s)} + r_1\zeta a_{13}\tau_{11}^{(s-1)} + r_2\zeta a_{23}\tau_{22}^{(s-1)}$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \eta} - k_\beta R\upsilon^{(s-1)} + r_1\zeta\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \eta} - k_\beta R\upsilon^{(s-2)}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial \upsilon^{(s-1)}}{\partial \xi} - k_\alpha R u^{(s-1)} +$$

$$+ r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \upsilon^{(s-2)}}{\partial \xi} - k_\alpha R u^{(s-2)}\right) = a_{66}\tau_{12}^{(s)} + r_1\zeta a_{66}\tau_{12}^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \zeta(r_1 + r_2)\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \zeta^2 r_1 r_2 \frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \zeta} - r_1 u^{(s-1)} - \zeta r_1 r_2 u^{(s-2)} + \frac{1}{A}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{r_2\zeta}{A}\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \xi} =$$

$$= a_{55}\tau_{13}^{(s)} + r_1\zeta a_{55}\tau_{13}^{(s-1)}\ \ (A, B;\ r_1 \leftrightarrow r_2;\ \xi, \eta;\ u, \upsilon;\ \tau_{13}, \tau_{23};\ a_{55}, a_{44})$$

$$\tau_{12}^{(s)} + r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)} = \tau_{21}^{(s)} + r_2\zeta_{21}^{(s-1)}$$

$$c^{(m)} = \sum_{n=0}^{m} \omega_{*(m-n)}\omega_{*(n)}, \quad \sum_i^{(s)} = a_{i1}\tau_{11}^{(s)} + a_{i2}\tau_{22}^{(s)} + a_{i3}\tau_{33}^{(s)}$$

Укажем, что лишь при асимптотике (2.3) можно получить непротиворечивую систему относительно $Q_{jk}^{(s)}$.

Систему (2.4) можно записать в виде

$$\tau_{12}^{(s)} = P_{1\tau}^{(s-1)}, \quad \tau_{21}^{(s)} = P_{1\tau}^{(s-1)} - r_2\zeta\tau_{21}^{(s-1)} + r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)}, \quad \sum_1^{(s)} = P_{2\tau}^{(s-1)}, \quad \sum_2^{(s)} = P_{3\tau}^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial \tau_{13}^{(s)}}{\partial \zeta} + c^{(m)}u^{(s-m)} = P_{6\tau}^{(s-1)}, \quad m = \overline{0, s} \quad (13, 23, 33;\ u, \upsilon, w;\ 6\tau, 5\tau, 4\tau) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{55}\tau_{13}^{(s)} = P_u^{(s-1)}, \quad \frac{\partial \upsilon^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{44}\tau_{23}^{(s)} = P_\upsilon^{(s-1)}, \quad \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} - \sum_3^{(s)} = P_w^{(s-1)}$$

где

$$P_{1\tau}^{(s-1)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \eta} - k_\beta R\upsilon^{(s-1)} + r_1\zeta\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \eta} - k_\beta R\upsilon^{(s-2)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{A}\frac{\partial \upsilon^{(s-1)}}{\partial \xi} - k_\alpha R u^{(s-1)} + r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \upsilon^{(s-2)}}{\partial \xi} - k_\alpha R u^{(s-2)}\right) - r_1\zeta a_{66}\tau_{12}^{(s-1)}\right]$$

$$P_{2\tau}^{(s-1)} = \frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + k_\alpha R v^{(s-1)} + r_1 w^{(s-1)} + r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \xi} + k_\alpha R v^{(s-2)} + r_1 w^{(s-2)}\right) -$$
$$- r_1\zeta a_{11}\tau_{11}^{(s-1)} - r_2\zeta a_{12}\tau_{22}^{(s-1)}$$

$(2\tau, 3\tau;\ A, B;\ \alpha, \beta;\ r_1 \leftrightarrow r_2;\ \xi, \eta;\ u \leftrightarrow v;\ \tau_{11} \leftrightarrow \tau_{22};\ a_{11}, a_{22})$

$$P_{4\tau}^{(s-1)} = r_1\tau_{11}^{(s-1)} + r_2\tau_{22}^{(s-1)} - \frac{1}{A}\frac{\partial \tau_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{B}\frac{\partial \tau_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} - k_\beta R\tau_{13}^{(s-1)} - k_\alpha R\tau_{23}^{(s-1)} \tag{2.6}$$

$$P_{5\tau}^{(s-1)} = -\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \eta}(A\tau_{22}^{(s-1)}) + k_\alpha R\tau_{11}^{(s-1)} - \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \xi}(B\tau_{12}^{(s-1)}) - k_\beta R\tau_{21}^{(s-1)} - r_2\zeta\frac{\partial \tau_{23}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - 2r_2\tau_{23}^{(s-1)}$$

$(5\tau, 6\tau;\ A \leftrightarrow B;\ \alpha \leftrightarrow \beta;\ r_2, r_1;\ \xi \leftrightarrow \eta;\ \tau_{11} \leftrightarrow \tau_{22};\ \tau_{12} \leftrightarrow \tau_{21};\ \tau_{23}, \tau_{13})$

$$P_u^{(s-1)} = -\zeta(r_1 + r_2)\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \zeta^2 r_1 r_2\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \zeta} + r_1 u^{(s-1)} + \zeta r_1 r_2 u^{(s-2)} - \frac{1}{A}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} -$$

$$-\frac{r_2\zeta}{A}\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \xi} + r_1\zeta a_{55}\tau_{13}^{(s-1)} \quad (u, v;\ A, B;\ r_1 \leftrightarrow r_2;\ \xi, \eta;\ \tau_{13}, \tau_{23};\ a_{55}, a_{44})$$

$$P_w^{(s-1)} = -\zeta(r_1 + r_2)\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \zeta^2 r_1 r_2\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \zeta} + r_1\zeta a_{13}\tau_{11}^{(s-1)} + r_2\zeta a_{23}\tau_{22}^{(s-1)}$$

Используя соотношения (2.5), компоненты тензора напряжений можно выразить через $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, $w^{(s)}$:

$$\tau_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} - P_u^{(s-1)}\right], \quad \tau_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} - P_v^{(s-1)}\right]$$

$$\tau_{12}^{(s)} = P_{1\tau}^{(s-1)}, \quad \tau_{21}^{(s)} = P_{1\tau}^{(s-1)} - r_2\zeta\tau_{21}^{(s-1)} + r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)} \tag{2.7}$$

$$\tau_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_2\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + \Delta_{23}P_{2\tau}^{(s-1)} + \Delta_1 P_{3\tau}^{(s-1)} - \Delta_2 P_w^{(s-1)}\right]$$

$(11, 22, 33;\ \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12};\ \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2;\ \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3)$

где

$$\Delta_1 = a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12}, \quad \Delta_2 = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}, \quad \Delta_3 = a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}$$
$$\Delta_{ij} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \Delta = a_{11}\Delta_{23} + a_{13}\Delta_2 + a_{12}\Delta_1 \tag{2.8}$$

а для определения компонент вектора перемещения получим уравнения

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}c^{(m)}u^{(s-m)} = a_{55}P_{6\tau}^{(s-1)} + \frac{\partial P_u^{(s-1)}}{\partial \zeta}, \quad m = \overline{0, s} \quad (u, v;\ a_{55}, a_{44};\ 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}}c^{(m)}w^{(s-m)} = F_w^{(s-1)} \tag{2.9}$$

$$F_w^{(s-1)} = \frac{1}{\Delta_{12}}\left[\Delta P_{4\tau}^{(s-1)} - \Delta_2\frac{\partial P_{2\tau}^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \Delta_3\frac{\partial P_{3\tau}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \Delta_{12}\frac{\partial P_w^{(s-1)}}{\partial\zeta}\right]$$

При $s = 0$ система (2.9) превращается в систему из трех независимых уравнений

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\zeta^2} + (\chi^u)^2 u^{(0)} = 0,\ (u, v, w);\ \ \chi^u = \sqrt{a_{55}}\omega_{*0},\ \ \chi^v = \sqrt{a_{44}}\omega_{*0},\ \ \chi^w = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\omega_{*0} \tag{2.10}$$

решения которых имеют вид

$$u^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = C_1^{(0)}(\xi, \eta)\sin\chi^u\zeta + C_2^{(0)}(\xi, \eta)\cos\chi^u\zeta\ \ (u, v, w;\ 1, 3, 5;\ 2, 4, 6) \tag{2.11}$$

Подставив выражения (2.11) в соотношении (2.7) и удовлетворив граничным условиям (1.3), (1.5), получим три независимые однородные алгебраические системы относительно неизвестных $C_i^{(0)}$. Из условия существования ненулевых решений этих систем вытекают следующие уравнения частот и соответствующие им значения частот:

$$\cos 2\chi^u = 0 \Rightarrow \chi_n^u = \sqrt{a_{55}}\omega_{*0}^u = \frac{\pi(2n+1)}{4}\left(u, v, w;\ \sqrt{a_{55}}, \sqrt{a_{44}}, \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\right) \tag{2.12}$$

Решение (2.11) при учете соотношений (2.12) можно записать в виде

$$\begin{gathered} u_n^{(0,u)} = C_{2n}^{(0)}(\xi, \eta)\psi_n(\zeta), \quad v_n^{(0,v)} = C_{4n}^{(0)}(\xi, \eta)\psi_n(\zeta), \quad w_n^{(0,w)} = C_{6n}^{(0)}(\xi, \eta)\psi_n(\zeta) \\ \psi_n(\zeta) = \cos\frac{\pi(2n+1)}{4}(1-\zeta) \end{gathered} \tag{2.13}$$

Коэффициенты $C_{in}^{(0)}(\xi, \eta)$ определяются из начальных условий общеизвестным способом. Легко убедиться, что функции $\{\psi_n(\zeta)\}$ составляют ортонормированную систему на отрезке [–1, 1]. Частоты (2.12) совпадают с частотами сдвиговых и продольных колебаний ортотропных пластин при аналогичных граничных условиях (1.3), (1.5) [17].

3. О вкладе приближений $s \geq 1$. Решение при $s \geq 1$ будет зависеть от того, какое из значений частот ω_{*0n}^u, ω_{*0n}^v, ω_{*0n}^w взять за основу вычислений, в частности при решении уравнений (2.9). Необходимо рассмотреть все три случая. При $s \geq 1$ уравнения (2.9) становятся неоднородными.

Рассмотрим приближение $s = 1$. Если $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^u$, то из соотношений (2.7), (2.10) и граничных условий (1.3), (1.5) относительно $\tau_{\beta\gamma}$, $\tau_{\gamma\gamma}$, V, W следуют равенства

$$v_n^{(0,u)} = w_n^{(0,u)} = 0, \quad \tau_{23}^{(0,u)} = \tau_{33}^{(0,u)} = \tau_{12}^{(0,u)} = \tau_{21}^{(0,u)} = \tau_{11}^{(0,u)} = \tau_{22}^{(0,u)} = 0 \tag{3.1}$$

так как после удовлетворения указанным граничным условиям полученные алгебраические системы однородных уравнений будут иметь отличные от нуля определители в силу того, что $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^u$ не является решением не выписанных явно уравнений (2.12).

Система (2.9) преобразуется в систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u_n^{(1,u)}}{\partial\zeta^2} + a_{55}(\omega_{*0n}^u)^2 u_n^{(1,u)} + 2a_{55}\omega_{*0n}^u\omega_{*1n}^u u_n^{(0,u)} = F_u^{(0,u)} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 v_n^{(1,u)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}(\omega_{*0n}^u)^2 v_n^{(1,u)} = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2 w_n^{(1,u)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}}(\omega_{*0n}^u)^2 w_n^{(1,u)} = F_w^{(0,u)} \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} F_u^{(0,u)} &= -(r_1+r_2)\left[\zeta\frac{\partial^2 u_n^{(0,u)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial u_n^{(0,u)}}{\partial\zeta}\right] \\ F_w^{(0,u)} &= \frac{1}{\Delta_{12}}\left[\Delta P_{4\tau}^{(0,u)} - \Delta_2\frac{\partial P_{2\tau}^{(0,u)}}{\partial\zeta} - \Delta_3\frac{\partial P_{3\tau}^{(0,u)}}{\partial\zeta} + \Delta_{12}\frac{\partial P_w^{(0,u)}}{\partial\zeta}\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из уравнения (3.3), соотношений (2.7) и граничных условий (1.3), (1.5) следует

$$\upsilon_n^{(1,u)} = 0, \quad \tau_{23}^{(1,u)} = 0 \tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.4) имеет вид

$$w_n^{(1,u)} = C_{5n}^{(1,u)}\sin\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\omega_{*0n}^u\zeta + C_{6n}^{(1,u)}\cos\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\omega_{*0n}^u\zeta + w_0^{(1,u)} \tag{3.7}$$

где $w_0^{(1,u)}$ – частное решение уравнения (3.4). Удовлетворив граничным условиям (1.3), (1.5) относительно W, $\tau_{\gamma\gamma}$ и учитывая, что определитель полученной системы отличен от нуля, однозначно определяем неизвестные коэффициенты $C_{5n}^{(1,u)}$ и $C_{6n}^{(1,u)}$. Подставляя значения $u_n^{(0,u)}$ и $w_n^{(1,u)}$ в соотношения (2.7), определяем $\tau_{33}^{(1,u)}$, $\tau_{22}^{(1,u)}$, $\tau_{11}^{(1,u)}$, $\tau_{12}^{(1,u)}$, $\tau_{21}^{(1,u)}$.

Решение уравнения (3.2) можно отыскать в виде разложения по ортонормальной системе функций [22, 23], в качестве которой можно взять собственные функции $\{\psi_n(\zeta)\}$.

Разложим по этим функциям функции $u_n^{(1,u)}$ и $F_u^{(0,u)}$

$$\begin{aligned} u_n^{(1,u)}(\xi,\eta,\zeta) &= \sum b_{1nm}(\xi,\eta)\psi_m(\zeta), \quad F_u^{(0,u)} = \sum f_{1m}^u\psi_m(\zeta) \\ f_{1m}^u &= \int_{-1}^{1} F_u^{(0,u)}\psi_m(\zeta)d\zeta = -\frac{(r_1+r_2)C_{2m}^{(0,u)}}{4} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь и далее знак суммы означает суммирование от $m = 0$ до $m = \infty$.

Граничные условия (1.3), (1.5) будут удовлетворены тождественно.

Функции $\psi_m(\zeta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2\psi_m}{\partial\zeta^2} + a_{55}\omega_{*0m}^2\psi_m = 0 \tag{3.9}$$

Подставив разложения (3.8) в уравнение (3.2), умножив обе части полученного равенства на $\psi_k(\zeta)$, проинтегрировав в пределах $-1 \le \zeta \le 1$, учитывая уравнение (3.9), получим

$$\sum b_{1nm}a_{55}((\omega_{*0n}^u)^2 - (\omega_{*0m}^u)^2)\delta_{mk} + 2a_{55}\omega_{*0n}^u\omega_{*1n}^u C_{2n}^{(0,u)}\delta_{nk} = \sum f_{1m}^u\delta_{mk} \tag{3.10}$$

где δ_{mk} – символ Кронекера.

Если $k \neq n$, из соотношения (3.10) однозначно определяются b_{1nk}:

$$b_{1nk} = \frac{f_{1k}^u}{a_{55}((\omega_{*0n}^u)^2 - (\omega_{*0k}^u)^2)} = \frac{(r_1 + r_2)C_{2k}^{(0,u)}}{\pi^2(k-n)(n+k+1)} \tag{3.11}$$

При $k = n$ находим

$$\omega_{*1n}^u = \frac{f_{1n}^u}{2a_{55}\omega_{*0n}^u C_{2n}^{(0,u)}} = \frac{2f_{1n}^u}{\pi(2n+1)\sqrt{a_{55}}C_{2n}^{(0,u)}} = -\frac{r_1 + r_2}{2\pi(2n+1)\sqrt{a_{55}}} \tag{3.12}$$

Таким образом, ограничившись первыми двумя приближениями, получим

$$\omega_{*n}^u = \omega_{*0n}^u + \varepsilon\omega_{*1n}^u = \frac{\pi^2(2n+1)^2 - 2\varepsilon(r_1 + r_2)}{4\pi(2n+1)\sqrt{a_{55}}} \tag{3.13}$$

В первом разложении (3.8) остается неопределенным значение коэффициента b_{1nn}. Для его определения воспользуемся условием нормировки [22, 23]

$$\int_{-1}^{1} (u_n^{(0,u)} + \varepsilon u_n^{(1,u)})^2 d\zeta \left[\int_{-1}^{1} (u_n^{(0,u)})^2 d\zeta\right]^{-1} = 1$$

откуда следует равенство

$$\int_{-1}^{1} u_n^{(0,u)} u_n^{(1,u)} d\zeta = 0$$

подставив в которое первое разложение (3.8), получим

$$b_{1nn}(\xi, \eta) = 0$$

Таким образом, имеем

$$u_n^{(1,u)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum \frac{C_{2m}^{(0,u)}(\xi, \eta)(r_1 + r_2)}{\pi^2(m-n)(n+m+1)} \cos\frac{\pi(2m+1)}{4}(1-\zeta) \tag{3.14}$$

Случаи $\omega_{*n} = \omega_{*n}^{v}$ и $\omega_{*n} = \omega_{*n}^{w}$ рассматриваются аналогично предыдущему.

Если ограничиться приближениями $s = 0, 1$, будем иметь для частот ω_{*n}^{v} и ω_{*n}^{w} выражения, аналогичные формуле (3.13) при замене в ней $\sqrt{a_{55}}$ на $\sqrt{a_{44}}$ и $\sqrt{\Delta/\Delta_{12}}$ соответственно.

Частотам ω_{*n}^{v} и ω_{*n}^{v} соответствуют сдвиговые собственные колебания оболочки, а частотам ω_{*n}^{w} – продольные колебания. Поскольку, согласно формуле (2.12), значения частот при $s = 0$ совпадают с соответствующими частотами для ортотропных пластин, эффект оболочки, т.е. влияние кривизн срединной поверхности, проявляется начиная с приближения $s = 1$ и обусловлен слагаемыми, пропорциональными $(r_1 + r_2)$. Отметим, что для ортотропных пластин влияние последующих приближений на значения частот будет порядка ε^2.

Аналогичным образом рассматриваются приближения $s \geq 2$. Однако для приложений они вряд ли будут представлять интерес.

4. Собственные колебания ортотропной цилиндрической оболочки. Рассмотрим частный случай, когда ортотропная оболочка цилиндрическая ($r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $A = B = 1$, $k_\alpha = k_\beta = 0$). Для нулевого приближения соотношения (2.12) и решение (2.13) остаются неизменными. С учетом первого приближения для частот собственных колебаний имеем

$$\omega^u_{*n} = \omega^u_{*0n} + \varepsilon\omega^u_{*1n} = \frac{\alpha_n}{\sqrt{a_{55}}} \left(u, v, w;\ \sqrt{a_{55}}, \sqrt{a_{44}}, \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\right)$$
$$\alpha_n = \frac{\pi^2(2n+1)^2 - 2\varepsilon}{4\pi(2n+1)} \tag{4.1}$$

Для компонент вектора перемещения остаются в силе формулы (2.13) и формулы

$$v_n^{(0,u)} = w_n^{(0,u)} = 0, \quad u_n^{(0,v)} = w_n^{(0,v)} = 0, \quad u_n^{(0,w)} = v_n^{(0,w)} = 0, \quad v_n^{(1,u)} = 0$$

$$w_n^{(1,u)} = C_{5n}^{(1,u)} \sin\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\omega^u_{*0n}\zeta + C_{6n}^{(1,u)} \cos\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\omega^u_{*0n}\zeta + w_0^{(1,u)}\ (u, v) \tag{4.2}$$

$$u_n^{(1,u)}(\xi,\eta,\zeta) = \sum \frac{C_{2m}^{(0,u)}(\xi,\eta)}{\pi^2(m-n)(n+m+1)}\psi_m(\zeta)\ (u, v, w;\ 2m, 4m, 6m)$$

где $w_0^{(1,u)}$ – частное решение соответствующего уравнения при $s = 1$.

5. Собственные колебания при иных граничных условиях. Используя решение (2.7), (2.11), удовлетворив граничным условиям (1.4), (1.5) при $s = 0$, получим два возможных варианта значений частот собственных колебаний

$$\omega^{uI}_{*0n} = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{55}}}, \quad \omega^{uII}_{*0n} = \frac{\pi(n+1/2)}{\sqrt{a_{55}}}, \quad n \in N \left(u, v, w;\ \sqrt{a_{55}}, \sqrt{a_{44}}, \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\right) \tag{5.1}$$

с собственными функциями $\varphi_{1n} = \sin\pi n\zeta$ и $\varphi_{2n} = \cos\pi(n + 1/2)\zeta$ соответственно.

Условиям (1.4), (1.6) отвечают частоты (2.12), соответствующие $\sqrt{a_{55}}$, $\sqrt{a_{44}}$, а также (5.1), соответствующее $\sqrt{\Delta/\Delta_{12}}$, а собственными функциями будут φ_{1n}, φ_{2n} и $\varphi_{3n} = \sin\pi(n/2 + 1/4)(1-\zeta)$.

Приближения $s \geq 1$ строятся аналогичным образом. Ограничившись приближениями $s = 0{,}1$, заключаем, что условиям (1.4), (1.5) будут соответствовать частоты

$$\omega^{uI}_{*n} = \omega^{uI}_{*0n} + \varepsilon\omega^{uI}_{*1n} = \frac{\pi n(4 + \varepsilon(r_1 + r_2))}{4\sqrt{a_{55}}} \left(u, v, w;\ \sqrt{a_{55}}, \sqrt{a_{44}}, \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\right) \tag{5.2}$$

$$\omega^{uII}_{*n} = \omega^{uII}_{*0n} + \varepsilon\omega^{uII}_{*1n} = \frac{4\pi^2(2n+1)^2 + (4 + \pi^2(2n+1)^2)\varepsilon(r_1 + r_2)}{8\pi(2n+1)\sqrt{a_{55}}}$$
$$\left(u, v, w;\ \sqrt{a_{55}}, \sqrt{a_{44}}, \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\right) \tag{5.3}$$

а граничным условиям (1.4), (1.6) – частоты

$$\omega_{*n}^{u} = \omega_{*0n}^{u} + \varepsilon\omega_{*1n}^{u} = \frac{\pi^2(2n+1)^2 + 2\varepsilon(r_1+r_2)}{4\pi(2n+1)\sqrt{a_{55}}} \quad (u,\ \upsilon;\ \sqrt{a_{55}},\ \sqrt{a_{44}}) \tag{5.4}$$

и частоты ω_{*n}^{w}, совпадающие с (5.2) или (5.3).

Тем же способом рассматриваются другие комбинации условий (1.3)–(1.6).

6. Собственные колебания в пограничном слое. Чтобы исследовать собственные колебания в пограничном слое вблизи боковой поверхности $\alpha = \alpha_0$, перейдем к безразмерным компонентам вектора перемещения

$$U = Ru, \quad V = R\upsilon, \quad W = Rw$$

и введем новые независимые переменные по формулам

$$\alpha - \alpha_0 = h\xi, \quad \beta = R\eta, \quad \gamma = h\zeta$$

Проделав изложенные ранее [9] процедуры построения пограничного слоя, решение преобразованной системы уравнений (1.1), (1.2) будем искать в виде (2.1), (2.3), приписав всем искомым величинам индекс b. В результате получим следующую систему относительно $Q_b^{(s)}$:

$$A_0\frac{\partial\tau_{11b}^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{13b}^{(s)}}{\partial\zeta} + c^{(j)}u_b^{(s-j)} = R_{1\tau}^{(s-1)} \quad (11b,\ 12b,\ 13b;\ 13b,\ 23b,\ 33b;\ u,\ \upsilon,\ w;\ 1\tau,\ 2\tau,\ 3\tau)$$

$$A_0\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\xi} - \sum_{1b}^{(s)} = R_u^{(s-1)}, \quad \sum_{2b}^{(s)} = R_\upsilon^{(s-1)}, \quad \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\zeta} - \sum_{3b}^{(s)} = R_w^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial\upsilon_b^{(s)}}{\partial\zeta} - a_{44}\tau_{23b}^{(s)} = R_{4\tau}^{(s-1)}, \quad A_0\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\zeta} - a_{55}\tau_{13b}^{(s)} = R_{5\tau}^{(s-1)} \tag{6.1}$$

$$A_0\frac{\partial\upsilon_b^{(s)}}{\partial\xi} - a_{66}\tau_{12b}^{(s)} = R_{6\tau}^{(s-1)}, \quad \tau_{12b}^{(s)} - \tau_{21b}^{(s)} = R_{7\tau}^{(s-1)}$$

$$A_0 = A(\alpha_0), \quad c^{(j)} = \sum_{n=0}^{j}\omega_{*(j-n)}\omega_{*(n)}, \quad j = \overline{0, s}, \quad \sum_{ib}^{(s)} = a_{i1}\tau_{11b}^{(s)} + a_{i2}\tau_{22b}^{(s)} + a_{i3}\tau_{33b}^{(s)}$$

где $R_{i\tau}^{(s-1)}$ – функции, известные для каждого приближения, если известны величины предыдущих приближений, в частности $R_{i\tau}^{(k)} \equiv 0$ при $k < 0$.

Из системы (6.1) компоненты тензора напряжений можно выразить через $u_b^{(s)}$, $\upsilon_b^{(s)}$, $w_b^{(s)}$:

$$\tau_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial\upsilon_b^{(s)}}{\partial\zeta} - R_{4\tau}^{(s-1)}\right], \quad \tau_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[A_0\frac{\partial\upsilon_b^{(s)}}{\partial\xi} - R_{6\tau}^{(s-1)}\right], \quad \tau_{12b}^{(s)} - \tau_{21b}^{(s)} = R_{7\tau}^{(s-1)}$$
$$\tau_{13b}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left[A_0\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\zeta} - R_{5\tau}^{(s-1)}\right] \tag{6.2}$$

$$\tau_{11b}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(A_0\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \xi} - R_u^{(s-1)}\right)\Delta_{23} + R_\upsilon^{(s-1)}\Delta_1 + \left(\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R_w^{(s-1)}\right)\Delta_2\right] \tag{6.3}$$
$$(11b, 22b, 33b; \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2; \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3; \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12})$$

а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\frac{1}{a_{66}}A_0^2\frac{\partial^2 \upsilon_b^{(s)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 \upsilon_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + c^{(j)}\upsilon_b^{(s-j)} = T_\upsilon^{(s-1)}, \quad j = \overline{0, s} \tag{6.4}$$

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta}A_0^2\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \xi^2} + A_0\left(\frac{\Delta_2}{\Delta} + \delta_1\right)\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + c^{(j)}u_b^{(s-j)} = T_u^{(s-1)} \tag{6.5}$$
$$\left(u, w; \frac{\Delta}{\Delta_{23}}, a_{55}; a_{55}, \frac{\Delta}{\Delta_{12}}\right)$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{a_{55}}, \quad T_\upsilon^{(s-1)} = R_{2\tau}^{(s-1)} + \frac{1}{a_{66}}A_0\frac{\partial R_{6\tau}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial R_{4\tau}^{(s-1)}}{\partial \zeta}$$

$$T_u^{(s-1)} = R_{1\tau}^{(s-1)} + \frac{\Delta_{23}}{\Delta}A_0\frac{\partial R_u^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\Delta_2}{\Delta}A_0\frac{\partial R_w^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{a_{55}}\frac{\partial R_{5\tau}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\Delta_1}{\Delta}A_0\frac{\partial R_\upsilon^{(s-1)}}{\partial \xi} \tag{6.6}$$
$$\left(u \leftrightarrow w; A_0\frac{\partial}{\partial \xi} \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta}; 1\tau, 3\tau; \Delta_{23}, \Delta_{12}; \Delta_1, \Delta_3\right)$$

Уравнение (6.4) и соотношения (6.2) описывают антиплоский, а (6.3) и (6.5) – плоский пограничные слои.

Особый интерес представляет исходное приближение. При $s = 0$ правые части уравнений (6.4) и (6.5) обращаются в нуль. Необходимо найти затухающее решение уравнения (6.4) при граничных условиях

$$\zeta = -1: \upsilon_b^{(0)} = 0, \quad \zeta = 1: \tau_{23b}^{(0)} = 0 \tag{6.7}$$

и системы уравнений (6.5) при условиях

$$\zeta = 1: \tau_{13b}^{(0)} = \tau_{33b}^{(0)} = 0, \quad \zeta = -1: u_b^{(0)} = w_b^{(0)} = 0 \tag{6.8}$$

Решение уравнения (6.4) при $s = 0$ будем искать в виде

$$\upsilon_b^{(0)}(\zeta, \eta, \zeta) = \exp(-\lambda_a \xi)C^{(0)}(\eta)\upsilon_{1b}^{(0)}(\zeta) \tag{6.9}$$

Индекс a означает, что λ_a относится к антиплоскому пограничному слою. Подставив выражение (6.9) в уравнение (6.4), получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$\upsilon_{1b}^{(0)}(\zeta) = C_1^{(0)}\sin\alpha_a\zeta + C_2^{(0)}\cos\alpha_a\zeta, \quad \alpha_a = \sqrt{a_{44}\left(\omega_{*0}^2 + \frac{A_0^2}{a_{66}}\lambda_a^2\right)}$$

Удовлетворив граничным условиям (6.7), получим

$$\cos 2\sqrt{a_{44}\left(\omega_{*0}^2+\frac{A_0^2}{a_{66}}\lambda_a^2\right)}=0 \Rightarrow \lambda_{ank} = \pm\sqrt{\frac{a_{66}}{A_0^2}\left(\frac{\pi^2(2n+1)^2}{16a_{44}}-\omega_{*0k}^2\right)} \tag{6.10}$$

В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться значениями λ_{ank} с $\mathrm{Re}\lambda_{ank}>0$. Собственными функциями будут

$$\upsilon_{bnk}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) = C^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_{ank}\xi)\cos\frac{\pi(2n+1)(1-\zeta)}{4} \tag{6.11}$$

Решение системы (6.5) при $s = 0$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) &= K_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k\zeta)\\ w_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) &= LK_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k\zeta)\end{aligned} \tag{6.12}$$

где L – неопределенный пока множитель, k – корень характеристического уравнения

$$B_2k^4+(\lambda_p^2B_3+B_5)k^2+\lambda_p^4B_1+\lambda_p^2B_4+\omega_{*0}^4 = 0$$

где

$$B_1 = \frac{\Delta_{23}}{\Delta a_{55}}A_0^4,\quad B_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta a_{55}},\quad B_3 = \left(\frac{\Delta_{23}\Delta_{12}-\Delta_2^2}{\Delta^2}-2\frac{\Delta_2}{\Delta a_{55}}\right)A_0^2$$

$$B_4 = \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta}+\frac{1}{a_{55}}\right)A_0^2\omega_{*0}^2,\quad B_5 = \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta}+\frac{1}{a_{55}}\right)\omega_{*0}^2$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} k_{1,2}^2 &= (-\lambda_p^2B_3-B_5\pm\sqrt{D})/(2B_2)\\ D &= \lambda_p^4(B_3^2-4B_1B_2)+2\lambda_p^2(B_3B_5-2B_2B_4)+B_5^2-4B_2\omega_{*0}^4\end{aligned} \tag{6.13}$$

Каждому k_i соответствует свой множитель L_i.

Подставив выражения (6.12) в систему (6.5), получим

$$L_i = \frac{\Delta_{23}a_{55}\lambda_p^2A_0^2+\Delta k_i^2+\Delta a_{55}\omega_{*0}^2}{(\Delta+\Delta_2a_{55})\lambda_pk_i} \tag{6.14}$$

В результате решение системы (6.5) при $s = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} u_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=1}^{4}K_{ib}^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k_i\zeta)\\ w_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{i=1}^{4}L_iK_{ib}^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi+k_i\zeta)\end{aligned} \tag{6.15}$$

Подставив выражения (6.15) в условия (6.8), с учетом соотношений (6.3) получим систему алгебраических однородных уравнений, для существования нетривиального решения которой необходимо выполнение равенства

k	$\omega_{*0k} = \overset{u}{\omega}_{*0k}$	$\omega_{*0k} = \overset{v}{\omega}_{*0k}$	$\omega_{*0k} = \overset{w}{\omega}_{*0k}$
	Антиплоский пограничный слой		
0	1.995, 3.469, 4.911, 6.343, 7.770, 9.195	2.007, 3.476, 4.916, 7.347, 7.773, 9.198	0.688, 2.921, 4.540, 6.060, 7.541, 9.002
1	2.757, 4.437, 5.984, 7.480, 8.951, 10.407	2.838, 4.488, 6.021, 7.510, 8.976, 10.429	2.063, 4.939, 6.969, 8.762, 10.440, 12.052
2	3.290, 5.190, 6.862, 8,441, 9.973, 11.475	3.476, 5.310, 6.953, 8.515, 10.035, 11.530	3.439, 6.637, 8.961, 10.981, 12.842, 14.603
3	3.694, 5.813, 7.613, 9.282, 10.880, 12.436	4.014, 6.021, 7.773, 9.414, 10.993, 12.534	4.814, 8.215, 10.762, 12.969, 14.987, 16.883
4	4.008, 6.343, 8.272, 10.033, 11.701, 13,312	4.488, 6.657, 8.515, 10.234, 11.874, 13..464	6.1893, 9.732, 12.455, 14.819, 16.973, 18.989
5	4.252, 6.803, 8.860, 10.713, 12.452, 14.119	4.916, 7.237, 9.198, 10.993, 12.694, 14.334	7.565, 11.212, 14.079, 16.576, 18.850, 20.974
	Плоский пограничный слой		
0	$0.264 + 0.243i$, $0.853 + 0.602i$, 1.966, 2.454, $2.953 + 0.4796i$, 4.194	$0.252 + 0.231i$, $0.868 + 0.596i$, 1.963, 2.454, $2.959 + 0.481i$, 4.191	$0.715 + 0.657i$, $2.091 + 0.589i$, 2.436, 2.850, $4.295 + 0.436i$, 4.635
1	$0.793 + 0.728i$, $1.947 + 0.688i$, 2.428, 2.888, $4.210 + 0.503i$, 4.635	0.074, $0.756 + 0.694i$, $2.016 + 0.644i$, 2.432, 2.873, $4.251 + 0.473i$	1.689, 2.110, $2.146 + 1.971i$, $3.984 + 0.758i$, 5.038, 5.559
2	0.409, $1.321 + 1.213i$, 2.331, 2.852, $3.427 + 0.677i$, 4.659	$0.661 + 0.563i$, $1.260 + 1.157i$, 2.347, 2.872, $3.546 + 0.689i$, 4.648	2.278, $3.397 + 0.325i$, 4.626, 5.434, $6.007 + 0.581i$, 7.798
3	0.683, $1.850 + 1.699i$, 2.249, 2.407, 3.080, $4.551 + 0.693i$	0.861, 1.026, $1.764 + 1.6195i$, 2.276, 2.5273, 3.093	0.636, 2.460, $4.145 + 0.614i$, $5.738 + 0.656i$, $7.459 + 0.410i$, 7.927
4	$2.253 + 0.096i$, $3.619 + 0.680i$, 5.032, 5.509, $6.057 + 0.676i$, 7.330	1.0097, 2.114, 2.633, $3.7798 + 0.723i$, 5.027, 5.537	$2.776 + 0.543i$, $4.950 + 0.359i$, $6.485 + 0.288i$, $7.922 + 0.576i$, $9.514 + 0.678i$, 10.453

$$\sum_{(1,2,3,4)} (-1)^{1} S_1[Q_2(L_3 - L_4) + Q_3(L_4 - L_2) + Q_4(L_2 - L_3)] = 0 \qquad (6.16)$$

где

$$S_i = (\Delta_{12}k_iL_i - \Delta_2\lambda_pA_0)\exp(2k_i), \quad Q_i = (k_i - \lambda_pA_0L_i)\exp(2k_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \qquad (6.17)$$

Суммирование в левой части равенства (6.16) ведется по круговой переустановке индексов при учете чередования знаков слагаемых.

Уравнение (6.16) является характеристическим уравнением для определения λ_p.

В соотношения (6.10) и (6.16) в качестве параметра входит ω_{*0}, и каждому его значению, определяемому равенством (2.12), будет соответствовать счетное множество λ_a и λ_p. Таким образом, каждому собственному значению ω_{*0} соответствует свое семейство пограничных функций. При этом, например, частоте $\overset{u}{\omega}_{*0n}$ будут соответствовать как

λ_a^u, так и λ_p^u, т.е. собственные колебания одного типа порождают в пограничном слое колебания и другого типа.

В верхней части таблицы приведены первые несколько значений λ_a для оболочки из стеклопластика 2:1 с характеристиками

$$\nu_{12} = 0.105, \quad \nu_{23} = 0.431, \quad \nu_{31} = 0.405$$

$$E_1 = 36 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad E_2 = 26.3 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad E_3 = 10.8 \cdot 10^3 \text{ МПа}$$

$$G_{12} = 4.9 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad G_{23} = 4 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad G_{13} = 4.4 \cdot 10^3 \text{ МПа}$$

а в нижней части – первые несколько значений λ_p для плоского пограничного слоя в случае ортотропной цилиндрической оболочки из того же материала; значения $\omega_{*0k}^u\,(u, v, w)$ определены формулой (2.12). Видно, что вещественные части показателей по абсолютной величине возрастают достаточно быстро, и в прикладных вычислениях можно ограничиться первыми несколькими корнями уравнений (6.10), (6.16).

Заметим, что при $s = 0$ значения λ_a для антиплоского пограничного слоя в случае ортотропной цилиндрической оболочки совпадают со значениями λ_a для ортотропной пластинки из того же материала [18].

Из данных таблицы следует, что при собственных колебаниях затухание в антиплоском пограничном слое быстрее, чем в плоском пограничном слое.

Построение приближений $s \geq 1$ для пограничного слоя можно осуществить подобным образом, но оно вряд ли представит существенный интерес в смысле приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
3. *Гольденвейзер А.Л.* О внутреннем и краевом расчетах тонких упругих тел // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 1019–1032.
4. *Гольденвейзер А.Л.* О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 134–149.
5. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. *Каплунов Ю.Д.* Интегрирование уравнений динамического погранслоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 148–160.
7. *Каплунов Ю.Д.* Колебания оболочек вращения при высокочастотном краевом возбуждении // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 151–159.
8. *Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 83–91.
9. *Агаловян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
10. *Агаловян Л.А.* О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости // Механика. Изд-во Ереван. ун-та, 1982. Вып. 2. С. 7–12.
11. *Агаловян Л.А.* К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера // Тр. 13-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Ч. 1. Таллин. 1983. С. 13–18.
12. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // Тр. 4-го симпоз. по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105–110.

13. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271–278.
14. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв. АН АрмССР. Механика. 1989. Т. 42. № 3. С. 28–36.
15. *Агаловян Л.А., Саркисян Л.С.* О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы // Тр. 18-й Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997. Т. 1. С. 30–38.
16. *Агаловян М.Л.* Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии // Докл. НАН Армении. 1996. Т. 96. № 2–4. С. 23–28.
17. *Агаловян Л.А.* К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 8–11.
18. *Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.* О частотах собственных колебаний и о пограничном слое для ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче // Изв. НАН Респ. Армении. Механика. 2001. Т. 54. № 2. С. 32–41.
19. *Агаловян Л.А.* Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд-во НАН Респ. Армении, 2002. С. 9–19.
20. *Агаловян Л.А.* Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел // Прикл. механика. 2002. Т. 38. № 7. С. 3–24.
21. *Green A.E.* On the linear theory of thin elastic shells // Proc. Roy. Soc. London. Ser A. 1962. V. 266. № 1325. P. 143–160.
22. *Nayfeh A.* Perturbation Methods. N.Y., etc.: Wiley, 1973 = *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
23. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Ереван
e-mail: aghal@mechins.sci.am
lusina@mail.ru

Поступила в редакцию
24.VI.2004