

УДК 539.3

© 2006 г. В. Н. Паймушин, В. И. Шалашилин

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ЗАДАЧАМ О НЕКЛАССИЧЕСКИХ ФОРМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРА

На основании кинематических соотношений [1] составлены геометрически нелинейные и линеаризованные уравнения теории безмоментных оболочек, использование которых в отличие от известных позволяет при решении конкретных задач избежать появления ложных точек бифуркаций. Рассматриваются неклассические задачи об устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем давлении, осевом сжатии и кручении, которые допускают постановку на основе составленных уравнений теории безмоментных оболочек. Найдены их точные аналитические решения, которые позволяют оценить качество полученных ранее соотношений [1] и содержательность построенных уравнений по сравнению с известными в механике тонких оболочек. Установлено, что большинство из выявленных новых форм потери устойчивости цилиндрических оболочек относится к числу сдвиговых, возникновение которых возможно раньше изгибных, хорошо к настоящему времени изученных, при малых значениях модуля сдвига материала оболочки с резко выраженной анизотропией свойств.

1. Непротиворечивые геометрически нелинейные и линеаризованные уравнения теории безмоментных оболочек. Предполагая, что срединная поверхность оболочки σ отнесена к ее линиям главных кривизн x^1, x^2 , введем обозначения: A_1, A_2 – параметры Ламе; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}$ – единичные векторы касательных и нормали к σ ; k_1, k_2 – кривизны координатных линий; $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + w\mathbf{m}$ – вектор перемещений точек σ .

При принятых обозначениях деформации удлинений ϵ_i и сдвиговая деформация $\sin\gamma_{12}$ в непротиворечивом квадратичном приближении [1] вычисляются по формулам

$$\epsilon_1 = e_{11} + (e_{12}^2 + \omega_1^2)/2, \quad \overrightarrow{1, 2} \quad (1.1)$$

$$\sin\gamma_{12} = 2\epsilon_{12} = (1 + e_{11})e_{21} + (1 + e_{22})e_{12} + \omega_1\omega_2 \quad (1.2)$$

где

$$e_{11} = \frac{1}{A_1}u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_1A_2}u_2 + k_1w \quad (1.3)$$

$$e_{12} = \frac{1}{A_1}u_{2,1} - \frac{A_{1,2}}{A_1A_2}u_1, \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1}w_{,1} - k_1u_1, \quad \overrightarrow{1, 2}$$

Составленным кинематическим соотношениям соответствует следующее выражение для вариации потенциальной энергии деформации:

$$\delta U = \iint_{\sigma} (T_{11}\delta\epsilon_1 + 2T_{12}\delta\epsilon_{12} + T_{22}\delta\epsilon_2)A_1A_2dx^1dx^2 =$$

$$= \iint_{\sigma} [S_{11}\delta e_{11} + S_{12}\delta e_{12} + S_{21}\delta e_{21} + S_{22}\delta e_{22} + S_{13}\delta\omega_1 + S_{23}\delta\omega_2]A_1A_2dx^1dx^2$$

где $(T_{21} \equiv T_{12})$

$$S_{11} = T_{11} + T_{12}e_{21}, \quad S_{12} = T_{11}e_{12} + T_{12}(1 + e_{22}), \quad \overrightarrow{1, 2} \quad (1.4)$$

$$S_{13} = T_{11}\omega_1 + T_{12}\omega_2, \quad \overleftarrow{1, 2} \quad (1.5)$$

Предположим, что края оболочки совпадают с координатными линиями $x^i = x_-^i, x_+^i$ ($i = 1, 2$) и на них заданы контурные усилия

$$\mathbf{P}_1 = p_{11}\mathbf{e}_1 + p_{12}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{P}_2 = p_{21}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2 \quad (1.6)$$

а в точках поверхности σ приложены поверхностные усилия, заданные вектором

$$\mathbf{P} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{m} \quad (1.7)$$

Вариация работы этих сил и вариация δU в соответствии с принципом возможных перемещений должны удовлетворять уравнению $\delta U - \delta A = 0$, которое после традиционных преобразований приводится к виду

$$\sum_{i=1}^2 \int_{x_-^{3-i}}^{x_+^{3-i}} [(S_{i1} - p_{i1})\delta u_1 + (S_{i2} - p_{i2})\delta u_2 + S_{i3}\delta w] A_{3-i} dx^{3-i} - \iint_{\sigma} (f_1\delta u_1 + f_2\delta u_2 + f_3\delta w) dx^1 dx^2 = 0 \quad (1.8)$$

Отсюда следуют уравнения равновесия

$$f_1 = (A_2 S_{11})_{,1} + (A_1 S_{21})_{,2} - A_{2,1} S_{22} + A_{1,2} S_{12} + A_1 A_2 (k_1 S_{13} + p_1) = 0, \quad \overrightarrow{1, 2} \quad (1.9)$$

$$f_3 = (A_2 S_{13})_{,1} + (A_1 S_{23})_{,2} - A_1 A_2 (k_1 S_{11} + k_2 S_{22} - p_3) = 0$$

для которых граничные условия составляются из условия равенства нулю контурных интегралов уравнения (1.8).

Следует отметить, что составленные уравнения отличаются от известных (например, [2]) лишь выражениями для S_{11}, S_{22} (1.4), которые согласованы с кинематическими соотношениями (1.1), (1.2).

Если материал оболочки линейно-упругий, то входящие в соотношения (1.4), (1.5) усилия T_{11}, T_{22}, T_{12} связаны с деформациями (1.1), (1.2) соотношениями упругости вида (обозначения общепринятые)

$$T_{11} = B_{11}(\epsilon_1 + \nu_{21}\epsilon_2), \quad T_{22} = B_{22}(\epsilon_2 + \nu_{12}\epsilon_1), \quad T_{12} = 2B_{12}\epsilon_{12} \quad (1.10)$$

где $B_{11} = E_1 t / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), B_{22} = E_2 t / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), B_{12} = G_{12} t$ – соответствующие жесткости, t – толщина оболочки.

Рассмотрим два равновесных состояния оболочки. Пусть первое из них, невозмущенное, характеризуется усилиями $T_{11}^0, T_{22}^0, T_{12}^0$. Введя стандартное предположение о том, что в первом состоянии оболочка напряжена, но не деформирована, проведя линеаризацию составленных нелинейных уравнений в окрестности невозмущенного состояния и сохраняя для параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) возмущенного состояния прежние обозначения, можно составить следующие линеаризованные уравнения возмущенного состояния:

$$\begin{aligned} f_1 &= (A_2 S_{11})_{,1} + (A_1 S_{21})_{,2} - A_{2,1} S_{22} + A_{1,2} S_{12} + A_1 A_2 k_1 S_{13} = 0, & \overrightarrow{1,2} \\ f_3 &= (A_2 S_{13})_{,1} + (A_1 S_{23})_{,2} - A_1 A_2 (k_1 S_{11} + k_2 S_{22}) = 0 & \overleftarrow{1,2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

в которых

$$S_{11} = T_{11} + T_{12}^0 e_{21}, \quad S_{12} = T_{11}^0 e_{12} + T_{12}^0 e_{22} + T_{12}, \quad S_{13} = T_{11}^0 \omega_1 + T_{12}^0 \omega_2, \quad \overrightarrow{1,2} \quad (1.12)$$

причем в отличие от соотношений (1.10)

$$T_{11} = B_{11}(e_{11} + \nu_{21} e_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(e_{22} + \nu_{12} e_{11}), \quad T_{12} = B_{12}(e_{12} + e_{21}) \quad (1.13)$$

2. Сдвиговые и другие неклассические формы потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки при внешнем давлении, осевом сжатии и кручении. Для цилиндрической оболочки радиуса R , отнесенной к осевой ($x^1 = x$) и окружной ($x^2 = \theta$) координатам, имеем

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 1/R$$

При указанных видах нагружения линейные уравнения безмоментной теории доставляют решения

$$T_{\theta}^0 = T_{22}^0 = -pR, \quad T_x^0 = T_{11}^0 = -p_{11}, \quad T_{x\theta}^0 = T_{12}^0 = p_{12} \quad (2.1)$$

где p – внешнее давление, p_{11} и p_{12} – погонные осевое сжимающее и крутящее усилия на торцах оболочки.

В рассматриваемом случае формулы (1.3) при введении обозначений $u_1 = u$, $u_2 = v$ принимают вид

$$e_{11} = u_{,x}, \quad e_{22} = \frac{v_{,\theta} + w}{R}, \quad e_{12} = v_{,x}, \quad e_{21} = \frac{u_{,\theta}}{R}, \quad \omega_1 = w_{,x}, \quad \omega_2 = \frac{w_{,\theta} - v}{R} \quad (2.2)$$

и при подстановке в соотношения (1.13) получим

$$\begin{aligned} T_x &= T_{11} = B_{11} \left(u_{,x} + \nu_{21} \frac{v_{,\theta} + w}{R} \right), & T_{\theta} &= T_{22} = B_{22} \left(\frac{v_{,\theta} + w}{R} + \nu_{12} u_{,x} \right) \\ T_{x\theta} &= T_{12} = B_{12} \left(v_{,x} + \frac{u_{,\theta}}{R} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В соответствии с соотношениями (2.1) рассмотрим три вида отдельного нагружения оболочки.

Внешнее давление ($T_{11}^0 = T_{12}^0 = 0$, $T_{22}^0 = T_{\theta}^0 = -pR$). Так как в рассматриваемом случае

$$S_{11} = T_x, \quad S_{22} = T_{\theta}, \quad S_{12} = T_{x\theta}, \quad S_{21} = T_{x\theta} - pR e_{21}, \quad S_{13} = 0, \quad S_{23} = -pR \omega_2 \quad (2.4)$$

то уравнения (1.11) принимают вид

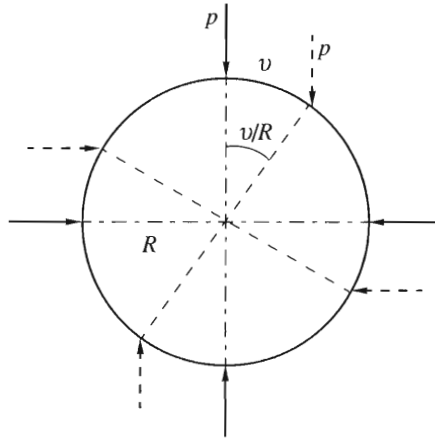
$$RT_{x,x} + T_{x\theta,\theta} - p u_{,\theta\theta} = 0, \quad T_{\theta,\theta} + RT_{x\theta,x} - p(w_{,\theta} - v) = 0, \quad T_{\theta} = 0 \quad (2.5)$$

Исключив из первого уравнения $T_{x\theta}$, получим

$$R^2 T_{x,xx} - R p u_{,x\theta\theta} + p(w_{,\theta} - v)_{,\theta} = 0 \quad (2.6)$$

Из физических соотношений (2.3) при учете равенства $T_{\theta} = 0$ следует

$$T_x = B_1 u_{,x}, \quad B_1 = B_{11}(1 - \nu_{21} \nu_{12}), \quad T_{x\theta} = B_{12}(v_{,x} + u_{,\theta}/R) \quad (2.7)$$



Фиг. 1

Рассмотрим сначала случай, когда оболочка в возмущенном состоянии сохраняет осесимметричную форму, т.е. когда неизвестные в уравнениях (2.5), (2.7) – функции только x . Тогда соотношения (2.5), (2.7) сводятся к следующим двум уравнениям (штрихом обозначена производная по x):

$$u'' = 0, \quad RB_{12}v'' + pv = 0 \tag{2.8}$$

Второе уравнение имеет общее решение

$$v = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx, \quad k^2 = pR/B_{12}$$

Появление смежных форм равновесия, когда $v \neq 0$, т.е. бифуркация решения становится возможной, когда

$$p = p_*^{(1)} = \pi^2(R/L^2)B_{12} = \pi^2 t(R/L^2)G_{12} \tag{2.9}$$

При этом в зависимости от условия закрепления краев возможны различные формы потери устойчивости (ФПУ). Если края закреплены так, что исключены окружные перемещения ($v(0) = v(L) = 0$), то

$$v = c_1 \sin(\pi x/L) \tag{2.10}$$

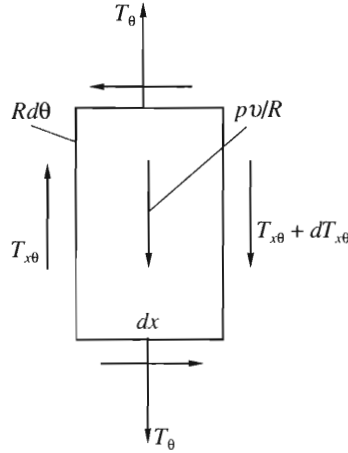
В этом случае среднее сечение оболочки ($x = L/2$) поворачивается относительно торцов на угол c_1/R . А при подвижных в окружном направлении торцах ($v'(0) = v'(L) = 0$)

$$v = c_2 \cos(\pi x/L) \tag{2.11}$$

При этой ФПУ один из торцов поворачивается относительно другого на угол $2c_2/R$.

Выявленная ФПУ оболочки объясняется особенностями поведения нагрузки, которая при возмущениях сохраняет свое направление, т.е. перестает быть нормальной к поверхности оболочки. На фиг. 1 такого вида нагрузки показаны сплошными стрелками в невозмущенном состоянии и штриховыми – в возмущенном, соответствующем окружному перемещению v . У такой нагрузки в возмущенном состоянии появляется окружная составляющая $p v/R$. На фиг. 2 показан элемент оболочки $dx \cdot R d\theta$, из условия равновесия которого в проекциях на окружное направление следует

$$dT_{x\theta} + p(v/R)dx = 0$$



Фиг. 2

Из соотношений (2.7) видно, что при такой деформации $T_{x\theta} = B_{12}v'$. В результате приходим ко второму уравнению (2.8).

Исследуем теперь случай, когда

$$u = U(x) \cos \theta, \quad v = V(x) \sin \theta, \quad w = W(x) \cos \theta \quad (2.12)$$

Сначала рассмотрим случай, когда U , V , W – постоянные по x . Тогда из второго и третьего уравнений (2.5) следует, что

$$W = -V$$

Из соотношений (2.7) получим, что $T_{x\theta} = B_{12}u_{,\theta}/R$. Поэтому первое уравнение (2.5) сводится к равенству

$$(B_{12}/R - p)u_{,\theta\theta} = 0$$

Отсюда следует выражение для критического давления

$$p_*^{(2)} = B_{12}/R = G_{12}t/R \quad (2.13)$$

Соответствующая ФПУ при таком закреплении торцов, когда $W = V = 0$, показана на фиг. 3, а.

В общем случае, когда U , V и W переменны, из соотношений (2.7) получим

$$T_{x\theta} = B_{12}(V' + U/R), \quad T_x = B_1U'$$

Так как $T_\theta = 0$, то из выражений (2.3) и (2.12) следует

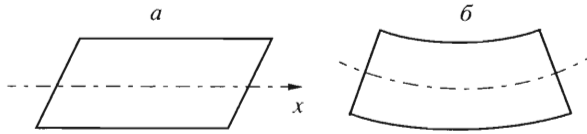
$$W + V = -Rv_{12}U' \quad (2.14)$$

Поэтому уравнения (2.5) сводятся к виду

$$B_1RU''' + p(1 + v_{12})U' = 0, \quad V'' + (1/R - pv_{12}/B_{12})U' = 0 \quad (2.15)$$

При условии

$$U(L/2) = 0, \quad U'(0) = U'(L) = 0 \quad (2.16)$$



Фиг. 3

первое уравнение (2.15) имеет нетривиальное решение

$$U = C \sin(\pi x/L) \tag{2.17}$$

при

$$p = p_*^{(3)} = \pi^2 B_1 R / [(1 + \nu_{12}) L^2] \tag{2.18}$$

В этом случае, как следует из равенства (2.14),

$$W + V = -C \nu_{12} \pi (R/L) \cos(\pi x/L) \tag{2.19}$$

Соответствующая ФПУ показана на фиг. 3, б. Подобная ФПУ была обнаружена ранее [3] при анализе устойчивости полосы.

Второе уравнение (2.15) также имеет нетривиальное решение $U \neq 0$ при $V = 0$, когда

$$p = p_*^{(4)} = \nu_{12} B_{12} / R \tag{2.20}$$

Но так как $\nu_{12} < 1$, то $p_*^{(4)} < p_*^{(2)}$, и такая ФПУ не может быть реализована.

Равномерное осевое сжатие ($T_{11}^0 = T_x^0 = -q$, $T_{22}^0 = T_{12}^0 = 0$). В этом случае уравнения (1.11) принимают вид

$$RT_{x,x} + T_{x\theta,\theta} = 0, \quad T_{\theta,\theta} + RT_{x\theta,x} - Rqv_{,xx} = 0, \quad T_\theta + Rqw_{,xx} = 0 \tag{2.21}$$

Ограничимся рассмотрением случаев, когда функции имеют нулевую изменчивость в окружном направлении, т.е. когда

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = w(x) \tag{2.22}$$

Тогда второе уравнение (2.21) вместе с последним соотношением (2.3) принимает вид

$$T'_{x\theta} - qv'' = 0, \quad T_{x\theta} = B_{12}v'$$

Отсюда получим уравнение

$$(B_{12} - q)v'' = 0$$

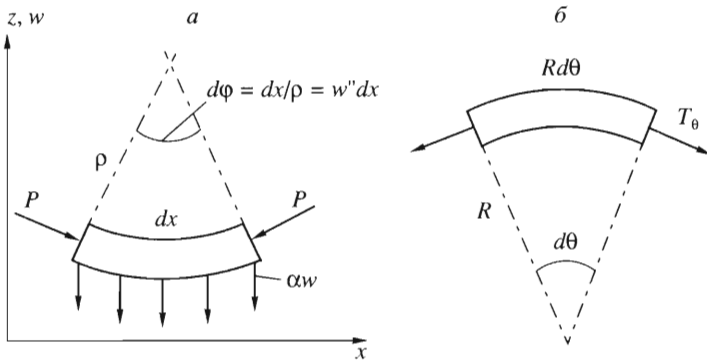
которое имеет нетривиальное решение при

$$q = q_*^{(1)} = B_{12}, \quad \text{или} \quad \sigma_x^* = G_{12} \tag{2.23}$$

При такой ФПУ, если один из торцов оболочки фиксирован так, что исключены окружные перемещения, то второй поворачивается относительно него, оставаясь параллельным ему. Эта ФПУ аналогична сдвиговой потере устойчивости полосы при равномерном поперечном сжатии, только в этом случае полоса как бы свернута в кольцо.

Первое и последнее уравнения (2.21) сводятся к виду

$$T'_x = 0, \quad T_\theta + Rqw'' = 0 \tag{2.24}$$



Фиг. 4

Из первого уравнения (2.24) при учете равновесия оболочки в проекциях на ее ось следует, что $T_x = 0$. Поэтому из первого соотношения (2.3) вытекает, что $u_x = -v_{21}w/R$. Тогда из второго соотношения (2.3) получим

$$T_\theta = B_2 w/R; \quad B_2 = B_{22}(1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

и второе уравнение (2.24) принимает вид

$$R^2 q w_{,xx} + B_2 w = 0 \quad (2.25)$$

Это уравнение показывает, что смежные формы равновесия вида

$$w = c \sin(\pi x/L) \quad (2.26)$$

появляются у оболочки при

$$q = q_*^{(2)} = B_2 L^2 / (\pi^2 R^2) \quad (2.27)$$

Этот результат легко понять, если рассмотреть устойчивость безмоментного стержня на упругом винклеровском основании, элемент которого в возмущенном состоянии показан на фиг. 4, а роль сил взаимодействия стержня с основанием играют окружающие усилия. Из условия равновесия элемента следует

$$P w'' + \alpha w = 0$$

Здесь α – коэффициент постели основания. Смежные формы равновесия (2.26) появляются при

$$P = P_* = \alpha L^2 / \pi^2 \quad (2.28)$$

Если в качестве стержня рассмотреть элементарную продольную полосу безмоментной оболочки шириной $R d\theta$, поперечное сечение которой показано на фиг. 4, б, то $P = q R d\theta$; следовательно,

$$\alpha w = T_\theta d\theta = B_2 (w/R) d\theta$$

После подстановки α и P из этих соотношений в равенство (2.28) приходим к формуле (2.27).

Чистое кручение оболочки ($T_{11}^0 = T_{22}^0 = 0$, $T_{12}^0 = s$). В этом случае при нулевой изменчивости в окружном направлении, т.е. когда справедливы представления (2.22), уравнения (1.11) принимают вид

$$R T_x' = 0, \quad R T_{x\theta}' + 2s w' = 0, \quad T_\theta + 2s v' = 0 \quad (2.29)$$

Из первого уравнения (2.29) и условия равновесия оболочки в проекциях на ось x следует, что $T_x = 0$. Поэтому из соотношений (2.3) получим

$$u' + \nu_{21} w/R = 0 \tag{2.30}$$

Второе и третье уравнения (2.29) при учете соотношений (2.3) сводятся к виду

$$B_{12} R v'' + 2s w' = 0, \quad B_{22}(w/R + \nu_{12} u') + 2s v' = 0 \tag{2.31}$$

Исключая из этих уравнений с помощью равенства (2.30) u и w , приходим к уравнению

$$(B_2 B_{12} - 4s^2) v'' = 0$$

Нетривиальное решение этого уравнения при $v(0) = 0$ имеет вид

$$v = Cx$$

и возможно при

$$s = s_* = \sqrt{B_2/B_{12}}/2 \tag{2.32}$$

При этом, как видно из равенства (2.30) и первого уравнения (2.31), перемещения u и w определяются соотношениями

$$u = \nu_{21}(w/R)cx, \quad w = -c\sqrt{B_{12}/B_2} \tag{2.33}$$

если $u(0) = 0$.

Как видно из этих соотношений, форма потери устойчивости при кручении является чисто сдвиговой.

3. Упрощенные варианты геометрически нелинейной теории безмоментных оболочек и анализ возможности описания ими чисто сдвиговых ФПУ при различных вариантах нагружения. *Нелинейная теория среднего изгиба.* В практических приложениях наиболее часто применяемым вариантом нелинейной теории тонких оболочек является так называемая теория среднего изгиба оболочек [3], в рамках которой тангенциальные деформации срединной поверхности определяются по формулам

$$\varepsilon_1 = e_{11} + \omega_1^2/2, \quad \varepsilon_2 = e_{22} + \omega_2^2/2, \quad 2\varepsilon_{12} = e_{12} + e_{21} + \omega_1 \omega_2 \tag{3.1}$$

а выражения для изгибных деформаций оболочек используются в геометрически линейном приближении.

При использовании вместо соотношений (1.1), (1.2) выражений (3.1) запишем равенства (1.4) в виде

$$S_{11} = T_{11}, \quad S_{22} = T_{22}, \quad S_{12} = S_{21} = T_{12} \tag{3.2}$$

в то время как формулы (1.5) остаются без изменений.

В силу равенств (3.2) уравнения равновесия (1.9) упрощаются. Из них следуют линейризованные уравнения возмущенного состояния

$$\begin{aligned} f_1 &= (A_2 T_{11})_{,1} + (A_1 T_{12})_{,2} - A_{2,1} T_{22} + A_{1,2} T_{12} + A_1 A_2 k_1 S_{13} = 0, & \overrightarrow{1, 2} \\ f_3 &= (A_2 S_{13})_{,1} + (A_1 S_{23})_{,2} - A_1 A_2 k_1 T_{11} + k_2 T_{22} = 0 & \overleftarrow{1, 2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

в которых усилия определены по формулам (1.12) для S_{ij} и (1.13) для T_{ij} .

С целью исследования качества составленных уравнений проведем анализ сформулированных на их основе задач, изученных в разд. 2 исходя из более общих уравнений.

Внешнее давление. В силу равенств (3.2), дополненных равенствами

$$S_{13} = 0, \quad S_{23} = T_{22}^0 \omega_2 = -pR\omega_2$$

вместо уравнений (2.5) будем иметь упрощенные уравнения

$$\begin{aligned} f_1 = L_1(u, v, w) = 0, \quad f_2 = L_2(u, v, w) - \tilde{p}R\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) = 0 \\ f_3 = L_3(u, v, w) - \tilde{p}R\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = 0; \quad \tilde{p} = \frac{p}{B_{22}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$L_1(u, v, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + g_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (v_{21} + g_1) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \theta} + v_{21} \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

$$L_2(u, v, w) = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + g_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + (v_{12} + g_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$L_3(u, v, w) = -\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w + v_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta}\right); \quad g_1 = \frac{B_{12}}{B_{11}}, \quad g_2 = \frac{B_{12}}{B_{22}}$$

При $\partial/\partial \theta = 0$ решениями уравнений (3.4), как нетрудно показать, определяются бифуркационное значение нагрузки (2.9) и сдвиговые формы потери устойчивости (2.10) и (2.11).

Если входящие в уравнения (3.4) функции представить в вид

$$u = U \sin n\theta, \quad v = V \cos n\theta, \quad w = W \sin n\theta \quad (3.5)$$

то приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} U'' - g_1 U - (v_{21} + g_1) V' + v_{21} W' &= 0 \\ (1 - \tilde{p}R)(W - V) + g_2 V'' + (v_{12} + g_2) U' &= 0 \\ (1 - \tilde{p}R)(W - V) + v_{12} U' &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из них при нулевой изменяемости функций в осевом направлении следует лишь одно бифуркационное значение нагрузки

$$p_*^{(3)} R = B_{22} \quad (3.7)$$

в то время как из неупрощенных уравнений следуют два бифуркационных значения, определяемые по формулам (2.13) и (3.7), причем $p_*^{(2)} < p_*^{(3)}$. Кроме того, следует отметить, что формула (2.13), полученная при строгой постановке задачи, имеет ясный физический смысл, в то время как механизм реализации потери устойчивости при функциях $u_0 = 0, w_0 = -v_0 = \text{const}$, т.е. когда

$$u \equiv 0, \quad w = w_0 \sin \theta, \quad v = -w_0 \cos \theta \quad (3.8)$$

и бифуркационное значение нагрузки по формуле (3.7) вообще не поддаются физическому объяснению.

Если отказаться от предположения о нулевой изменяемости функций U, V, W в осевом направлении и представить решение в виде

$$U = u_0 \cos \lambda \eta, \quad V = v_0 \sin \lambda \eta, \quad W = w_0 \sin \lambda \eta; \quad \lambda = \pi R/L$$

то приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} & -(\lambda^2 + g_1)u_0 - (v_{21} + g_1)\lambda v_0 + v_{21}\lambda w_0 = 0 \\ & -(v_{12} + g_2)\lambda u_0 - (1 - mg_2 + g_2\lambda^2)v_0 + (1 - mg_2)w_0 = 0 \\ & -v_{12}\lambda u_0 - (1 - mg_2)v_0 + (1 - mg_2)w_0 = 0; \quad m = p/R \end{aligned} \quad (3.9)$$

Можно показать, что нетривиальное решение системы (3.9) существует при бифуркационном значении нагрузки p , определяемом по формуле

$$p_*^{(4)} = E_2 t / R \quad (3.10)$$

Данный результат принципиально отличается от результатов, следующих из аналогичных упрощенных уравнений, и не поддается какому-либо физическому объяснению.

Осевое сжатие. Так как в рамках используемой модели справедливы равенства (3.2), дополненные равенствами

$$S_{13} = T_{11}^0 \omega_1, \quad S_{23} = 0$$

то в рассматриваемом случае вместо уравнений (3.4) приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} f_1 = L_1(u, v, w) = 0, \quad f_2 = L_2(u, v, w) = 0 \\ f_3 = L_3(u, v, w) - \tilde{q} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0; \quad \tilde{q} = \frac{q}{B_{22}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

При нулевой изменяемости функций в окружном направлении составленные уравнения (3.11) принимают вид

$$U'' + v_{21}W' = 0, \quad g_2V'' = 0, \quad \tilde{q}W'' + W + v_{12}U' = 0 \quad (3.12)$$

Из первых двух уравнений (3.12) следует, что

$$V \equiv 0, \quad U' = -v_{21}W$$

Поэтому последнее уравнение (3.12) преобразуется к виду

$$W'' + k^2W = 0, \quad k^2 = E_2 t / q$$

Можно показать, что общее решение последнего уравнения при наложении условия $w(\eta = 0) = 0$ доставляет форму потери устойчивости

$$w = c_1 \sin k \eta \quad (3.13)$$

и бифуркационное значение нагрузки (2.27).

Чистое кручение. В рамках используемой модели для усилий имеем формулы (3.2), дополненные равенствами

$$S_{13} = s \omega_2, \quad S_{23} = s \omega_1$$

при использовании которых уравнения устойчивости (3.4) запишем в виде

$$\begin{aligned} f_1 = L_1(u, v, w) = 0, \quad f_2 = L_2(u, v, w) + \tilde{s} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \\ f_3 = L_3(u, v, w) + 2\tilde{s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0; \quad \tilde{s} = \frac{s}{B_{22}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Можно убедиться, что решение уравнений (3.14) для случая нулевой изменяемости функций в окружном направлении доставляет бифуркационное значение нагрузки

$$s = s_* = t\sqrt{G_{12}E_2/2} \quad (3.15)$$

в два раза завышенное по сравнению со значением (2.32).

Уравнения, соответствующие использованию кинематических соотношений в неполном квадратичном приближении. Если для определения деформации сдвига вместо (1.2) использовать упрощенное соотношение

$$\gamma_{12} = e_{21} + e_{12} + \omega_1\omega_2 \quad (3.16)$$

то для входящих в уравнения (1.9) усилий вместо формул (1.4) приходим к формулам

$$S_{11} = T_{11}, \quad S_{12} = T_{12} + T_{11}e_{12}, \quad \overrightarrow{1, 2} \quad (3.17)$$

в то время как формулы (1.5) остаются без изменений.

В силу равенств (3.17) усилия, входящие в линеаризованные уравнения возмущенного состояния (1.11), будут определяться по формулам

$$S_{11} = T_{11}, \quad S_{12} = T_{11}^0 e_{12} + T_{12}, \quad S_{13} = T_{11}^0 \omega_1 + T_{12}^0 \omega_2, \quad \overrightarrow{1, 2} \quad (3.18)$$

Исследование составленных уравнений показало, что при внешнем давлении и осевом сжатии они приводят к тем же результатам, что и указанные в разд. 2. Однако при чистом кручении их решение приводит, как и выше, к формуле (3.15), в два раза завышающей бифуркационное значение s_* , определяемое по формуле (2.32).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00535а, 03-01-00071).

ЛИТЕРАТУРА

1. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций // ПММ. 2005. Вып. 5. С. 861–881.
2. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.

Казань
e-mail: dsm@dsm.kstu-kai.ru

Поступила в редакцию
15.VI.2004