УДК 62–50

© 2005 г. А. И. Благодатских

О МЯГКОМ УБЕГАНИИ ГРУППЫ СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ

Рассматривается задача группового преследования группы убегающих, использующих одинаковое управление, причем маневренность убегающих выше. Построено позиционное управление, обеспечивающее мягкое убегание (т.е. несовпадение геометрических координат, скоростей, ускорений и т.д.) всех убегающих.

Задачи уклонения одного убегающего, обладающего большей маневренностью, при дискриминации преследователей рассматривались ранее [1, 2]. При условии дискриминации убегающего были представлены [3, 4] задачи группового преследования разнотипными объектами одного убегающего. Предлагаемая работа обобщает результаты, полученные ранее [5] для простых движений убегающих, на случай более общих движений.

1. Постановка задачи. В пространстве R^ν ($\nu \ge 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = 0$)

$$\begin{gathered} x_i^{(p)} = u_i, \quad \|u_i\| \le 1; \quad y_j^{(q)} = \upsilon, \quad \|\upsilon\| \le \gamma, \quad \gamma \in (0, 1), \quad p > q \ge 1 \\ x_i^{(\alpha)}(0) = X_i^\alpha, \quad \alpha \in P, \quad y_j^\beta(0) = Y_j^\beta; \quad X_i^\beta \ne Y_j^\beta, \quad \beta \in Q \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь и всюду далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad c = 1, 2$$

$$P = \{0, 1, \ldots, p-1\}, \quad Q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$$

Определение 1. Управления $u_i(t)$, $\upsilon(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие ограничениям из (1.1) называются допустимыми.

Определение 2. В игре Γ происходит мягкое убегание, если для любых допустимых управлений $u_i(t)$ найдется допустимое управление

$$\upsilon(t) = \upsilon(t, x_i^{(\alpha)}(t), \alpha \in P, y_j^{(\beta)}(t), \beta \in Q)$$

такое, что

$$x_i^{(\beta)}(t) \ne y_j^{(\beta)}(t), \quad \beta \in Q \text{ для всех } t \in [0, \infty)$$

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент времени $t \ge 0$ по величинам $\{x_i^{(\alpha)}(t), \alpha \in P, y_j^\beta(t), \beta \in Q\}$ для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $\upsilon(t)$

2. Случай m = 1. Построим допустимое управление $\upsilon(t)$, обеспечивающее мягкое убегание в задаче с одним убегающим E_1. В этом разделе опустим индекс $j = 1$ в соотношениях (1.1).

Из возможности мягкого убегания для $\nu = 2$, т.е. плоскости, следует возможность мягкого убегания и при $\nu > 2$. Действительно, если $\nu > 2$, то выберем плоскость Π такую, что $\Pi(X_i^\beta) \neq \Pi(Y^\beta)$, $\beta \in Q$, где под $\Pi(z)$ понимается проекция точки $z \in R^\nu$ на плоскость П. Такая плоскость найдется в силу конечности числа преследователей n. Если задача мягкого убегания проекций убегающих от проекций преследователей разрешима, то тем самым разрешима и исходная задача. Далее в этом разделе считаем $\nu = 2$.

Через z_c будем обозначать c-координату вектора $z \in R^\nu$.

Для всех $t \geq 0$ определим функции

$$l_c(t)\{e_c(t)\} - \text{количество } \ \alpha \in I : x_{c\alpha}^{(q-1)}(t) < \{=\} y_c^{(q-1)}(t)$$

и введем положительные постоянные δ_c, ρ_c, γ_c такие, что

$$\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \leq \gamma, \quad \gamma_c = \delta_c + 2\rho_c n + \rho_c/4, \quad \delta_c - \rho_c/4 > 0 \tag{2.1}$$

Для каждого момента $t \in [0, \infty)$ определим множество

$$\Omega_c(t) = \{\delta_c + 2\rho_c l_c(t) + 2\rho_c k, k = 0, 1, \ldots, e_c(t)\}$$

и величину $\omega_c(t) \in \Omega_c(t)$ следующим образом: если $e_c(t) = 0$, то $\omega_c(t) = \delta_c + 2\rho_c l_c(t)$; если $e_c(t) \geq 1$, то $\omega_c(t)$ определяется из условия

$$\min_{\alpha \in E_c(t)} \{|\omega_c(t) - x_{c\alpha}^{(q)}(t)|\} = \max_{\omega \in \Omega_c(t)} \min_{\alpha \in E_c(t)} \{|\omega - x_{c\alpha}^{(q)}(t)|\} \geq \rho_c \tag{2.2}$$

где $E_c(t) = \{\beta \in I : x_{c\beta}^{(q-1)}(t) = y_c^{(q-1)}(t)\}$; следовательно, $|E_c(t)| = e_c(t)$.

Оценка (2.2) следует из известного результата ([5], лемма 2.1).

Для определенности: если существует несколько значений $\omega_c(t)$, то возьмем максимальное из них. Таким образом, для всех $t \geq 0$ величина $\omega_c(t)$ определена однозначно и

$$\omega_c(t) \in \Omega_c^* = \{\delta_c + 2\rho_c k, k = 0, 1, \ldots, n\} \tag{2.3}$$

Обозначим через $\mathcal{D}(o, \rho)$ шар радиуса ρ с центром в точке o. Введем также обозначения

$$a^{[k]} = \frac{a^k}{k!}, \quad \overset{x}{\sum_{ir}}(t, T) = \sum_{k=0}^{p-r-1} x_i^{(r+k)}(t)T^{[k]}, \quad \overset{y}{\sum_{r}}(t, T) = \sum_{k=0}^{q-r-1} y^{(r+k)}(t)T^{[k]}$$

Лемма 1. Для всех $t \geq 0$, $T > 0$ и $r \in Q$ справедливо следующее:

1) область достижимости $x_i^{(r)}$ в момент $t + T$ совпадает с множеством

$$\mathcal{D}\left(\overset{x}{\sum_{ir}}(t, T), T^{[p-r]}\right)$$

2) пусть $\upsilon_c(\tau) = \upsilon_c(t)$ для всех $\tau \in [t, t+T]$, тогда

$$y_c^{(r)}(t+T) = \overset{y}{\sum_{cr}}(t, T) + \upsilon_c(t)T^{[q-r]}$$

Определим функции $T_{cir}(t) \geq 0$ как время, через которое впервые могут совпасть c-координаты $x_i^{(r)}$ и $y^{(r)}$, т.е. может выполниться равенство

$$\Delta_{ci}^{(r)}(t + T_{cir}(t)) = 0, \text{ где } \Delta_i(t) = y(t) - x_i(t)$$

при условии, что $\upsilon_c(\tau) = \upsilon_c(t)$ для всех $\tau \in [t, \infty)$. Из леммы 1 следует, что для всех $t \in \in [0, \infty)$ и $r \in Q$ значение $T_{cir}(t)$ определяется как минимальный неотрицательный (относительно T) корень многочлена

$$-\operatorname{sign}(\Delta_{ci}^{(r)}(t))T^{[p-r]} - \sum_{k=q-r+1}^{p-r-1} x_{ci}^{(r+k)}(t)T^{[k]} +$$

$$+(\upsilon_c(t) - x_{ci}^{(q)}(t))T^{[q-r]} + \sum_{k=1}^{q-r-1} \Delta_{ci}^{(r+k)}(t)T^{[k]} + \Delta_{ci}^{(r)}(t) = 0 \qquad (2.4)$$

Такой корень существует, так как уравнение (2.4) представимо в виде

$$T^{p-r} + a_1T^{p-r-1} + \ldots + a_{p-r-1}T = a_{p-r}, \text{ где } a_{p-r} \geq 0$$

Пусть

$$T_{cr}(t) = \min\{T_{c1r}(t), T_{c2r}(t), \ldots, T_{cnr}(t)\} \qquad (2.5)$$

Для всех $t \in [0, \infty)$ и $r \in Q$ определим функции

$$\xi_{cir}^{\pm}(t) = \sum_{cr}^{y}(t, T_{cir}(t)) + \left(\upsilon_c(t) \pm \frac{\rho_c}{8}\right)T_{cir}^{[q-r]}(t) - \sum_{cir}^{x}(t, T_{cir}(t)) \mp T_{cir}^{[p-r]}(t)$$

$$K_{cir}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } \Delta_{ci}^{(r)}(t) < 0 \text{ и } \xi_{cir}^{+}(t) \geq 0 \\ -1, \text{ если } \Delta_{ci}^{(r)}(t) > 0 \text{ и } \xi_{cir}^{-}(t) \leq 0 \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases} \qquad (2.6)$$

Лемма 2. Пусть убегающий E_1 использует произвольное постоянное управление. Тогда для любого допустимого управления $u_i(t)$ преследователя P_i и $r \in Q$ справедливы следующие утверждения.

1°. Если для $t > 0$ и некоторого $\sigma > 0$ при $\tau \in [t - \sigma, t)$

$$\Delta_{ci}^{(r)}(\tau) < 0\{>0\}, \quad \Delta_{ci}^{(r)}(t) = 0, \quad \Delta_{di}^{(r)}(\tau) \neq 0, \quad \Delta_{di}^{(r)}(t) \neq 0 \qquad (2.7)$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что для $\tau \in [t - \varepsilon, t)$

$$K_{cir}(\tau) = 1\{=-1\}, \quad T_{dir}(\tau) > T_{cir}(\tau), \quad d \in \{1, 2\}\backslash\{c\}$$

2°. Если для $t > 0$ и некоторого $\sigma > 0$ при $\tau \in [t - \sigma, t)$

$$\Delta_{ci}^{(r)}(\tau) \neq 0, \quad \Delta_{i}^{(r)}(t) = 0$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что для $\tau \in [t - \varepsilon, t)$

$$K_{1ir}(\tau) \neq 0, \quad T_{2ir}(\tau) \geq T_{1ir}(\tau) > 0 \text{ или } K_{2ir}(\tau) \neq 0, \quad T_{1ir}(\tau) \geq T_{2ir}(\tau) > 0$$

Доказательство. Из соотношения (2.4) и условий леммы следует непрерывность функций $T_{1ir}(\tau)$, $T_{2ir}(\tau)$ для всех $\tau \in [0, \infty)$.

1°. Пусть выполнены соотношения (2.7) при выборе в первом из них знака "меньше". В этом случае $T_{cir}(t) = 0$, $T_{dir}(t) > 0$ и, учитывая непрерывность этих функций, получаем, что существует $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$T_{dir}(\tau) > T_{cir}(\tau), \quad \frac{\rho_c}{8} \geq 2\frac{(q-r)!}{(p-r)!}T_{cir}^{p-q}(\tau), \quad \tau \in [t - \varepsilon, t)$$

Из определения (2.6) следует, что $K_{cir}(\tau) = 1$, $\tau \in [t - \varepsilon, t)$, если $\xi^{+}_{cir}(\tau) \geq 0$, что эквивалентно неравенству

$$\left(\left(\sum_{cr}^{y}(\tau, T_{cir}(\tau)) + \upsilon_c(\tau)T_{cir}^{[q-r]}(\tau)\right) - \left(\sum_{cir}^{x}(\tau, T_{cir}(\tau)) - T_{cir}^{[p-r]}(\tau)\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{\rho_c}{8} - 2\frac{(q-r)!}{(p-r)!}T_{cir}^{p-q}(\tau)\right)T_{cir}^{[q-r]}(\tau) \geq 0$$

которое выполнено, так как первое слагаемое равно нулю в силу определения функции $T_{cir}(\tau)$, а второе неотрицательно по выбору ε. Оставшийся случай рассматривается аналогично.

2°. $T_{cir}(\tau) > 0$, $\tau \in [t - \sigma, t)$, $T_{cir}(t) = 0$, учитывая непрерывность этих функций: существует $\varepsilon \in (0, \sigma]$, такое, что для всех $\tau \in [t - \varepsilon, t)$

$$\left(\frac{\rho_c(p-r)!}{16(q-r)!}\right)^{1/(p-q)} \geq T_{\alpha ir}(\tau) \geq T_{\beta ir}(\tau) > 0; \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1 \text{ или } \alpha = 1, \quad \beta = 2$$

Аналогично утверждению 1 для таких ε доказывается, что $K_{cir}(\tau) \neq 0$ при $\tau \in [t - \varepsilon, t)$.

Для всех $t \geq 0$ и $r \in Q$ определим функции

$$J_{cir}(t) = \min\{T_{d\alpha\beta}(t) : (d, \alpha, \beta) \in \{1, 2\} \times I \times Q \text{ и } (d, \alpha, \beta) \neq (c, i, r)\}$$

$$B_{cir}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } K_{cir}(t) \neq 0, \quad J_{cir}(t) \geq T_{cir}(t) = T_{cr}(t) \\ B_{1\alpha\beta}(t) = B_{2\alpha\beta}(t) = 0, \text{ а при } c = 2 \text{ и } B_{1\alpha r}(t) = 0 \\ \text{для всех } \alpha \in I, \quad \beta \in \{r+1, r+2, \ldots, q-1\} \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Из леммы 2 следует, что в каждый момент $t \geq 0$, при фиксированном i не более чем одна из $2q$-функций B_{cir} обращается в единицу.

Определяем функции $\upsilon_c(t)$ следующим образом:

$$\upsilon_c(t) = \begin{cases} \omega_c(\tau^c_{2b}), & t \in [\tau^c_{2b}, \tau^c_{2b+1}) \\ \omega_c(\tau^c_{2b+1}) + K_{c\alpha r}(\tau^c_{2b+1})\rho_c/4, & t \in [\tau^c_{2b+1}, \tau^c_{2b+2}) \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\tau^c_{2b+1} \geq \tau^c_{2b}$ – момент, когда впервые найдутся $\alpha \in I$, $r \in Q$ такие, что

$$B_{c\alpha r}(\tau^c_{2b+1}) = 1, \quad \upsilon_d(\tau^c_{2b+1}) \in \Omega^*_d \tag{2.9}$$

а $\tau^c_{2b+2} > \tau^c_{2b+1}$ – момент, когда впервые, хотя бы для одного $\beta \in I$,

$$\Delta^{(r)}_{c\beta}(\tau^c_{2b+2}) = 0 \tag{2.10}$$

Здесь $\tau^c_0 = 0$, $d \in \{1, 2\}\backslash\{c\}$, $b = 0, 1, 2, \ldots$ и, для определенности: если найдется несколько $\alpha \in I$, удовлетворяющих свойству (2.9), то возьмем минимальное из них.

Определим последовательность t^c_b : $t^c_0 = 0$; $\tau^c_{2k+1} > t^c_{b-1}$ – момент, когда впервые в алгоритме (2.8)–(2.10) $r = q - 1$, тогда $t^c_b = \tau^c_{2k+2}$ $(b = 1, 2, \ldots)$.

Везде далее считаем, что управление $\upsilon(t) = (\upsilon_1(t), \upsilon_2(t))^T$ и последовательность $\{\tau^c_b\}^{b_c}_{b=0}$ определены согласно алгоритму (2.8)–(2.10), причем либо $b_c < \infty$, либо $b_c = \infty$, а последовательность $\{t_b^c\}_{b=0}^{b_c^*} \subset \{\tau_b^c\}_{b=0}^{b_c}$ определена как описано выше, причем либо $b_c^* < \infty$, либо $b_c^* = \infty$.

Лемма 3. Для любых допустимых управлений $u_i(t)$ справедливы следующие утверждения.

1°. Если $b_c \geq 2$, тогда $\{\tau_{2b}^1\}_{b=1}^{b_1^2} \cap \{\tau_{2b}^2\}_{b=1}^{b_2^2} = \varnothing$ и $\Delta_{ci}^{(r)}(t) \neq \varnothing$ для всех $r \in Q$, $t \in (\tau_{2b}^c, \tau_{2b+2}^c)$, $b = 0, 1, \ldots, b_c^2 - 1$, где $b_c^2 = \text{entier}[b_c/2]$.

2°. Справедливо включение $\upsilon_c(\tau) \in [\delta_c - \rho_c/4, \gamma_c]$, где $\tau \in \{\tau_b^c\}_{b=0}^{b_c}$.

3°. Если $b_c = \infty$, то и $b_c^* = \infty$.

4°. $\upsilon_c(t_b^c) - \rho_c/4 \leq \upsilon_c(t) \leq \upsilon_c(t_b^c) + \rho_c/4$ для всех $t \in [t_b^c, t_{b+1}^c)$.

Доказательство. Утверждение 1° следует из известного результата ([5], лемма 3.2).

Утверждение 2° следует из того, что согласно соотношениям (2.3) и (2.8)–(2.10)

$$\upsilon_c(\tau_{2b}^c) \in \Omega_c^* \subset [\delta_c, \delta_c + 2\rho_c n], \quad \upsilon_c(\tau_{2b+1}^c) = \upsilon_c(\tau_{2b}^c) \pm \rho_c/4 \in [\delta_c - \rho_c/4, \gamma_c]$$

Докажем утверждение 3°. Если $q = 1$, тогда $\{t_b^c\}_{b=0}^{b_c^*} = \{\tau_{2b}^c\}_{b=0}^{\infty}$, откуда $b_c^* = \infty$. Пусть $q = 2$. Предположим, что вопреки утверждению $b_c = \infty$, $b_c^* < \infty$; тогда найдется номер N, такой, что при любом $b \geq N$ имеем $B_{c\alpha 1}(\tau_{2b+1}^c) = 0$, $\alpha \in I$ и, хотя бы для одного $\beta \in I$, $B_{c\beta 0}(\tau_{2b+1}^c) = 0$. Из утверждения 1° следует, без потери общности, что найдется номер $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, такой, что для всех $t \geq \tau_{2(N+1)}^c$

$$\dot{x}_{c1}(t), \dot{x}_{c2}(t), \ldots, \dot{x}_{ck}(t) < \dot{y}_c(t) < \dot{x}_{ck+1}(t), \dot{x}_{ck+2}(t), \ldots, \dot{x}_{cn}(t)$$

Из последнего следует существование номера M такого, что для всех $t \geq \tau_{2(N+M)}^c$

$$x_{c1}(t), x_{c2}(t), \ldots, x_{ck}(t) < y_c(t) < x_{ck+1}(t), x_{ck+2}(t), \ldots, x_{cn}(t)$$

Объединяя два неравенства для $t \geq \tau_{2(N+M)}^c$, получим, что $b_c < \infty$. Это противоречие завершает доказательство. Случай $q \geq 3$ рассматривается аналогично.

Докажем утверждение 4°. Пусть

$$t_b^c = \tau_{2N}^c \leq \tau_{2N+1}^c < \tau_{2(N+1)}^c \leq \tau_{2(N+1)+1}^c < \ldots < \tau_{2(N+M)}^c = t_{b+1}^c$$

Тогда, применяя утверждение 1° и алгоритм (2.8)–(2.10), получим

$$\upsilon_c(t_b^c) = \upsilon_c(\tau_{2N}^c), \quad \upsilon_c(\tau_{2N+1}^c) = \upsilon_c(t_b^c) \pm \rho_c/4, \quad \upsilon_c(\tau_{2(N+1)}^c) = \upsilon_c(t_b^c), \ldots$$

$$\upsilon_c(\tau_{2(N+M-1)}^c) = \upsilon_c(t_b^c), \quad \upsilon_c(\tau_{2(N+M-1)+1}^c) = \upsilon_c(t_b^c) \pm \rho_c/4$$

откуда следует справедливость утверждения 4°.

Докажем, что алгоритм (2.8)–(2.10) определяет $\upsilon(t) = (\upsilon_1(t), \upsilon_2(t))^T$ для всех $t \in [0, \infty)$. Для этого достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 4. Для любого набора допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i либо значение b_c конечно, либо $\lim \tau_b^c = \infty$ при $b \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим случай $c = 1$. Для каждого набора допустимых управлений $u_i(t)$ возможен один из двух случаев.

Случай 1. Алгоритм (2.8)–(2.10) применяется конечное число раз, поэтому значение b_1 конечно.

Случай 2. Алгоритм (2.8)–(2.10) применяется бесконечное число раз. Требуется доказать, что полученная по этой формуле последовательность $\{\tau_b^1\}_{b=0}^{\infty}$ обладает свойством: $\lim\tau_b^c = \infty$ при $b \to \infty$. Предположим противное: существует набор допустимых управлений $u_i^*(t)$ такой, что

$$\lim\tau_b^1 = \tau^* < \infty \text{ при } b \to \infty$$

1°. Рассмотрим числа $x_{1i}^{(q-1)}(\tau^*)$. Пусть они принимают $r \in I$ различных значений $\xi_1 < \xi_2 < \ldots$ $\ldots < \xi_r$. Не теряя общности, считаем, что

$$x_{1s}^{(q-1)}(\tau^*) = \xi_k, \quad s \in S_k, \text{ где}$$

$$S_k = \{s_{k-1}+1, s_{k-1}+2, \ldots, s_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, r \quad (s_0 = 0, s_r = n)$$

Для каждого $\varepsilon \in [0, \tau^*]$ определим множества

$$H_k(\varepsilon) = \bigcup_{s \in S_k} \{z \in R^1 : z = x_{1s}^{(q-1)}(t), t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*]\}, \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

Пусть $G_1, G_2 \subset R^1$, обозначим

$$\operatorname{dist}(G_1, G_2) = \inf_{g_1 \in G_1, g_2 \in G_2} |g_1 - g_2|$$

$$h(\varepsilon) = \min\{\operatorname{dist}(H_k(\varepsilon), H_{k+1}(\varepsilon)), k = 1, 2, \ldots, r-1\}$$

$$H(\varepsilon) = h(\varepsilon) - 2\gamma_1\varepsilon, \quad \varepsilon \in [0, \tau^*]$$

В силу непрерывности функции $H(\varepsilon)$ и условия $h(0) > 0$ получаем, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $H(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$. Отсюда

$$h(\varepsilon)/\gamma_1 > 2\varepsilon \text{ для всех } \varepsilon \in [0, \varepsilon_1] \tag{2.11}$$

2°. Если $|S_k| = 1$, то полагаем $\varepsilon_2^k = \infty$. Пусть $|S_k| \geq 2$ и $\alpha, \beta \in S_k$.
Отметим, что

$$x_{1\alpha}^{(q-1)}(\tau^*) = x_{1\beta}^{(q-1)}(\tau^*) = \xi_k \tag{2.12}$$

Обозначив $T = [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$, $\bar{T} = [\tau^* - \varepsilon, \tau^*]$, разберем всевозможные случаи взаимного расположения значений $x_{1\alpha}^{(q-1)}$, $x_{1\beta}^{(q-1)}$, $x_{1\alpha}^{(q)}$, $x_{1\beta}^{(q)}$.

2.1) $x_{1\alpha}^{(q)}(\tau^*) > x_{1\beta}^{(q)}(\tau^*)$; в силу непрерывности этих функций существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$x_{1\alpha}^{(q)}(t) > x_{1\beta}^{(q)}(t), \quad t \in \bar{T}$$

кроме того, учитывая равенство (2.12), имеем

$$x_{1\alpha}^{(q-1)}(t) < x_{1\beta}^{(q-1)}(t), \quad t \in T$$

2.2) $x_{1\alpha}^{(q)}(\tau^*) < x_{1\beta}^{(q)}(\tau^*)$; аналогично случаю 2.1 существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$x_{1\alpha}^{(q)}(t) < x_{1\beta}^{(q)}(t), \quad t \in \bar{T}, \quad x_{1\alpha}^{(q-1)}(t) > x_{1\beta}^{(q-1)}(t), \quad t \in T$$

2.3) $x_{1\alpha}^{(q)}(\tau^*) = x_{1\beta}^{(q)}(\tau^*)$; этот случай имеет несколько вариантов:

2.3.1) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x_{1\alpha}^{(q)}(t) = x_{1\beta}^{(q)}(t)$, $t \in \bar{T}$; тогда и $x_{1\alpha}^{(q-1)}(t) = x_{1\beta}^{(q-1)}(t)$, $t \in \bar{T}$.

2.3.2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x_{1\alpha}^{(q)}(t) > x_{1\beta}^{(q)}(t)$, $t \in T$; тогда подобно случаю 2.1 $x_{1\alpha}^{(q-1)}(t) < x_{1\beta}^{(q-1)}(t)$, $t \in T$;

2.3.3) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x_{1\alpha}^{(q)}(t) < x_{1\beta}^{(q)}(t)$, $t \in T$; тогда подобно случаю 2.2 $x_{1\alpha}^{(q-1)}(t) > x_{1\beta}^{(q-1)}(t)$, $t \in T$.

Теперь, перебирая все $x_{1s}^{(q-1)}$, $x_{1s}^{(q)}$, $s \in S_k$ попарно, как $x_{1\alpha}^{(q-1)}$, $x_{1\beta}^{(q-1)}$, $x_{1\alpha}^{(q)}$, $x_{1\beta}^{(q)}$, получим, что существует $\varepsilon_2^k > 0$ такое, что взаимное расположение $x_{1s}^{(q-1)}$ и $x_{1s}^{(q)}$, $s \in S_k$ не изменяется на промежутке $[\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*)$. Последнее без потери общности означает

$$\begin{matrix} x_{1s_{k-1}+1}^{(q-1)}(t)\{<=\}x_{1s_{k-1}+2}^{(q-1)}(t)\ldots\{<=\}x_{1s_k}^{(q-1)}(t) \\ x_{1s_{k-1}+1}^{(q)}(t)\{>=\}x_{1s_{k-1}+2}^{(q)}(t)\ldots\{>=\}x_{1s_k}^{(q)}(t) \end{matrix}, \quad t \in [\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*) \tag{2.13}$$

Здесь $\{<=\}$, $\{>=\}$ – означает, что на всем промежутке $[\tau^* - \varepsilon_2^k, \tau^*)$ в первой (второй) строке формулы берется знак либо < (>), либо =.

Выбираем $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \ldots, \varepsilon_2^r\} > 0$.

3°. Из непрерывности $x_{1i}^{(q)}(t)$ следует существование $\varepsilon_3^i > 0$ такого, что

$$\left|x_{1i}^{(q)}(\tau^* - \varepsilon') - x_{1i}^{(q)}(\tau^* - \varepsilon'')\right| < \rho_1/4 \ \text{ для всех } \ \varepsilon', \varepsilon'' \in [0, \varepsilon_3^i) \tag{2.14}$$

Возьмем $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2, \ldots, \varepsilon_3^n\} > 0$.

4°. Определим

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} > 0 \tag{2.15}$$

Из предположения существования конечного предела последовательности $\{\tau_b^1\}_{b=0}^{\infty}$ следует, что до момента $\tau^* - \varepsilon^* < \tau^*$ управление $\upsilon_1(t)$ определено и существует номер N такой, что t_N^1, $t_{N+1}^1, \ldots \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*]$, где, согласно лемме 3, $\{t_b^1\}_{b=0}^{\infty} \subset \{\tau_b^1\}_{b=0}^{\infty}$.

Рассмотрим игру Г начиная с момента $\tau^* - \varepsilon^*$ и докажем, что найдется номер $M : t_{(N+M)}^1 > \tau^*$, этим получим противоречие предположению о конечном значении $\lim \tau_b^1$ при $b \to \infty$ и лемма будет доказана.

Итак, момент $t_N^1 \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$. Необходимо $y_1^{(q-1)}(t_N^1) \in H_k(\varepsilon^*)$ при некотором $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Напомним, что

$$x_{1s}^{(q-1)}(t) \in H_k(\varepsilon^*), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*], \quad s \in S_k$$

Существует хотя бы одно $\alpha \in S_k$ такое, что $y_1^{(q-1)}(t_N^1) = x_{1\alpha}^{(q-1)}(t_N^1)$.

Из условия (2.2) следует, что возможны два случая.

4.1) $\upsilon_1(t_N^1) \geq x_{1\alpha}^{(q)}(t_N^1) + \rho_1$, где α – это один из несколько последовательных индексов из S_k. Из леммы 3 следует, что

$$\upsilon_1(t_N^1) - \rho_1/4 \leq \upsilon_1(t) \leq \upsilon_1(t_N^1) + \rho_1/4, \quad t \in [t_N^1, t_{N+1}^1)$$

Отсюда, учитывая соотношения (2.14), (2.15), заключаем, что

$$\upsilon_1(t) > x_{1\alpha}^{(q)}(t) + \rho_1/2 \text{ для всех } t \in [t_N^1, t_{N+1}^1) \tag{2.16}$$

Согласно соотношению (2.13), в момент t_{N+1}^1 должно выполниться одно из двух равенств:

4.1.1) $y_1^{(q-1)}(t_{N+1}^1) = x_{1\alpha}^{(q-1)}(t_{N+1}^1)$, этот случай невозможен в силу неравенства (2.16);

4.1.2) $y_1^{(q-1)}(t_{N+1}^1) = x_{1\beta}^{(q-1)}(t_{N+1}^1)$, $\beta > \alpha$ (β – один или несколько последовательных индексов из S_k).

Итак, остается случай 4.1.2. Рассмотрим систему неравенств

$$\left|x_{1\beta}^{(q)}(t_{N+1}^1) - x_{1\beta}^{(q)}(t)\right| < \frac{\rho_1}{4}, \quad \upsilon_1(t) - \frac{\rho_1}{2} > x_{1\alpha}^{(q)}(t) > x_{1\beta}^{(q)}(t), \quad t \in [t_n, t_{N+1}) \tag{2.17}$$

Справедливость первого неравенства следует из соотношений (2.14) и (2.15), второй цепочки неравенств – из соотношений (2.16), (2.13). Из системы (2.17) получим, что

$$\upsilon_1(t) > x_{1\beta}^{(q)}(t_{N+1}^1) + \rho_1/4, \quad t \in [t_N, t_{N+1})$$

поэтому значение $\upsilon_1(t_{N+1}^1)$, согласно алгоритму (2.8)–(2.10), будет определено так, что

$$\upsilon_1(t_{N+1}^1) \geq x_{1\beta}^{(q)}(t_{N+1}^1) + \rho_1$$

Продолжая далее, получим, что существует момент t_{N+L}^1 такой, что

$$y_1^{(q-1)}(t_{N+L}^1) = x_{1s_k}^{(q-1)}(t_{N+L}^1), \quad \upsilon_1(t_{N+L}^1) \geq x_{1s_k}^{(q)}(t_{N+L}^1) + \rho_1$$

откуда получаем, что

$$x_{1s}^{(q-1)}(t) < y_1^{(q-1)}(t), \quad t \in (t_{N+L}^1, \tau^*], \quad s \in S_k$$

Значит, чтобы $t_{N+L+1}^1 \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$, необходимо выполнение равенства

$$y_1^{(q-1)}(t_{N+L+1}^1) = x_{1\eta}^{(q-1)}(t_{N+L+1}^1), \quad \eta \in I \backslash S_k$$

а это означает, что значение $y_1^{(q-1)}$ из множества $H_k(\varepsilon^*)$ должно попасть в множество $H_{k+1}(\varepsilon^*)$. Из неравенства (2.11) следует, что даже при максимальном значении υ_1, которое, по лемме 3, равно γ_1, на это потребуется времени больше, чем $2\varepsilon^*$, откуда $t_{N+L+1}^1 - t_{N+L}^1 > 2\varepsilon^*$. Итак, существует номер $M = L + 1 : t_{N+M}^1 > \tau^*$.

4.2) $\upsilon_1(t_N^1) \leq x_{1\alpha}^{(q)}(t_N^1) - \rho_1$. Аналогично доказывается существование номера M.

Случай $c = 2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 следует, что для определенных по алгоритму (2.8)–(2.10) функций υ_c выполнено включение

$$\upsilon_c(t) \in [\delta_c - \rho_c/4, \gamma_c] \text{ для всех } t \in [0, \infty) \tag{2.18}$$

Таким образом, определена стратегия убегающего E_1: в каждый момент времени $t \geq 0$ убегающий E_1 по алгоритму (2.8)–(2.10) определяет функции $\upsilon_1(t)$ и $\upsilon_2(t)$, тем самым полностью задает свое управление $\upsilon(t)$.

Теорема 1. В игре Г при $m = 1$ происходит мягкое убегание из любых начальных позиций.

Доказательство. Докажем, что стратегия убегающего, определяемая алгоритмом (2.8)–(2.10), является стратегий мягкого убегания. Действительно, управление υ принадлежит классу кусочно-постоянных функций и меняет значение в моменты $\{\tau_b^1\}_{b=0}^{b_1} \cup \{\tau_b^2\}_{b=0}^{b_2}$; применяя соотношения (2.18), (2.1), получаем

$$\|\upsilon(t)\| \le \sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2} \le \gamma$$

Выполнение условия $x_i^{(r)}(t) \ne y^{(r)}(t)$ для всех $r \in Q$ и $t \ge 0$ следует из лемм 3 и 4.

3. Случай $m \ge 2$. Определим стратегию мягкого убегания для группы скоординированных убегающих E_j.

Теорема 2. В игре Γ происходит мягкое убегание из любых начальных позиций.

Доказательство. В пространстве R^ν определим вспомогательную игру Γ_1 $nm+1$ лиц: nm преследователей P_i^j и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t=0$)

$$\begin{aligned} &x_{ij}^{(p)} = u_i, \quad \|u_i\| \le 1; \quad y^{(q)} = w, \quad \|w\| \le \gamma \\ &x_{ij}^{(\beta)}(0) = X_i^\beta - Y_j^\beta, \quad x_{ij}^{(\alpha)}(0) = X_i^\alpha, \quad y^{(\beta)}(0) = 0, \quad \beta \in Q, \quad \alpha \in P\backslash Q \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для всех допустимых управлений u_i, w, номера $r \in Q$ и $t \ge 0$ имеем

$$x_{ij}^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{p-1} x_{ij}^{(k)}(0)t^{[k-r]} + \int_0^t (t-\tau)^{[p-r-1]}u_i(\tau)d\tau =$$

$$= \sum_{k=r}^{q-1} (X_i^k - Y_j^k)t^{[k-r]} = \sum_{k=q}^{p-1} X_i^k t^{[k-r]} + \int_0^t (t-\tau)^{[p-r-1]}u_i(\tau)d\tau$$

$$y^{(r)}(t) = \int_0^t (t-\tau)^{[q-r-1]}w(\tau)d\tau$$

В игре Γ_1 преследователи действуют следующим образом: в каждый момент времени $t \in [0, \infty)$ каждый из преследователей P_i^j использует одно и то же управление $u_i(t)$, выбранное преследователем P_i в игре Γ. В этом случае имеет место равенство

$$x_i^{(r)}(t) = x_{ij}^{(r)}(t) + \sum_{k=r}^{q-1} Y_j^k t^{[k-r]} \tag{3.2}$$

Пусть $w(t)$ – управление, обеспечивающее мягкое убегание в игре Γ_1, выбранное убегающим E в момент времени t; тогда

$$x_{ij}^{(r)}(t) \ne y^{(r)}(t) \tag{3.3}$$

Существование такого управления следует из теоремы 1.

Определяем управление убегающих E_j в игре Γ в каждый момент времени $t \ge 0$ следующим образом: $\upsilon(t) = w(t)$. В этом случае

$$y_j^{(r)}(t) = y^{(r)}(t) + \sum_{k=r}^{q-1} Y_j^k t^{[k-r]} \tag{3.4}$$

Объединяя соотношения (3.2), (3.3), (3.4), получим, что

$$x_i^{(r)}(t) \neq y_j^{(r)}(t), \quad t \in [0, \infty)$$

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (А04-2.8-60) и программы "Университеты России" (34126).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б.* О квазилинейных дифференциальных играх убегания // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1046–1052.
2. *Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б.* Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000. 176 с.
3. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
4. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
5. *Благодатских А.И.* Уклонение жестко скоординированных убегающих в одной задаче группового преследования // Изв. ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та, 2004. № 2. С. 3–24.

Ижевск
e-mail: aiblag@mail.ru

Поступила в редакцию
17.V.2004