УДК 65–50

© 2005 г. Н. Ю. Сатимов, М. Т. Тухтасинов

# О НЕКОТОРЫХ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ

Рассматриваются дифференциальные игры преследования и уклонения от встречи в системе, описываемой уравнением в частных производных, содержащим эллиптический оператор и аддитивно входящие управляющие параметры. С помощью обобщенных собственных чисел и обобщенных собственных функций данного оператора вводятся пространства, зависящие от неотрицательного параметра. Изучаются четыре варианта постановки игровых задач, различающиеся ограничениями, налагаемыми на управления игроков. Для двух вариантов приводятся достаточные условия, при выполнении которых возможно уклонение от встречи из всех начальных состояний (задача преследования для этих игр изучалась ранее). Для третьего варианта выделены два бесконечных взаимно непересекающихся множества, таких, что из точек первого из них возможно завершение преследования, а из точек второго возможно уклонение от встречи. Для четвертого варианта показана возможность завершения преследования из любого начального положения в произвольной малой окрестности нуля.

Некоторые результаты, изложенные ниже, анонсированы в докладе [1]. При решении задачи уклонения от встречи используются рассуждения, применяемые в конечномерном случае [2].

**1. Введение.** В пространстве $L_2(\Omega)$ рассматривается дифференциальный оператор $A$ вида [3]

$$Az = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right), \quad x \in \Omega, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \tag{1.1}$$

где $\Omega$ – ограниченная с кусочно гладкой границей область в $R^n$, $n \geq 1$, $\bar{\Omega}$ – ее замыкание. Областью определения $D(A)$ оператора $A$ является $\overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$ (пространство дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций). Коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют следующему условию: существует постоянная $\gamma > 0$, такая, что для всех $x \in \Omega$ и $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{1.2}$$

Можно убедиться, что операция

$$(z, y)_A = (Az, y), \quad z, y \in \overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$$

удовлетворяет всем условиям скалярного произведения [4]. Таким образом, $\overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$ превращается в гильбертово неполное пространство. Пополнив его по норме

$$\|z\|_A = (Az, z)^{1/2}, \quad z \in \overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$$

получим полное гильбертово пространство, называемое энергетическим пространством оператора $A$; обозначим его $H_A$.

Известно, что оператор $A$ (1.1) имеет дискретный спектр, точнее, имеет бесконечную последовательность $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ обобщенных собственных чисел с пределом в бесконечности и последовательность обобщенных собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, полную в $L_2(\Omega)$ и $H_A$. Будем считать, что $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij}$ – символ Кронекера.

Пусть $r$ – произвольное неотрицательное число. Введем пространства (всюду далее суммирование ведется от $i = 1$ до $i = \infty$)

$$l_r = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) : \sum \lambda_i^r \alpha_i^2 < \infty\}, \quad H_r(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) : f = \sum \alpha_i \varphi_i, \alpha \in l_r\} \quad (1.3)$$

со скалярными произведениями и нормами

$$\begin{aligned} &(\alpha, \beta)_r = \sum \lambda_i^r \alpha_i \beta_i, \quad \alpha, \beta \in l_r, \quad \|\alpha\| = \|f\| = (\alpha, \alpha)_r^{1/2} \\ &(f, g)_r = (\alpha, \beta)_r, \quad g = \sum \beta_i \varphi_i \end{aligned} \quad (1.4)$$

Отметим, что $H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$, $H_r(\Omega) \subset H_s(\Omega)$ для произвольных $s, r$, $0 \le s \le r$.

Через $C(0, T; H_r(\Omega))$ ($L_2(0, T; H_r(\Omega))$) обозначим пространство непрерывных (суммируемых с квадратом измеримых) функций, определенных на отрезке $[0, T]$, со значениями в $H_r(\Omega)$, где $T$ – некоторая положительная постоянная.

**2. Определения возможности уклонения от встречи и возможности завершения преследования.** Рассмотрим следующую конфликтно управляемую распределенную систему (распределенную дифференциальную игру):

$$\begin{aligned} &\frac{dz(t)}{dt} + Az(t) = -u(t) + \upsilon(t), \quad 0 < t \le T \\ &u(\cdot), \quad \upsilon(\cdot) \in L_2(0, T; H_r(\Omega)), \quad z(0) = z^{(0)}, \quad z^{(0)} \in H_{r+1}(\Omega) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Управления $u(\cdot)$ и $\upsilon(\cdot)$ первого (преследующего) и второго (преследуемого) игроков соответственно считаются удовлетворяющими одной из следующих систем неравенств:

$$\begin{aligned} &1) \quad \|u(t)\| \le \rho, \quad \|\upsilon(t)\| \le \sigma, \quad 0 \le t \le T \\ &2) \quad \|u(\cdot)\| \le \rho, \quad \|\upsilon(\cdot)\| \le \sigma \\ &3) \quad \|u(\cdot)\| \le \rho, \quad \|\upsilon(t)\| \le \sigma, \quad 0 \le t \le T \\ &4) \quad \|u(t)\| \le \rho, \quad 0 \le t \le T, \quad \|\upsilon(\cdot)\| \le \sigma \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\rho$ и $\sigma$ – неотрицательные постоянные.

В дальнейшем систему (2.1), где функции $u(\cdot)$ и $\upsilon(\cdot)$ удовлетворяют одной из систем неравенств *1, 2, 3, 4*, будем называть игрой *1, 2, 3, 4* соответственно. Точку $z^{(0)}$ будем называть начальным положением точки $z$ (или игр *1–4*).

Сформулируем определения возможности уклонения от встречи и возможности завершения преследования из начального положения $z^{(0)}$ (всюду в дальнейшем $z^{(0)} \ne 0$).

*Определение* 1. В игре 1 (игре 2 и 3) возможно уклонение от встречи из начального положения $z^{(0)}$, если по любому числу $T > 0$ и произвольному управлению $u(t)$, $0 \le t \le T$, удовлетворяющему условию $\|u(t)\| \le \rho$($\|u(\cdot)\| \le \rho$), можно построить такое управление $\upsilon(t)$, $0 \le t \le T$, что решение $z(t)$, $0 \le t \le T$, задачи (2.1) не обращается в нуль. При этом: 1) для нахождения значения $\upsilon(t)$ разрешается использовать $z^{(0)}$ ($z^{(0)}$ и $z^{(0)}$, $u(s)$, $t - \theta \le s < t$, где $\theta > 0$ – произвольная постоянная, и $z^{(0)}$, $u(s)$, $0 \le s < t$, если $0 \le t < \theta$); 2) функция $\upsilon(t)$, $0 \le t \le T$, удовлетворяет неравенству $\|\upsilon(t)\| \le \sigma$ ($\|\upsilon(\cdot)\| \le \sigma$; $\|\upsilon(t)\| \le \sigma$).

*Определение* 2. В игре 3 (игре 4) возможно завершение преследования из начального положения $z^{(0)}$, если существуют число $T = T(z^{(0)})$ и функция $u(\upsilon, t)$, $\upsilon \in R^1$, $0 \le t \le T$, такие, что для произвольного управления $\upsilon(t)$, $0 \le t \le T$, удовлетворяющего неравенству $\|\upsilon(t)\| \le \sigma(\|\upsilon(\cdot)\| \le \sigma)$, решение $z(t)$, $0 \le t \le T$, задачи (2.1) обратится в нуль при некотором $t = t' \in [0, T]$ (попадает в произвольную $\epsilon$ – окрестность нуля, т.е. $\|z(t)\| \le \epsilon$ при некотором $t = t' \in [0, T]$). При этом функция $u(t) = u(\upsilon(t), t)$, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\| \le \rho(\|u(t)\| \le \rho)$.

Задача преследования изучалась ранее [5, 6]; в частности при $\rho > \sigma$ была установлена [5] возможность завершения преследования в игре 2 из произвольного начального положения $z^{(0)}$. Рассмотрены [3, 7–10] интересные классы управляемых систем.

**3. Основные результаты.**

*Теорема* 1. Если $\sigma \ge \rho$, то в играх 1 и 2 возможно уклонение от встречи из произвольного начального положения $z^{(0)}(\neq 0)$.

*Теорема* 2. $1^0$. При произвольных $\rho > 0$ и $\sigma \ge 0$ для игры 3 существуют два бесконечных непересекающихся множества начальных положений, таких, что из точек первого из них возможно завершение преследования, а из точек второго возможно уклонение от встречи. $2^0$. При произвольных $\rho > 0$ и $\sigma \ge 0$ в игре 4 возможно завершение преследования из произвольного начального положения $z^{(0)}$.

*Доказательство теоремы* 1. Пусть $z^{(0)}$ – произвольное начальное положение, $T$ – произвольное положительное число, $u(\cdot)$ и $\upsilon(\cdot)$ – управления, удовлетворяющие условию *1* (условию *2*). Подставим эти управления в правую часть уравнения (2.1). Чтобы найти явный вид решения полученной задачи $z(t)$, $0 \le t \le T$, подставим в систему (2.1) разложения в ряды Фурье

$$(u(t), \upsilon(t), z(t), z^0) = \sum (u_i(t), \upsilon_i(t), z_i(t), z_i^0)\varphi_i, \quad u_i(\cdot), \upsilon_i(\cdot), z_i(\cdot) \in L_2[0, T]$$

где

$$\|F(t)\|^2 = \sum \lambda_i^r F_i^2(t) \quad \left(\|F(\cdot)\|^2 = \int_0^T \|F(t)\|^2 dt\right), \quad F = u, \upsilon$$

и приравняем соответствующие коэффициенты Фурье. В результате получим бесконечную систему дифференциальных уравнений и начальных условий

$$\begin{aligned} &\frac{dz_i(t)}{dt} = -\lambda_i z_i(t) - w_i(t), \quad 0 < t \le T, \quad z_i(0) = z_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots; \\ &w_i(t) = u_i(t) - \upsilon_i(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Очевидно, что функции

$$z_i(t) = e^{-\lambda_i t}\left[z_i^{(0)} - \int_0^t w^{\lambda_i s} w_i(s) ds\right], \quad 0 \le t \le T, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

составляют решение системы (3.1). Путем непосредственных вычислений можно убедиться, что функция

$$z(t) = \sum z_i(t)\varphi_i, \quad 0 \le t \le T$$

принадлежит пространству $C(0, T; H_{r+1}(\Omega))$ и является решением задачи (2.1) в смысле теории обобщенных функций [4].

Далее, так как $z^{(0)} \neq 0$ по условию, то $z_i(0) \neq 0$ при некотором $i = k$. Пусть, для определенности, $z_k^{(0)} > 0$ (случай $z_k^{(0)} < 0$ рассматривается аналогично). Кроме того, предположим, что выполнены неравенства *1* (игра *2* рассматривается далее).

Для всех $t \in [0, T]$ положим $\upsilon_i(t) = 0$, где $i \neq k$ и $\upsilon_k(t) = \sigma\lambda_k^{r/2}$. (Ясно, что $\|\upsilon(t)\| \leq \sigma$ на $[0, T]$.) Так как $\|u(t)\|^2 \leq \rho^2$, то, очевидно, $|u_k(t)| \leq \rho\lambda_k^{-r/2}$. Поэтому

$$\upsilon_k(t) - u_k(t) \geq \sigma\lambda_k^{-r/2} - \rho\lambda_k^{-r/2} \geq 0$$

(напомним, что $\sigma \geq \rho$).

Следовательно (см.выражение (3.2)), для всех $t \in [0, T]$

$$z_k(t) \geq e^{-\lambda_k t} z_k^{(0)} \tag{3.3}$$

откуда вытекает, что $z_k(t) \neq 0$ на $[0, T]$, ибо $z_k^{(0)} > 0$. Значит, $z(t) \neq 0$ на $[0, T]$, так как в противном случае существует $t' \in [0, T]$, для которого $z(t') = 0$, $z_k(t') = 0$.

Таким образом, в игре *1* возможно уклонение от встречи из любого начального положения $z^{(0)}$.

Пусть теперь выполняются неравенства *2*. Как и выше, выберем ненулевой коэффициент Фурье $z_k^{(0)}$ в разложении $z^{(0)}$. Допустим, что $z_k^{(0)} > 0$.

Ясно, что существует число $\delta \in (0, T]$, такое, что если в выражении (3.2) $\upsilon_k(t) = 0$ на $[0, \delta]$, а $u_k(t)$, $0 \leq t \leq T$, – произвольная суммируемая с квадратом функция, удовлетворяющая неравенству

$$\int_0^T u_k^2(t)dt \leq \frac{\rho^2}{\lambda_k^r}$$

то $z_k(t) \neq 0$ на $[0, \delta]$; более того, можно добиться выполнения неравенства $z_k(t) > z_k^{(0)}/2$ на $[0, \delta]$.

Положим $\upsilon_i(t) = 0$ для всех $i \neq k$ и $t \in (0, T]$, а $\upsilon_k(t) = u_k(t - \delta)$ для всех $t \in [\delta, T]$.

Учитывая эти факты и уменьшив $\delta$, если это необходимо, можно добиться выполнения неравенства $z_k(t) \geq z_k^{(0)}/2$ и на отрезке $[\delta, T]$.

Значит, при предложенном выше способе управления для всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$z_k(t) \geq e^{-\lambda_k t} z_k^{(0)}/2, \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.4}$$

из которого следует, что в игре 2 возможно уклонение от встречи из любого начального положения $z^{(0)}$.

*Доказательство теоремы* 2. $1^0$. Пусть $T$ – произвольное положительное число, $k$ – произвольное натуральное число.

Множество начальных положений вида $z^{(0)} = z_k^{(0)} \varphi_k$, где коэффициент $z_k^{(0)}$ и число $T_0$ удовлетворяют условиям

$$0 < z_k^{(0)^2} < \frac{(\rho - \sigma\sqrt{T_0})^2 (e^{\lambda_k T_0} - 1)^2}{T_0 \lambda_k^{r+2}}, \quad 0 < T_0 \leq T, \quad \rho - \sigma\sqrt{T_0} > 0 \tag{3.5}$$

обозначим через $X_k(T_0)$.

Покажем, что из произвольного начального положения, удовлетворяющего условию

$$z^{(0)} \in X = \bigcup_{T_0} \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k(T_0) \tag{3.6}$$

в игре *3* можно завершить преследование.

Действительно, пусть $\upsilon(t)$, $0 \le t \le T$, – произвольное управление второго игрока, $\|\upsilon(t)\| \le \sigma$. Ясно, что

$$\|\upsilon(\cdot)\|_{T_0}^2 \equiv \int_0^{T_0} \|\upsilon(t)\|^2 dt \le \sigma^2 T_0$$

Поэтому, если положить $\upsilon(t) = u(t) + w(t)$ на $[0, T_0]$ и считать $\|w(\cdot)\| \le \rho - \sigma\sqrt{T_0}$, то видно, что $\|u(\cdot)\|_{T_0} \le \rho$.

Учитывая это замечание, рассмотрим систему (3.1). Так как $z^{(0)} \in X$, то $z_i^{(0)} = 0$ для всех $i \ne k$ и $z_k^{(0)}$ удовлетворяет условиям (3.5).

Положим

$$w_i(t) \equiv 0 \text{ для всех } i \ne k, \quad w_k(t) = \frac{\lambda_k z_k^{(0)}}{e^{\lambda_k T_0} - 1}, \quad 0 \le t \le T_0 \tag{3.7}$$

Так как $w_i(t) = z_i^{(0)} = 0$ для всех $i \ne k$, то согласно системе (3.1) $z_i(t) \equiv 0$ на $[0, T_0]$ для каждого $i \ne k$. При $i = k$ из равенства (3.2) получим: $z_k(T_0) = 0$. Значит, при указанном способе выбора функций $u(\cdot)$ и $w(\cdot)$ игра *3* из произвольного начального положения, удовлетворяющего условию (3.6), завершается за время $T(z^{(0)}) \le T$. Можно убедиться, что $\|w(\cdot)\| \le \rho - \sigma\sqrt{T_0}$.

Покажем теперь, что из любого начального положения, удовлетворяющего условию

$$z^{(0)} \in Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \quad Y_k = \left\{ z^{(0)} : z_k^{(0)^2} > \rho^2 \frac{e^{2\lambda_k T} - 1}{2\lambda_k} \right\} \tag{3.8}$$

в игре *3* возможно уклонение от встречи.

Действительно, из условия (3.8) следует, что $z^{(0)} \in Y_i$ при некотором $i = k$. Далее, пусть $u(t)$, $0 \le t \le T$, – произвольное управление, $\|u(\cdot)\| \le \rho$. Функцию $\upsilon(t)$, $0 \le t \le T$, гарантирующую возможность уклонения из положения $z^{(0)}$, выберем следующим образом:

$$\upsilon_i(t) \equiv 0, \quad i \ne k; \quad \upsilon_k(t) \equiv \sigma/\lambda_k^{r/2}$$

Тогда решение задачи (3.1) при $i = k$ имеет вид

$$z_k(t) = e^{\lambda_k t}\left[ z_k^{(0)} + \xi_k(t) - \int_0^t e^{\lambda_k s} u_k(s) ds \right], \quad 0 \le t \le T, \quad \xi_k(t) = \frac{\sigma(e^{\lambda_k t} - 1)}{\lambda_k^{1 + r/2}} \tag{3.9}$$

Пусть, для определенности, $z_k^{(0)} > 0$. Тогда в силу неравенства Коши– Буняковского

$$z_k^{(0)} + \xi_k(t) - \int_0^t e^{\lambda_k s} |u_k(s)| ds \ge z_k^{(0)} + \xi_k(t) - \rho \sqrt{\frac{e^{2\lambda_k T} - 1}{2\lambda_k}}$$

Отсюда и из соотношений (3.8), (3.9) при всех $t \in [0, T]$ получаем неравенство

$$z_k(t) > \frac{\sigma(1 - e^{-\lambda_k t})}{\lambda_k^{1 + r/2}} \tag{3.10}$$

означающее, что в игре *3* возможно уклонение от встречи из произвольного начального положения, удовлетворяющего условию (3.8). Ясно, что $\|\upsilon(t)\| \le \sigma$.

Очевидно, что $X$ и $Y$ – бесконечные множества. Кроме того, они не пересекаются; в противном случае из некоторого начального положения $z^0 \in X \cap Y$ можно было бы одновременно и завершить преследование, и уклониться от встречи, что приводит к противоречию. Первая часть теоремы 2 доказана.

$2^0$. Пусть $\epsilon$ – произвольное положительное число, $z^{(0)}$ – произвольное начальное положение, $\|z^{(0)}\| > \epsilon$, $\upsilon(t)$ – произвольное управление второго игрока, $\|\upsilon(\cdot)\| \le \sigma$.

Функцию $u(t)$ выберем следующим образом (ср. с выражениями (3.7)):

$$u_i(t) = \frac{\lambda_i z_i^{(0)}}{e^{\lambda_i T_1} - 1}, \quad 0 \le t \le T_1, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad T_1 = T(z^{(0)}) = \frac{\|z^{(0)}\|}{\rho}$$

Тогда для произвольного $i$ решение задачи (3.1) имеет вид

$$z_i(t) = e^{-\lambda_i t}[z_i^{(0)} - I(u_i; t) + I(\upsilon_i; t)], \quad I(F_i; t) = \int_0^t e^{\lambda_i s} F_i(s) ds \tag{3.11}$$

В силу выбора функции $u_i(t)$, $0 \le t \le T_1$, получим, что $z_i^{(0)} - I(u_i; T_1) = 0$. Следовательно,

$$z_i(T_1) = e^{-\lambda_i T_1} I(\upsilon_i; T_1)$$

Возможны два случая:

1) $\|z(T_1)\| \le \epsilon$, 2) $\|z(T_1)\| > \epsilon$.

В случае *1* игра *4* завершена из начального положения $z^0$ в момент времени $T_1$.

В случае *2*, полагая $z^0 = z(T_1)$, повторим предыдущие рассуждения и получим

$$z_i(T_1 + T_2) = e^{-\lambda_i T_2} \int_0^{T_2} e^{\lambda_i s} \upsilon_i(T_1 + s) ds, \quad T_2 = T(z(T_1)) = \frac{\|z(T_1)\|}{\rho}$$

Здесь возможны два подслучая:

*2а*) $\|z(T_1 + T_2)\| \le \epsilon$, *2б*) $\|z(T_1 + T_2)\| > \epsilon$. В подслучае *2а* игра *4* завершается в момент времени $T_1 + T_2$. В подслучае *2б*, полагая $z^{(0)} = z(T_1 + T_2)$, применим предыдущие рассуждения, и т. д.

Рассуждая от противного, можно убедиться, что до $(k + 1)$-го шага, где

$$k = [\sigma^2/(2\epsilon^2)] + 1$$

игра *4* завершится из начального положения $z^{(0)}$; гарантированное время завершения преследования равно $\rho^{-1}(\|z^{(0)}\| + \sigma^2/(2\epsilon))$.

Отметим, что при доказательстве теоремы существенно используется ограниченность энергии убегающего (см. формулы (2.2)).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Сатимов Н.Ю.* О задаче уклонения от встречи в распределенных управляемых системах // Тр. Междунар. конф. "Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы", 24–28 июня 2003. Стерлитамак. Уфа: Гилем, С. 180–184.
2. *Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б.* Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000. 176 с.
3. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 810–826.
4. *Авдонин С.А., Иванов С.А.* Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: УМКВО, 1989. 242 с.
5. *Тухтасинов М.* О некоторых задачах теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 979–984.
6. *Ибрагимов Г.И.* Об одной задаче оптимального преследования в системах с распределенными параметрами // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 753–759.
7. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 5. С. 592–596.
8. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 6. С. 732–735.
9. *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией// Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.
10. *Ильин В.А.* Граничное управлений процессом колебаний струны на одном ее конце при закрепленном втором конце и при условии существования конечной энергии // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 6. С. 743–747.
11. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Ташкент
e-mail: mumin51@mail.ru

Поступила в редакцию
3.II.2005