УДК 62-50

© 2005 г. А. А. Незнахин, В. Н. Ушаков

О ПОСТРОЕНИИ ЯДРА ВЫЖИВАЕМОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕЛЕВОГО МНОЖЕСТВА

Рассматривается нелинейная управляемая система на конечном промежутке времени при фазовых ограничениях и заданном целевым множестве. Изучается задача о выделении в фазовых ограничениях ядра выживаемости – множества всех позиций, из которых выходит хотя бы одна выживающая траектория, т.е. траектория системы, стесненная фазовыми ограничениями и приходящая на целевое множество. Предлагается метод построения дискретных (по времени) аппроксимаций ядра выживаемости.

Работа примыкает к исследованиям [1–10][1] по теории выживаемости и теории дифференциальных игр. В развитие исследования задачи о выделении ядра выживаемости [9] в фазовых ограничениях вводится целевое множество; при этом выживающей считается траектория, остающаяся в фазовых ограничениях вплоть до прихода на целевое множество.

1. Постановка задачи. Пусть задана управляемая система, поведение которой на промежутке времени $\mathcal{I} = [t_0, \theta]$ $(t_0 \le \theta < \infty)$ описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x[t_0] = x_0, \quad u \in \mathcal{P} \tag{1.1}$$

Здесь x – m-мерный фазовый вектор из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, u – управление, $\mathcal{P}$ – компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

1°. Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна по совокупности своих аргументов на множестве $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{P}$ и удовлетворяет при некотором $\mu \in (0, \infty)$ неравенству

$$\|f(t, x, u)\| \le \mu(1 + \|x\|), \quad \forall (t, x, u) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{P}$$

где $\|x\|$ – евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^m$.

2°. Вектор-функция $f(t, x, u)$ локально-липшицева по x: для любого компакта $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ найдется такая постоянная $L = L(\mathcal{D}) \in (0, \infty)$, что

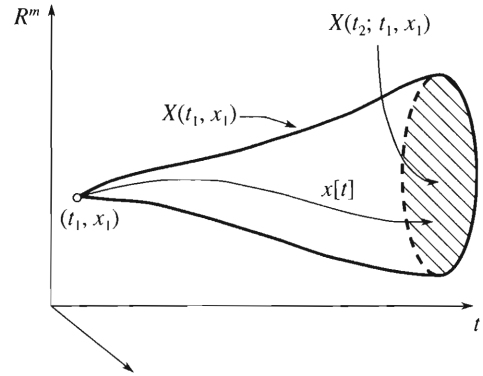
$$\|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_1, u), (t, x_2, u) \in \mathcal{I} \times \mathcal{D} \times \mathcal{P}$$

Под допустимым управлением системы (1.1) понимается любая измеримая по Лебегу вектор-функция $u[t]$, $t \in \mathcal{I}$, принимающая значения из $\mathcal{P}$ почти всюду на $\mathcal{I}$.

Пусть $u[t]$, $t \in \mathcal{I}$ – некоторое допустимое управление. Траекторией управляемой системы, порожденной допустимым управлением $u[t]$, будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t]$, $t \in \mathcal{I}$, принимающую значения в $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющую равенству

$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u[t])$ почти всюду на $\mathcal{I}$

[1] См. также: *Пацко В.С., Турова В.Л.* Численное решение дифференциальных игр на плоскости. Препринт. Екатеринбург: УрО РАН, 1995.



Фиг. 1

Точно так же определяется траектория управляемой системы (1.1), определенная на промежутке, содержащемся в $\mathcal{I}$.

Символом $X(t_1, x_1)$, где $(t_1, x_1) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m$, обозначим совокупность траекторий системы (1.1), определенных на отрезке $[t_1, \theta]$, порожденных всевозможными допустимыми управлениями $u[t]$, $t \in [t_1, \theta]$ и таких, что $x[t_1] = x_1$. Полагаем $X(t_2; t_1, x_1) = \{x[t_2]: x[t] \in \in X(t_1, x_1)\}$, $(t_1, x_1) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m$, $t_2 \in [t_1, \theta]$, – множество достижимости системы (1.1) в момент t_2 (см. фиг. 1).

Полагаем, что задано фазовое ограничение для системы (1.1) – замкнутое множество $\Phi \subset \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m$, имеющее непустые сечения $\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^m: (t, x) \in \Phi\}$, $t \in \mathcal{I}$.

Было дано [9] определение выживающей траектории $x[t]$, $t \in [t_1, \theta]$ управляемой системы, как удовлетворяющей условию $x[t] \in \Phi(t)$, $t \in [t_1, \theta]$.

Рассмотрим случай, когда наряду с множеством Φ задано ограниченное и замкнутое в $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^m$ целевое множество (ЦМ) $T \subset \Phi$, $T(\theta) \neq \varnothing$.

Определение 1. Траекторию $x[t]$ системы (1.1), определенную на отрезке $I = [t_1, t_2] \subset \mathcal{I}$, назовем *выживающей траекторией* (*ВТ*), если выполнены условия: $x[t] \in \Phi(t)$, $t \in I$; $x[t_2] \in T(t_2)$; t_2 – минимальный момент, при котором траектория $x[t]$ приходит на ЦМ T.

ВТ схематически изображена на фиг. 2.

Отметим связь между определением ВТ из [9] и приведенным определением. Пусть ЦМ $T \subset \Phi$ определено соотношениями $T(t) = \varnothing$, $t \in [t_0, \theta)$; $T(\theta) = \Phi(\theta)$. Тогда любая траектория $x[t]$, $t \in [t_1, \theta]$, управляемой системы (1.1) – ВТ в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда она – ВТ в смысле определения из [9].

Условие ограниченности ЦМ T гарантирует существование некоторого компакта $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^m$, такого, что $T \subset \mathcal{I} \times \mathcal{D}'$. Тогда из условия 1° вытекает следующая лемма.

Лемма 1. Существует компакт $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, содержащий фазовые портреты всех ВТ $x[t]$, $t \in I$, управляемой системы (1.1): $x[t] \in \mathcal{D}$, $t \in I$.

Сформулируем основное определение.

Определение 2. *Ядром выживаемости (ЯВ)* Ω' системы (1.1) назовем множество всех точек $(t_1, x_1) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m$, из которых выходит хотя бы одна ВТ системы (1.1).

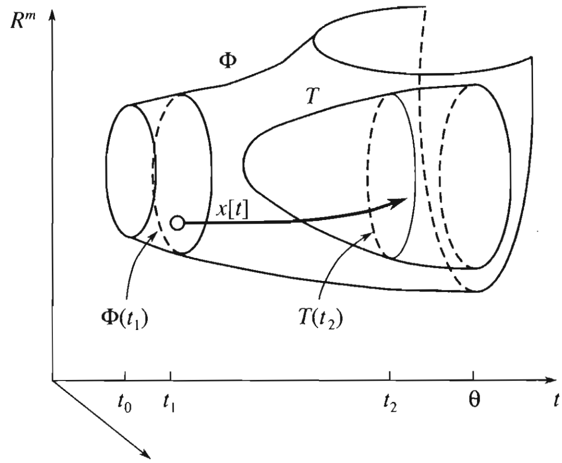
ЯВ схематически изображено на фиг. 3.

Из леммы 1 следует

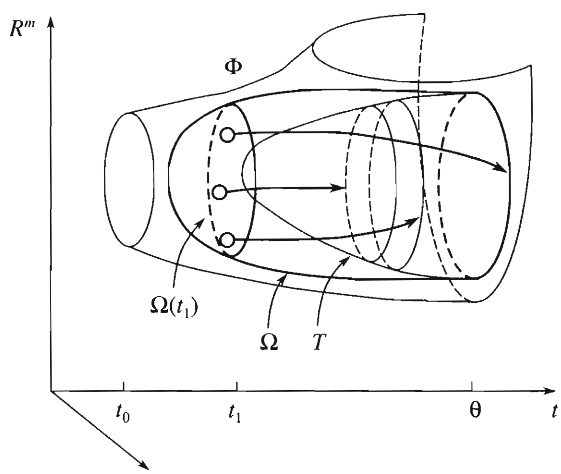
Лемма 2. Существует компакт $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ такой, что $\Omega' \subset \mathcal{I} \times \mathcal{D}$.

Утверждение 1. $T \subset \Omega' \subset \Phi$.

Цель настоящей работы – указать метод построения ядра Ω'. При этом подменим управляемую систему (1.1) дифференциальным включением, соответствующим систе-



Фиг. 2



Фиг. 3

ме (1.1), что позволит применить к задаче построения ЯВ методику приближенных вычислений стабильных мостов, используемую в теории позиционных дифференциальных игр (см., например, [10]).

Вместо управляемой системы (1.1) рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

$F(t, x)$ – выпуклая оболочка множества $\{f(t, x, u): u \in \mathcal{P}\}$.

Включение (1.2) удовлетворяет следующим условиям, аналогичным условиям 1° и 2°, наложенным на систему (1.1).

1°°. Многозначное отображение $(t, x) \to F(t, x)$ непрерывно по совокупности (t, x) в метрике Хаусдорфа и существует такая постоянная $\mu \in (0, \infty)$, что выполнено условие

$$\sup_{f \in F(t, x)} \|f\| \le \mu(1 + \|x\|), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m$$

$2^{\circ\circ}$. Многозначное отображение $(t, x) \to F(t, x)$ локально-липшицево по x в метрике Хаусдорфа, т.е. для любого компакта $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ найдется такая постоянная $L = L(\mathcal{D}) \in$ $\in (0, \infty)$, что для хаусдорфова расстояния выполнено условие

$$d(F(t, x_1), F(t, x_2)) \le L\|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \mathcal{I} \times \mathcal{D}$$

Траекторией включения (1.2) будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $y[t]$, $t \in I \subset \mathcal{I}$, принимающую значения в $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющую включению

$$\dot{y}[t] \in F(t, y[t]) \text{ почти всюду на } I$$

Аналогично предыдущему для включения (1.2) введем в рассмотрение понятие совокупности всех траекторий, определенных на отрезке $[t_1, \theta]$ и выходящих в момент t_1 из точки x_1: $Y(t_1, x_1)$, $(t_1, x_1) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m$, и понятие множества достижимости: $Y(t_2; t_1, x_1) =$ $= \{y[t_2]: y[t] \in Y(t_1, x_1)\}$.

Также дадим определение выживающей траектории.

Определение 3. Траекторию $y[t]$ включения (1.2), определенную на отрезке $[t_1, t_2] \subset \mathcal{I}$, назовем *выживающей траекторией (ВТ)*, если выполнены условия:

$$y[t] \in \Phi(t), \quad t \in [t_1, t_2]; \quad y[t_2] \in T(t_2); \quad y[t] \notin T(t), \quad t \in [t_1, t_2) \tag{1.3}$$

Аналогично лемме 1 верна следующая лемма.

Лемма 3. Существует компакт $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, такой, что $y[t] \in \mathcal{D}$, $t \in [t_1, t_2]$.

Определение 4. *Ядром выживаемости (ЯВ)* включения (1.2) назовем множество Ω всех точек $(t_1, x_1) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^m$, из которых выходит хотя бы одна ВТ включения (1.2).

Лемма 4. Существует компакт $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, такой, что $\Omega \subset \mathcal{I} \times \mathcal{D}$.

Аналогично утверждению 1 верно следующее

Утверждение 2. $T \subset \Omega \subset \Phi$.

Ядро Ω близко к ядру Ω', их связь характеризуется близостью множеств достижимости: множество $Y(t_2; t_1, x_1)$ равно замыканию множества $X(t_2; t_1, x_1)$.

2. Дискретная (по времени) аппроксимация ядра выживаемости Ω. Предложим метод приближенного построения множества Ω, используя конструкции, сходные с описанными ранее [9]. Здесь важную роль играет множество $Y^{-1}(t_1; t_2, x_2) = \{x_1 \in \mathbb{R}^m: x_2 \in$ $\in Y(t_2; t_1, x_1)\} \subset \mathbb{R}^m$ всех точек x_1, в которые в момент $\tau = t_2$ приходят траектории включения

$$\dot{y}[\tau] \in F^*(\tau, y), \quad y[t_1] = x_2; \quad F^*(\tau, y) = -F(t_1 + t_2 - \tau, y), \quad \tau \in I = [t_1, t_2]$$

Это включение можно трактовать как включение (1.2), заданное в терминах "обратного" времени τ. Множеству $Y^{-1}(t_1; t_2, x_2)$ поставим в соответствие множество

$$\tilde{Y}^{-1}(t_1; t_2, x_2) = x_2 - (t_2 - t_1)F(t_2, x_2) \subset \mathbb{R}^m$$

Оно линейно зависит от $(t_2 - t_1)$ длины отрезка I и хорошо аппроксимирует множество $Y^{-1}(t_1; t_2, x_2)$. В самом деле, справедлива оценка

$$d(Y^{-1}(t_1; t_2, x_2), \tilde{Y}^{-1}(t_1; t_2, x_2)) \le \omega(t_2 - t_1); \quad \lim \frac{\omega(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 0 \text{ при } t_2 - t_1 \to 0$$

где скалярная функция $\omega(t_2 - t_1)$ не зависит от точки (t_2, x_2) и удовлетворяет указанному предельному равенству.

Определим также множество

$$\tilde{Y}^{-1}(t_1; t_2, X_2) = \bigcup \{\tilde{Y}^{-1}(t_1; t_2, x_2): x_2 \in X_2\} \subset \mathbb{R}^m$$

Перейдем к основным построениям. Для каждого натурального n введем разбиение $\Gamma_n = \{t_0 = t^{(0)}, t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)} = \theta\}$ отрезка $\mathcal{I}$, равномерное с моментами $t^{(i)} \in \mathcal{I}$ и диаметром

$$\Delta_n = (\theta - t_n)/n, \quad t^{(i)} - t^{(i-1)} = \Delta_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Зафиксируем некоторое n; ему отвечает разбиение Γ_n. Дискретизируем по времени ЦМ T, сопоставив с ним набор T_n множеств $T_n(t^{(i)}) \subset \mathcal{D}$, $t^{(i)} \in \Gamma_n$, заданных равенствами

$$T_n(t^{(0)}) = \varnothing, \quad T_n(t^{(i)}) = \bigcup\{T(t)\colon t \in [t^{(i-1)}, t^{(i)}]\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Этот набор назовем дискретизацией ЦМ T.

Полагаем

$$K = \max\{\|f(t, x, u)\|\colon (t, x, u) \in \mathcal{I} \times \mathcal{D} \times \mathcal{P}\} < \infty$$

$$\omega(\Delta) = \Delta\omega^*((1 + K)\Delta), \quad \Delta > 0 \tag{2.1}$$

$$\omega^*(\Delta) = \sup\{d(F(t_1, x_1), F(t_2, x_2))\colon (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathcal{I} \times \mathcal{D}, |t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\| \le \Delta\}$$

Здесь $\omega^*(\Delta)$ – модуль непрерывности отображения $(t, x) \to F(t, x)$.

Зададим рекуррентно числа $\varepsilon^{(i)} \ge 0$ ($i = n, n-1, \ldots, 0$), связанные с моментами $t^{(i)}$ разбиения Γ_n, следующим образом:

$$\varepsilon^{(n)} = K\Delta_n; \quad \varepsilon^{(i)} = \omega(\Delta_n) + (1 + L\Delta_n)\varepsilon^{(i+1)}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 0$$

Утверждение 3

$$\lim\max_i \varepsilon^{(i)} = 0$$

Здесь и далее предел берется при $n \to \infty$.

Доказательство аналогично доказательству [9] подобного утверждения.

При фиксированном n ЯВ Ω будем аппроксимировать набором множеств

$$\{\Omega_n(t^{(i)}) \subset \mathcal{D}\colon t^{(i)} \in \Gamma_n\} \tag{2.2}$$

которые определим рекуррентно, начиная с последнего момента $t^{(n)} = \theta$ и кончая первым моментом $t^{(0)} = t_0$.

Определение 5. Назовем дискретной аппроксимацией ядра Ω набор множеств (2.2), определенный правилами $\Omega_n(t^{(n)}) = T_n(t^{(n)})$; $\Omega_n(t^{(i)})$ ($i = n-1, n-2, \ldots, 0$) определяется в три этапа: 1) $\bar{\bar{\Omega}}_n(t^{(i)}) = \tilde{Y}^{-1}(t^{(i)}; t^{(i+1)}, \Omega_n(t^{(i+1)}))$, 2) $\bar{\Omega}_n(t^{(i)}) = \bar{\bar{\Omega}}_n(t^{(i)}) \cap \Phi(t^{(i)})_{\varepsilon^{(i)}}$, 3) $\Omega_n(t^{(i)}) = \bar{\Omega}_n(t^{(i)}) \cup T_n(t^{(i)})$.

Здесь и ниже X_ε – замыкание ε-окрестности множества $X \subset \mathbb{R}^m$.

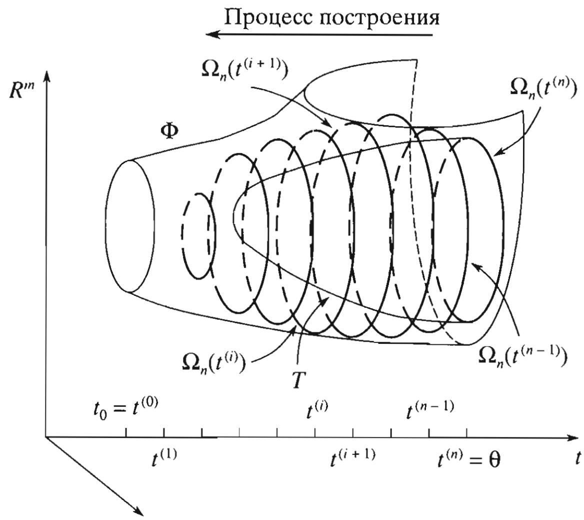
От дискретной аппроксимации ядра Ω (см. фиг. 4) перейдем к его предельной аппроксимации.

Определение 6. Назовем предельной аппроксимацией ядра Ω множество Ω_0 всех точек $(t^0, x^0) \subset \mathcal{I} \times \mathcal{D}$, представимых в виде

$$(t^0, x^0) = \lim(t^n, x^n), \quad t^n \ge t^0; \quad (t^n, x^n) \in \Gamma_n \times \Omega_n(t^n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Справедливо включение $T \subset \Omega^0 \subset \Phi$.

3. Основная теорема. Сформулируем основное утверждение, обосновывающее введение дискретных аппроксимаций $\Omega_n(t^{(i)})$.



Фиг. 4

Теорема

$\Omega^0 = \Omega$

Доказательство. Сначала докажем включение $\Omega^0 \subset \Omega$, а затем – включение $\Omega \subset \Omega^0$.

Для доказательства включения $\Omega^0 \subset \Omega$ выберем произвольную точку $(t^0, x^0) \in \Omega^0$ и покажем, что $(t^0, x^0) \in \Omega$.

По определению Ω^0, найдется последовательность точек (2.3).

Зафиксируем произвольный номер n и рассмотрим точку $(t^n, x^n) \in \Omega_n$. Согласно определению $\Omega_n(t^n)$, найдется ломаная Эйлера $\tilde{y}_n[t]$, определенная на отрезке $[t^n, t_n]$, $t_n \geq t^n$, $t_n \in \Gamma_n$, и линейно постоянная на интервалах $(t^{(i)}, t^{(i+1)}) \subset [t^n, t_n]$ разбиения Γ_n:

$$\dot{\tilde{y}}_n[t] = \text{const} \in F(t^{(i+1)}, \tilde{y}_n[t^{(i+1)}]), \quad t \in (t^{(i)}, t^{(i+1)})$$

При этом выполнены следующие условия.

1°. В момент t^n ломаная $\tilde{y}_n[t]$ выходит из точки x^n:

$$\tilde{y}_n[t^n] = x^n \tag{3.1}$$

а в моменты $t^{(i)} \in [t^n, t_n]$ разбиения Γ_n удовлетворяет включению $\tilde{y}_n[t^{(i)}] \in \Phi(t^{(i)})_{\varepsilon^{(i)}}$.

2°. В момент t_n ломаная $\tilde{y}_n[t]$ приходит на множество T_n:

$$\tilde{y}_n[t_n] \in T_n(t_n) \tag{3.2}$$

3°. Момент $t^{(i)} = t_n$ – минимальный момент разбиения Γ_n, при котором ломаная $\tilde{y}_n[t]$ приходит на T_n:

$$\tilde{y}_n[t^{(i)}] \notin T_n(t^{(i)}), \quad t^{(i)} \in [t^n, t_n), \quad t^{(i)} \in \Gamma_n \tag{3.3}$$

Пусть $t_n^{(i)} = t_n - \Delta_n \in \Gamma_n$, рассмотрим отрезок $[t_n^{(i)}, t_n]$. Из включения (3.2), определения множества T_n и определения (2.1) следует, что найдется момент $\tau_n \in [t_n^{(i)}, t_n]$, при котором верно включение

$$\tilde{y}_n[\tau_n] \in T(\tau_n)_{K\Delta_n} \tag{3.4}$$

На $T(\tau_n)$ выберем точку y_n, ближайшую к $\tilde{y}_n[\tau_n]$. Выполнено неравенство

$$\|y_n - \tilde{y}_n[\tau_n]\| \le K\Delta_n \tag{3.5}$$

Таким образом, для каждого n определена ломаная Эйлера $\tilde{y}_n[t]$, $t \in [t^n, t_n]$, удовлетворяющая условиям (3.1)–(3.3), и определен момент τ_n, при котором выполнено включение (3.4). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что существует

$$\lim \tau_n = \bar{\tau} \tag{3.6}$$

Доопределим все функции $\tilde{y}_n[t]$, $t \in [t^n, t_n]$ на отрезок $I^0 = [t^0, \bar{\tau}]$. Каждой ломаной $\tilde{y}_n[t]$ поставим в соответствие функцию $\tilde{x}_n[t]$, $t \in I^0$:

$$\tilde{x}_n[t] = \begin{cases} \tilde{y}_n[t^n], & t \in [t^0, t^n] \\ \tilde{y}_n[t], & t \in (t^n, \tau_n), \\ \tilde{y}_n[\tau_n], & t \in [\tau_n, \bar{\tau}] \end{cases} \quad \tau_n < \bar{\tau}; \qquad \tilde{x}_n[t] = \begin{cases} \tilde{y}_n[t^n], & t \in [t^0, t^n] \\ \tilde{y}_n[t], & t \in (t^n, \bar{\tau}) \end{cases}, \quad \tau_n \ge \bar{\tau}$$

Из равноограниченной и равностепенно непрерывной последовательности $\{\tilde{x}_n[t]\}$ на отрезке I^0 выделим сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность $\{\tilde{x}_n[t]\}$ сходится, и пусть $x[t] = \lim \tilde{x}_n[t]$, $t \in I^0$.

Используя стандартные приемы, можно показать, что функция $x[t]$ – траектория включения (1.2), не покидающая фазовое ограничение Φ на всем отрезке I^0. Покажем, что $x[t^0] = x^0$. Действительно, из определения функции $x[t]$ и $\tilde{x}_n[t]$ имеем

$$x[t^0] = \lim \tilde{x}_n[t^0] = \lim \tilde{y}_n[t^n]$$

Отсюда, учитывая условие (3.1) и равенство $\lim x^n = x^0$, получаем $x[t^0] = x^0$.

Покажем теперь, что в момент $t = \bar{\tau}$ траектория $x[t]$ приходит на ЦМ. Действительно, аналогично предыдущему имеем

$$x[\bar{\tau}] = \lim \tilde{x}_n[\bar{\tau}] = \lim \tilde{y}_n[\tau_n] \tag{3.7}$$

(при записи последнего равенства использована сходимость (3.6)). Из неравенства (3.5) следует

$$\lim \tilde{y}_n[\tau_n] = \lim y_n \tag{3.8}$$

Поскольку $y_n \in T(\tau_n)$, в силу сходимости (3.6) и замкнутости ЦМ T получим

$$\lim y_n \in T(\bar{\tau}) \tag{3.9}$$

Из предельных соотношений (3.7)–(3.9) следует, что $x[\bar{\tau}] \in T(\bar{\tau})$.

Таким образом, траектория $x[t]$ выходит из точки (t^0, x^0) и содержится в Φ вплоть до момента $\bar{\tau}$ прихода на ЦМ T. Значит, $x[t]$ – ВТ включения (1.2). Следовательно, $(t^0, x^0) \in \Omega$. В силу произвольности выбора точки $(t^0, x^0) \in \Omega^0$ получаем $\Omega^0 \subset \Omega$.

Доказательство включения $\Omega \subset \Omega^0$. Выберем произвольную точку $(t^0, x^0) \in \in \Omega$ и покажем, что $(t^0, x^0) \in \Omega^0$.

Пусть $y[t]$, $t \in I^0 = [t^0, t^1]$ – ВТ включения (1.2), выходящая из точки (t^0, x^0); для нее выполнены следующие условия:

$$y[t] \in \Phi(t), \quad t \in I^0; \quad y[t^1] \in T(t^1); \quad y[t] \notin T(t), \quad t \in [t^0, t^1) \tag{3.10}$$

Для каждого натурального n обозначим через

$$t_n(t) = \min\{t^{(i)} \in \Gamma_n : t \le t^{(i)}\}, \quad t \in \mathcal{I} \tag{3.11}$$

момент разбиения Γ_n, ближайший к t справа.

Зафиксируем n и рассмотрим отрезок $[\bar{t}^n, \bar{t}_n]$, $\bar{t}^n = t_n(t^0)$, $\bar{t}_n = t_n(t^1)$. Из определения (3.11) следует

$$t^0 \in [\bar{t}^n - \Delta_n, \bar{t}^n]; \quad t^1 \in [\bar{t}_n - \Delta_n, \bar{t}_n] \tag{3.12}$$

Учитывая второе условие (3.10), второе включение (3.12) и определения множества T_n, получаем

$$y[t^1] \in T_n(\bar{t}_n) \tag{3.13}$$

Продолжим траекторию $y[t]$ на отрезок $[t^1, \bar{t}_n]$ произвольным образом, но так, чтобы она удовлетворяла включению

$\dot{y}[t] \in F(t, y[t])$ почти всюду на $[t^1, \bar{t}_n]$

Траектория $y[t]$ включения (1.2) на отрезке $[t^0, \bar{t}_n]$ уже не ВТ, но ее часть $y[t]$, $t \in \in [t^0, t^1]$ – ВТ.

С помощью попятной процедуры траектории $y[t]$, $t \in [t^0, \bar{t}_n]$, поставим в соответствие ломаную Эйлера. Полагаем

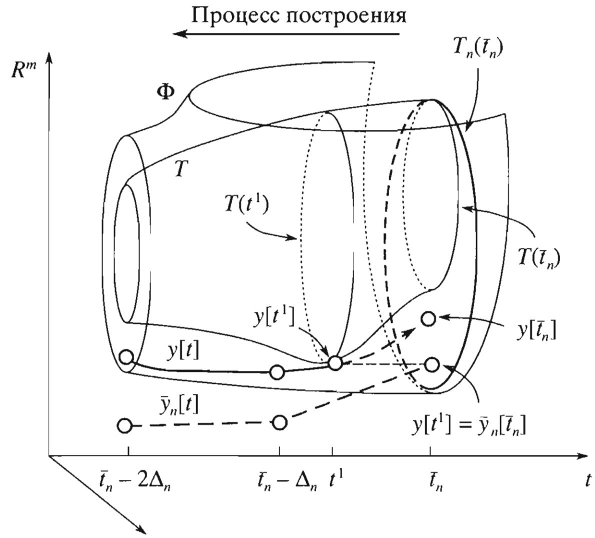
$$\tilde{y}_n[\bar{t}_n] = y[t^1] \tag{3.14}$$

Считая, что в момент $t^{(i+1)} \in \Gamma_n$ уже определено значение $\tilde{y}_n[t^{(i+1)}]$, построим вектор $f(t^{(i+1)})$ как удовлетворяющий двум следующим соотношениям:

$$f(t^{(i+1)}) \in F(t^{(i+1)}, \tilde{y}_n[t^{(i+1)}])$$
$$\langle f(t^{(i+1)}), s(t^{(i+1)})\rangle = \max\{\langle f, s(t^{(i+1)})\rangle : f \in F(t^{(i+1)}, \tilde{y}_n[t^{(i+1)}])\}$$

где вектор $s(t^{(i+1)}) = y[t^{(i+1)}] - \tilde{y}_n[t^{(i+1)}]$; здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов. Тогда в качестве значений $\tilde{y}_n[t]$, $t \in [t^{(i)}, t^{(i+1)})$ примем

$$\tilde{y}_n[t] = \tilde{y}_n[t^{(i+1)}] - (t - t^{(i+1)}) f(t^{(i+1)})$$



Фиг. 5

Тем самым ломаная Эйлера $\tilde{y}_n[t]$ на отрезке $[\bar{t}^n, \bar{t}_n]$ определена. В силу определения для нее в момент $\bar{t}_n$ справедлива оценка

$$\|\tilde{y}_n[\bar{t}_n] - y[\bar{t}_n]\| \le K\Delta_n$$

Более того, для всех моментов $t^{(i)} \in [\bar{t}^n, \bar{t}_n]$ верна оценка

$$\left\|\tilde{y}_n[t^{(i)}] - y[t^{(i)}]\right\| \le \varepsilon^{(i)} \tag{3.15}$$

Ломаная $\tilde{y}_n[t]$, $t \in [\bar{t}^n, \bar{t}_n]$, схематично изображена на фиг. 5.

Из соотношения (3.13) и определения (3.14) следует, что ломаная $\tilde{y}_n[t]$ приходит на дискретизацию ЦМ:

$$\tilde{y}_n[\bar{t}_n] \in T_n(\bar{t}_n) \tag{3.16}$$

Кроме того, из неравенств (3.15) и включения $y[t^{(i)}] \in \Phi(t^{(i)})$ получаем

$$\tilde{y}_n[t^{(i)}] \in \Phi(t^{(i)})_{\varepsilon^{(i)}}, \quad t^{(i)} \in [\bar{t}^n, \bar{t}_n]$$

Отсюда и из включения (3.16) следует

$$\tilde{y}_n[t^{(i)}] \in \Omega_n(t^{(i)}), \quad t^{(i)} \in [\bar{t}^n, \bar{t}_n] \tag{3.17}$$

Введем обозначение

$$y_n = \tilde{y}_n[\bar{t}^n] \tag{3.18}$$

Последовательность $\{(\bar{t}^n, y_n)\}$ сходится к точке (t^0, x^0). Действительно, из первого включения (3.12) вытекает, что $\lim \bar{t}^n = t^0$, откуда заключаем, что $\lim y[\bar{t}^n] = x^0$; из неравенства $\|y_n - y[\bar{t}^n]\| \leq \varepsilon^{(0)}$ (см. (3.15)) и утверждения 3 следует предельное соотношение

$$\lim y_n = \lim y[\bar{t}^n] = x^0 \tag{3.19}$$

Таким образом, из соотношений (3.17)–(3.19) следует, что найдена последовательность $(\bar{t}^n, y_n) \in \Gamma_n \times \Omega_n(\bar{t}^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая соотношению

$$(t_0, x_0) = \lim(\bar{t}^n, y_n)$$

Следовательно, $(t^0, x^0) \in \Omega^0$. Поскольку точка (t^0, x^0) выбрана произвольно в Ω, то $\Omega \subset \Omega^0$. Теорема доказана.

Приведенное доказательство теоремы не дает оценки сверху хаусдорфовых расстояний $d(\Omega(t^{(i)}), \Omega_n(t^{(i)}))$; для них можно указать лишь одностороннюю оценку: при всех натуральных n и $t^{(i)} \in \Gamma_n$ справедливо включение

$$\Omega(t^{(i)}) \subset \Omega_n(t^{(i)})_{\varepsilon^{(i)}}$$

Вывод этой оценки аналогичен выводу оценки из работы [9].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00769, 00-15-960571).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.* Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 304–315.
3. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
4. *Никольский М.С.* Об альтернативном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.
5. *Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.* О приближенном построении решений в игровых задачах управления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 413–421.
6. *Aubin J.-P.* Viability Theory. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1991.
7. *Saint-Pierre P., Quincampoix M.* An algorithm for viability Kernels in Holderian case: approximation by discrete dynamical systems // J. Math. System Estim. Control. 1995. V. 5. № 1. P. 115–118.
8. *Frankowska H., Plaskacz S., Rzezuchowski T.* Theoremes de viabilite mesurables et l'equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman // C. r. Acad. sci. Paris. Ser. 1. 1992. T. 315. P. 131–134.
9. *Незнахин А.А., Ушаков В.Н.* Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41. № 6. С. 895–908.
10. *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.

Москва, Екатеринбург
e-mail: a.neznakhin@mail.ru
ushak@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
29.XII.2004