УДК 62–50

© 2005 г. А. И. Короткий

РЕКОНСТРУКЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ

Рассматривается задача о восстановлении априори неизвестной обратной связи, функционирующей в управляемой динамической системе. Восстановление осуществляется по результатам наблюдений за движением этой системы и приближенным измерениям ее текущих фазовых положений. Хорошо известно, что эта задача некорректна. Для ее решения предлагаются два метода: статический и динамический. При решении задачи статическим методом исходной информацией для решения служат результаты приближенных измерений текущих фазовых положений системы на каком-либо заданном промежутке времени. Здесь восстановление осуществляется апостериорно по прошествии соответствующего промежутка времени наблюдения за движением по всей совокупности поступившей информации. Для решения задачи этим методом привлекаются понятия теории программного управления и теории некорректных задач. При решении задачи динамическим методом исходной информацией для решения служат результаты мгновенных приближенных измерений текущих фазовых положений системы, которые поступают наблюдателю в динамике в течение какого-либо заданного промежутка времени. Здесь измерения и восстановление осуществляются в динамике по ходу процесса по мгновенно поступающей информации. Для решения задачи динамическим методом привлекаются понятия теории позиционного управления и теории динамической регуляризации. Для решения задачи восстановления как тем, так и другим методом построены конструктивные устойчивые регуляризирующие алгоритмы. Динамические алгоритмы, кроме всего прочего, физически осуществимы и способны работать в режиме реального времени, обрабатывая поступающую по ходу движения системы информацию и выдавая результат в динамике по мере развития движения.

Обратные связи в динамической системе могут быть априори неизвестны и должны быть определены (восстановлены, реконструированы, идентифицированы) в результате наблюдений за объектом. Восстановленная обратная связь далее может быть использована для оперативного управления или более адекватного моделирования.

Отметим некоторые особенности статического и динамического подходов к рассматриваемой задаче. При статическом подходе к решению задачи данные для расчета известны априори, алгоритм восстановления не учитывает возможного изменения этих данных в процессе расчета, сам процесс расчета не является, вообще говоря, разовым, и его можно при необходимости повторить. Однако в некоторых инженерных и научных разработках часто возникает необходимость осуществить восстановление синхронно с развитием процесса. При этом данные для расчетов могут поступать только по ходу процесса и зависеть в настоящем от того, как проводилось восстановление в прошлом. С подобными задачами приходится сталкиваться в механике управляемого полета, в проблемах оперативной обработки информации при создании технологических и производственных процессов.

Подобного рода задачи для динамических систем изучались в разных постановках в теории управления, теории дифференциальных игр, теории оценивания и идентификации [1–4]. Постановки, о которых пойдет речь в данной работе, а также методы решения задач, с идейной точки зрения, основываются на подходах программного и позиционного управления [1–7] и подходах теории некорректных задач [8–10].

1. Постановка задачи. Опишем содержательную сторону задачи. Рассмотрим управляемую динамическую систему, поведение которой на заданном ограниченном отрезке времени $T = [t_0, \vartheta]$ $(-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty)$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + u[t], \quad t_0 \le t \le \vartheta, \quad x(t_0) = x_0; \quad x(t), \quad u[t] \in R^n \tag{1.1}$$

где $x(t)$ – вектор состояния системы в момент времени $t \in T$, $u[t]$ – вектор управляющего воздействия на систему в этот момент времени. Воздействие $u[t]$ формируется по принципу обратной связи

$$u[t] = A(t)x(t) + b(t), \quad t_0 \le t \le \vartheta$$

где $A(t)$ – некоторая $(n \times n)$-матрица, $b(t)$ – некоторый n-мерный вектор, определенные для моментов времени $t_0 \le t \le \vartheta$.

Пусть движение системы наблюдается в течение промежутка времени T и в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряются состояния системы $x(t)$, причем результаты этих измерений $y(t)$ удовлетворяют следующему критерию точности измерений :

$$\|x(t) - y(t)\| \le \delta, \quad t \in T$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма на R^n, δ – числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \le \delta \le \delta_0$.

Задача состоит в следующем. По результатам приближенных измерений $y = y(t)$ наблюдаемого движения системы $x = x(t)$ требуется приближенно восстановить реализации матриц $A = A(t)$ и векторов $b = b(t)$, которые определяют обратную связь и соответствуют результатам наблюдений. При этом результат $A_\delta = A_\delta(t)$ восстановления матриц $A = A(t)$ и результат $b_\delta = b_\delta(t)$ восстановления векторов $b = b(t)$ должны быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\int |||A(t) - A_\delta(t)|||^2 dt \to 0$$

$$\int \|b(t) - b_\delta(t)\|^2 dt \to 0, \quad \delta \to 0$$

Если не оговорено иное, все функции рассматриваются при $t \in T$ и интегрирование по t ведется по промежутку T; $|||\cdot|||$ – евклидова норма на матрицах $R^{n \times n}$. Считается, что определяющие обратную связь матрицы и векторы априори неизвестны, известны лишь их некоторые априорные оценки, известны также уравнения динамики процесса и начальное состояние системы. Эту задачу далее будем трактовать как задачу о реконструкции обратной связи.

Другой аспект сформулированной задачи связан с восстановлением неизвестной обратной связи в условиях, когда измерения состояний системы и восстановление искомых величин, определяющих обратную связь, должны осуществляться в динамике. Здесь задача состоит в том, чтобы по ходу процесса, по поступающим в распоряжение наблюдателя результатам приближенных измерений $y(t_i)$ в соответствующие дискретные моменты времени $t_i \in T$ текущих состояний системы $x(t_i)$, приближённо восстановить реализацию и динамику величин $A = A(t)$, $b = b(t)$, определяющих обратную связь, которая соответствует результатам наблюдения. При этом восстановление должно быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений и чем чаще производятся замеры состояний системы, т.е. для результатов динамического восстановления искомых величин $A_\delta^\Delta = A_\delta^\Delta(t)$, $b_\delta^\Delta = b_\delta^\Delta(t)$ должно выполняться условие

$$\int \left|\left|\left|A(t) - A_\delta^\Delta(t)\right|\right|\right|^2 dt \to 0, \quad \int \left\|b(t) - b_\delta^\Delta(t)\right\|^2 dt \to 0, \quad \delta \to 0, \quad \Delta \to 0$$

где Δ – диаметр разбиения отрезка T точками t_i, для которых

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_{m-1} < t_m = \vartheta$$

Диаметр разбиения Δ будет, как правило, выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ. В этой динамической постановке также считается, что определяющие обратную связь матрицы и векторы априори неизвестны, известны лишь их некоторые априорные оценки, известны также уравнения динамики процесса и начальное состояние системы.

Перейдем к математической формализации задачи. Пусть функция f непрерывна на множестве $T \times R^n$ и удовлетворяет на этом множестве условию подлинейного роста и локальному условию Липшица по переменной x (см., например, [5, 7, 11]). Пусть P – выпуклое ограниченное замкнутое множество матриц из пространства $R^{n \times n}$, U – множество всех измеримых отображений $A = A(\cdot)$: $T \to P$, Q – выпуклое ограниченное замкнутое множество векторов из пространства R^n, V – множество всех измеримых отображений $b = b(\cdot)$: $T \to Q$. Множество пар элементов $w = (A, b) \in W = U \times V$ определяет множество допустимых обратных связей в рассматриваемой задаче, сам элемент $w \in W$ иногда будем просто называть обратной связью. Для каждого элемента $w \in W$ существует единственное абсолютно непрерывное на промежутке T решение $x(\cdot) = x(\cdot; w) = x(t; w)$ задачи Коши (1.1). Это решение иногда будем называть движением динамической системы (1.1), порожденным обратной связью $w \in W$.

Введем множество всех возможных решений задачи Коши (1.1), отвечающих обратным связям $w \in W$:

$$X = \{x(\cdot) = x(\cdot; w) : w \in W\}$$

Для каждого движения $x(\cdot) \in X$ введем множество всех допустимых обратных связей, отвечающих данному движению:

$$W(x(\cdot)) = \{w \in W : x(\cdot) = x(\cdot; w)\}$$

и множество всех возможных измерений этого движения:

$$Y(x(\cdot), \delta) = \{y \in L_2(T; R^n) : \|x(t) - y(t)\| \le \delta\}$$

Задача состоит в построении алгоритма, который по любым допустимым измерениям текущих состояний наблюдаемого движения системы приближенно восстанавливает обратную связь системы, которая согласуется с результатами наблюдений за движением. Искомый алгоритм отождествим с семейством отображений (методов)

$$D = \{D_\delta : 0 \le \delta \le \delta_0\}, \quad D_\delta : L_2(T; R^n) \to E = L_2(T; R^{n \times n}) \times L_2(T; R^n)$$

Исходную задачу теперь можно сформулировать так: требуется построить алгоритм $D = \{D_\delta : 0 \le \delta \le \delta_0\}$, который на любом наблюдаемом движении $x(\cdot) \in X$ обладает регуляризирующим свойством:

$$r_\delta(x(\cdot)) \to 0, \quad \delta \to 0$$

$$r_\delta(x(\cdot)) = \sup\{\rho[D_\delta(y), W(x(\cdot))] : y \in Y(x(\cdot), \delta)\}$$

$$\rho[D_\delta(y), W(x)] = \min\{\|D_\delta(y) - w\|_E : w \in W(x)\}$$

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, отметим некоторые алгебраические и топологические свойства движений системы и введенных в рассмотрение множеств. Множество W выпукло, ограниченно замкнуто и поэтому слабо компактно в пространстве E; X – компактно в пространстве $C(T; R^n)$; для каждого $x(\cdot) \in X$ множество $W(x(\cdot))$ непусто, выпукло, ограниченно замкнуто и поэтому слабо компактно в пространстве E, оно имеет единственный элемент $w_*(x(\cdot))$ минимальной E-нормы; если $w_k \rightharpoonup w$ слабо в E, то имеет место сильная сходимость движений $x_k(\cdot) = x_k(\cdot; w_k) \to$ $\to x(\cdot) = x(\cdot; w)$ в пространстве $C(T; R^n)$ и тем более в пространстве $L_2(T; R^n)$. Из последнего свойства следует, в частности, что отображение

$$E \supset W \ni w \to x(\cdot; w) \in X \subset L_2(T; R^n)$$

вполне непрерывно и поэтому не может иметь непрерывного обратного отображения, даже если его рассматривать как многозначное отображение. Отсюда вытекает некорректность рассматриваемой задачи восстановления и необходимость привлечения методов регуляризации для ее решения. Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых функциональных пространств имеются, например, в [11, 12].

2. Решение задачи восстановления статическим методом. Построим искомый алгоритм. Для любых $\delta \in [0, \delta_0]$, $y \in L_2(T; R^n)$ определим реализацию метода $D_\delta(y)$ по правилу

$$D_\delta(y) = \eta \in W : F^*_\alpha(y) \le F_\alpha(\eta; y) \le F^*_\alpha(y) + \varepsilon \tag{2.1}$$

$$F^*_\alpha(y) = \min\{F_\alpha(s; y) : s \in W\}, \quad F_\alpha = F_\alpha(\eta; y) = \int \|x(t; \eta) - y(t)\|^2 dt + \alpha\|\eta\|^2_E \tag{2.2}$$

где $\alpha = \alpha(\delta)$ – положительный параметр регуляризации задачи, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ – неотрицательный параметр, характеризующий точность решения экстремальной задачи (2.1), он также будет параметром регуляризации.

Теорема 1. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют следующим условиям согласования :

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2)\alpha(\delta)^{-1} \to 0, \quad \varepsilon(\delta) \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0$$

Тогда алгоритм D, состоящий из методов (2.1), решает задачу восстановления, т.е. для любого наблюдаемого движения $x(\cdot) \in X$ при $\delta \to 0$ имеет место сходимость $r_\delta(x(\cdot)) \to 0$; более того, для реализаций алгоритма $\eta_\delta = D_\delta(y_\delta)$ при $\delta \to 0$ имеет место сильная в E сходимость $\eta_\delta \to w_*(x(\cdot))$, каковы бы ни случились при этом реализации измерений $y_\delta \in Y(x(\cdot), \delta)$.

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $x(\cdot) \in X$ и какие-нибудь зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, удовлетворяющие условию теоремы. Для доказательства теоремы достаточно показать, что каковы бы ни были числовая последовательность $\{\delta_k\} \subset [0, \delta_0]$, $\delta_k \to 0$, и последовательность элементов $\{y_k\}$, $y_k \in Y(x(\cdot), \delta_k)$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, имеет место сходимость

$$\rho[D_{\delta_k}(y_k), w_*(x(\cdot))] \to 0, \quad k \to \infty \tag{2.3}$$

Пусть выбраны и зафиксированы последовательности $\{\delta_k\}$ и $\{y_k\}$, описанные выше. Покажем справедливость соотношения (2.3). Учитывая определение элементов $\eta_k =$ $= D_{\delta_k}(y_k) \in W$, можем записать цепочку неравенств

$$\alpha(\delta_k)\|\eta_k\|^2_E \le F_{\alpha(\delta_k)}(\eta_k; y_k) \le F^*_{\alpha(\delta_k)}(y_k) + \varepsilon(\delta_k) \le F_{\alpha(\delta_k)}(w_*(x(\cdot)); y_k) + \varepsilon(\delta_k) \le$$

$$\leq \int \|x(t) - y_k(t)\|^2 dt + \alpha(\delta_k)\|w_*(x(\cdot))\|_E^2 + \varepsilon(\delta_k) \leq (\vartheta - t_0)\delta_k^2 + \alpha(\delta_k)\|w_*(x(\cdot))\|_E^2 + \varepsilon(\delta_k)$$

из которой следует неравенство

$$\|\eta_k\|_E^2 \leq (\vartheta - t_0)\delta_k^2\alpha(\delta_k)^{-1} + \varepsilon(\delta_k)\alpha(\delta_k)^{-1} + \|w_*(x(\cdot))\|_E^2 \tag{2.4}$$

Из этого неравенства в силу выбора параметров регуляризации следует ограниченность последовательности $\{\eta_k\}$ в рефлексивном банаховом пространстве E, поэтому из последовательности $\{\eta_k\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $\eta^* \in E$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что сама эта последовательность слабо в E сходится к элементу η^*.

Покажем теперь, что $\eta_k \to \eta^*$ сильно в E и $\eta^* = w_* = w_*(x(\cdot))$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int \|x(t;\eta^*) - x(t;w_*)\|^2 dt = \liminf \int \|x(t;\eta_k) - y_k(t)\|^2 dt \leq \liminf F_{\alpha(\delta_k)}(\eta_k; y_k) \leq$$

$$\leq \limsup F_{\alpha(\delta_k)}(\eta_k; y_k) \leq \limsup[(\vartheta - t_0)\delta_k^2 + \varepsilon(\delta_k) + \alpha(\delta_k)\|w_*\|_E^2] = 0, \quad k \to \infty$$

из которой следуют равенство и включение

$$\int \|x(t;\eta^*) - x(t;w_*)\|^2 dt = 0, \quad \eta^* \in W(x(\cdot)) \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.4) и (2.5) дополнительно получаем

$$\|w_*\|_E^2 \leq \|\eta^*\|_E^2 \leq \liminf\|\eta_k\|_E^2 \leq \limsup\|\eta_k\|_E^2 \leq \|w_*\|_E^2, \quad k \to \infty$$

откуда заключаем, что

$$\lim\|\eta_k\|_E^2 = \|\eta^*\|_E^2 = \|w_*\|_E^2, \quad k \to \infty$$

Тогда в силу единственности во множестве $W(x(\cdot))$ элемента минимальной E-нормы получаем равенство $\eta^* = w_*$ и в силу рефлексивности банахова пространства E из слабой сходимости элементов и сходимости их норм получаем сильную сходимость $\eta_k \to w_*$ в пространстве E. Таким образом, сходимость (2.3) имеет место.

Для решения экстремальной задачи (2.1) можно воспользоваться каким-нибудь из методов минимизации. Воспользуемся, к примеру, методом проекции градиента (см., например, [13, 14]). Вычислим сначала градиент функционала (2.2), полагая, что компоненты вектор-функции f непрерывно дифференцируемы по x на множестве $T \times R^n$.

Поскольку далее элемент $y \in Y(x(\cdot), \delta)$ в функционале $F_\alpha(w; y)$ будет оставаться фиксированным, этот функционал для краткости будем обозначать просто $F_\alpha(w)$.

Зафиксируем произвольный элемент $w = (A, b) \in W$ и дадим ему произвольное приращение $h = (A_h, b_h) \in E$. Тогда разность движений

$$z(\cdot) = x(\cdot; w + h) - x(\cdot; w)$$

удовлетворяет задаче Коши:

$$\dot{z}(t) = J(t, x(t))z(t) + G_1(x(t), z(t)) + G_2(x(t), z(t)), \quad t \in T, \quad z(t_0) = 0$$

$$G_1(x(t), z(t)) = f(t, z(t) + x(t)) - f(t, x(t)) - J(t, x(t))z(t)$$

$$G_2(x(t), z(t)) = A(t)z(t) + A_h(t)z(t) + A_h(t)x(t) + b_h(t)$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; w)$, $J(t, x(t))$ – якобиан векторной функции $f(t, x)$ по x.

Приращение функционала можно представить в виде

$$F_\alpha(w+h) - F_\alpha(w) = 2I_1 + I_2 + 2\alpha\langle w, h\rangle_E + \alpha\|h\|_E^2$$

$$I_1 = \int\langle x(t) - y(t), z(t)\rangle dt, \quad I_2 = \int\|z(t)\|^2 dt$$

Первый интеграл в этом равенстве можно преобразовать к виду

$$2I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}$$

$$I_{11} = \int\langle \psi(t), A_h(t)x(t) + b_h(t)\rangle dt$$

$$I_{12} = \int\langle \psi(t), A_h(t)z(t)\rangle dt, \quad I_{13} = \int\langle \psi(t), G_1(x(t), z(t))\rangle dt$$

где $\psi(\cdot) = \psi(\cdot; w)$ – решение следующей линейной задачи, которую далее будем называть сопряженной к задаче (1.1):

$$\dot\psi(t) = -J^*(t, x(t))\psi(t) - A^*(t)\psi(t) - 2(x(t) - y(t)), \quad \psi(\vartheta) = 0$$

Звездочка у матрицы обозначает сопряженную к ней матрицу.

Из условий, которым подчинены параметры задачи, следует существование такой постоянной $C > 0$, что для любых движений $x(\cdot) \in X$, обратных связей $w \in W$, чисел $\delta \in [0, \delta_0]$ и измерений $y \in Y(x(\cdot), \delta)$ справедливы неравенства

$$I_2 \le C\|h\|_E^2, \quad I_{12} \le C\|h\|_E^2, \quad I_{13} < C\|h\|_E^2$$

Линейную часть приращения функционала можно представить в виде

$$I_{11} = \int\langle\langle A[\psi(t), x(t)], A_h(t)\rangle\rangle dt + \int\langle \psi(t), b_h(t)\rangle dt = \langle g, h\rangle_E$$

$$g = (A[\psi, x], \psi) \in E, \quad A[\psi, x] = A[\psi(t), x(t)]$$

где $\langle\langle\cdot, \cdot\rangle\rangle$ – скалярное произведение в $R^{n\times n}$, $A[\psi(t), x(t)]$ – свертка двух векторов $\psi(t)$ и $x(t)$ в матрицу с элементами

$$A[\psi(t), x(t)]_{ij} = \psi_i(t)x_j(t), \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Из полученных оценок и представлений получаем

$$F_\alpha(w+h) - F_\alpha(w) = \int\langle g + 2\alpha w, h\rangle_E dt + o(\|h\|_E)$$

Значит, функционал F_α дифференцируем по Фреше в каждой точке и

$$F'_\alpha(w) = g + 2\alpha w \in E$$

причем

$$|o(\|h\|_E)| \le C_\alpha\|h\|_E^2, \quad C_\alpha = 3C + \alpha$$

Вычисление градиента $F'_\alpha(w)$ сводится к последовательному выполнению следующих действий: решению прямой задачи и нахождению ее решения $x(\cdot) = x(\cdot; w)$, решению сопряженной задачи и нахождению ее решения $\psi = \psi(\cdot; w)$, вычислению матрицы $A[\psi, x]$ и составлению элемента $g + 2\alpha w$, который и является искомым градиентом.

Отметим некоторые общие свойства градиента и задачи минимизации

$$F_\alpha(w) \to \min : w \in W \tag{2.6}$$

Градиент удовлетворяет условию Липшица на W, а его нелинейная часть $F_0'(w) = g$ – слабо-сильно непрерывное отображение $E \supset W \to E$. Функционал F_α ограничен на W; любое его множество уровня

$$M_\alpha(z) = \{w \in W : F_\alpha(w) \le F_\alpha(z)\}$$

ограниченно и слабо компактно в E; он слабо полунепрерывен снизу на W и достигает на W своего минимального значения

$$F_\alpha^* = \min\{F_\alpha(w) : w \in W\}$$

которое неотрицательно и конечно; множество всех минимизирующих функционал F_α элементов

$$W_\alpha^* = \{w \in W : F_\alpha(w) = F_\alpha^*\}$$

непусто и слабо компактно в E; любая минимизирующая последовательность задачи (2.6) сходится сильно в E ко множеству W_α^*; при любом $z \in W$ множество

$$S_\alpha^*(z) = \{w \in M_\alpha(z) : \langle F_\alpha'(w), \upsilon - w\rangle_E \ge 0 \quad \forall \upsilon \in W\}$$

всех стационарных точек функционала из множества уровня $M_\alpha(z)$ непусто и слабо компактно в E; если при каком-либо $z \in W$ множество

$$S_\alpha^0(z) = \{w \in M_\alpha(z) : F_\alpha'(w) = 0\}$$

непусто, то оно компактно в E.

Рассмотрим для задачи минимизации (2.6) итерационный процесс метода проекции градиента ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

$$w_{k+1} = \Pr(w_k - \gamma_k F_\alpha'(w_k)), \quad w_0 \in W, \quad \sigma_1 \le \gamma_k \le 2/(L + 2\sigma_2)$$

где σ_1 и σ_2 – положительные числа, являющиеся параметрами метода; L – постоянная Липшица градиента F_α' на множестве W; Pr – оператор проектирования на W (проекция существует и единственна).

Теорема 2. Каково бы ни было начальное приближение $w_0 \in W$, последовательность $\{w_k\}$ метода проекции градиента является релаксационной и слабо сходящейся в E ко множеству $S_\alpha^*(w_0)$; кроме того, имеют место сходимости

$$\langle F_\alpha'(w_k), w_{k+1} - w_k\rangle_E \to 0, \quad \|w_{k+1} - w_k\|_E \to 0, \quad k \to \infty$$

Если при некотором $z^* \in W$ имеет место включение $w_0 \in M_\alpha(z^*) \subseteq W$, то дополнительно имеем сильную сходимость в E

$$F_\alpha'(w_k) \to 0, \quad w_k \to S_\alpha^0(w_0), \quad k \to \infty$$

Если, кроме того, для некоторой постоянной $d > 0$ на элементах $w \in M_\alpha(w_0)$ выполняется неравенство

$$\|F_\alpha'(w)\|_E \ge d(F_\alpha(w) - F_\alpha^*)$$

то последовательность $\{w_k\}$ является минимизирующей и справедлива следующая оценка скорости сходимости для функционала:

$$0 \le F_\alpha(w_k) - F_\alpha^* \le C^* k^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad C^* = \text{const} \ge 0$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобных утверждений ([13], теоремы 8.4.1 и 8.4.2).

3. Решение задачи восстановления динамическим методом. Соответствующие мотивировки и различные примеры содержательных обратных задач, в которых важно получить динамические решения, приведены, например, в [1, 15–30]. В искомом алгоритме D, который должен решать задачу восстановления, каждый метод D_δ отождествим с семейством отображений

$$D_\delta = \{D_\delta^t : t_0 \le t \le \vartheta\}, \quad D_\delta^t : R^n \times R^n \to P \times Q \tag{3.1}$$

Функцию $w_\delta = w_\delta(\cdot; y) : [t_0, \vartheta] \to P \times Q$, определенную равенством

$$w_\delta(t) = D_\delta^t(y(t), z(t))$$

назовем реализацией алгоритма D на измерении $y \in Y(x(\cdot), \delta)$ и обозначим символом $D_\delta(y)$. Иногда будем детализировать это обозначение $D_\delta(y) = (A_\delta(\cdot), b_\delta(\cdot))$. Переменная z является здесь внутренней переменной алгоритма. Ее значение $z = z(t)$ в момент времени t однозначно формируется на основании сложившейся к этому моменту времени доступной информации $y(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$, о движении системы. Правило формирования переменной $z = z(t)$ сформулируем ниже, когда речь пойдет о конкретном способе построения алгоритма.

Исходную задачу теперь можно сформулировать так: требуется построить алгоритм D, который состоит из методов (3.1) и который на любом наблюдаемом движении $x(\cdot) \in X$ обладает регуляризирующим свойством $r_\delta(x(\cdot)) \to 0$, $\delta \to 0$.

Приступим к построению алгоритма, решающего поставленную задачу. Для построения искомого алгоритма воспользуемся методом динамической регуляризации с моделью, описанным ранее [1, 15]. В построениях будет участвовать такой гипотетический объект, как модель исходной системы. С помощью этой модели будут формироваться значения вспомогательной внутренней переменной для соответствующего алгоритма. Однако эта гипотетическая модель вполне реально может быть реализована на компьютере.

Для любых $t \in T$, $\delta \in [0, \delta_0]$, $y \in R^n$, $z \in R^n$ определим значение отображения D_δ^t в точке (y, z) по правилу

$$D_\delta^t(y, z) = \eta = (A_\eta, b_\eta) \in P \times Q$$

$$H(\eta) \le \min\{H(s) : s = (A_s, b_s) \in P \times Q\} + \varepsilon(\delta) \tag{3.2}$$

$$H(s) = 2\langle z - y, A_s y + b_s\rangle + \alpha(\delta)(|||A_s|||^2 + \|b_s\|^2)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $\alpha = \alpha(\delta)$ – положительные параметры регуляризации.

Значение $z(t)$ внутренней переменной z для момента времени $t \in T$ определим как значение в этот момент времени решения задачи Коши для системы–модели

$$\dot{z}(\tau) = f(\tau, z(\tau)) + A_\delta(\tau)z(\tau) + b_\delta(\tau), \quad t_0 \le \tau \le t, \quad z(t_0) = x_0$$

Решение этой задачи Коши, с практической вычислительной точки зрения, удобно осуществлять по дискретной схеме подобно тому, как решение обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется по схеме Эйлера [7]. В связи с этим опишем функционирование алгоритма восстановления в динамике в дискретной по времени схеме.

Сначала задаются какие-либо зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $\alpha = \alpha(\delta)$ и какое-либо разбиение T на промежутки $[t_0, t_1), \ldots, [t_i, t_{i+1}), \ldots, [t_{m-1}, \vartheta]$ точками $t_i : t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \vartheta$. Диаметр Δ этого разбиения будет выбираться в зависимости от величины точности измерений δ, $\Delta = \Delta(\delta)$.

Построение реализации алгоритма опишем по шагам. Пусть наблюдение осуществляется за каким-либо движением $x(\cdot) \in X$. Реконструкции подлежит какая-нибудь обратная связь $w = (A, b) \in W(x(\cdot))$.

Шаг $i = 0$. В момент времени t_0 наблюдателю поступает информация в виде измерения $y(t_0)$ состояния движения $x(t_0)$. Положив $y = y(t_0)$ и $z = y(t_0)$, наблюдатель в момент времени t_0 по правилу (3.2) определяет реализацию метода

$$D_\delta^{t_0}(y, z) = (A_\delta(t_0), b_\delta(t_0))$$

Постоянная по времени функция

$$w_\delta^{(0)}(t, \cdot) = D_\delta^{t_0}(y, z), \quad t_0 \le t < t_1$$

принимается за приближение к искомой обратной связи w на промежутке времени $t_0 \le t < t_1$. Затем для промежутка $[t_*, t^*] = [t_0, t_1]$ решается задача Коши для системы–модели

$$\dot{z}(\tau) = f(\tau, z(\tau)) + A_\delta(t_*)z(\tau) + b_\delta(t_*), \quad t_* \le \tau \le t^*, \quad z(t_*) = z \tag{3.3}$$

и запоминается состояние $z(t^*)$ ее решения.

Шаг $i = 1$. В момент времени t_1 наблюдателю поступает информация в виде измерения $y(t_1)$ состояния движения $x(t_1)$. Положив $y = y(t_1)$ и $z = z(t_1)$, наблюдатель по правилу (3.2) определяет реализацию метода

$$D_\delta^{t_1}(y, z) = (A_\delta(t_1), b_\delta(t_1))$$

Постоянная по времени функция

$$w_\delta^{(1)}(t, \cdot) = D_\delta^{t_1}(y, z), \quad t_1 \le t < t_2$$

принимается за приближение к искомой обратной связи w на промежутке времени $t_1 \le t < t_2$. Затем для промежутка $[t_*, t^*] = [t_1, t_2]$ решается задача Коши (3.3) и запоминается состояние $z(t^*)$ этого решения.

Следующие шаги для $i = 2, \ldots, m-1$ аналогичны шагу $i = 1$. Таким образом, последовательно по ходу процесса (в динамике) к конечному моменту времени $t_m = \vartheta$ будет получена кусочно-постоянная по времени реализация метода

$$D_\delta(y) = w_\delta(t) = w_\delta^{(i)}(t), \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, m-1 \tag{3.4}$$

Из описания работы алгоритма во времени видна возможность его реализации в режиме реального времени.

Теорема 3. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и величина диаметра $\Delta = \Delta(\delta)$ разбиения отрезка времени T удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2 + \Delta(\delta)^{1/2})\alpha(\delta)^{-1} \to 0, \quad \varepsilon(\delta) \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0$$

Тогда алгоритм D, состоящий из методов (3.4), решает задачу восстановления, т.е. для любого наблюдаемого движения $x(\cdot) \in X$ при $\delta \to 0$ имеет место сходимость $r_\delta(x(\cdot)) \to 0$; более того, для реализаций алгоритма $w_\delta = D_\delta(y_\delta)$ при $\delta \to 0$ имеет место сильная в E

сходимость $w_\delta \to w_*(x(\cdot))$, каковы бы ни случились при этом реализации измерений $y_\delta \in Y((x(\cdot)), \delta)$.

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $x(\cdot) \in X$ и какие-нибудь зависимости

$$\alpha = \alpha(\delta), \quad \varepsilon = \varepsilon(\delta), \quad \Delta = \Delta(\delta)$$

удовлетворяющие условию теоремы. Для доказательства теоремы достаточно показать, что каковы бы ни были числовая последовательность $\{\delta_k\} \subset [0, \delta_0]$, $\delta_k \to 0$, и последовательность элементов $\{y_k\}$, $y_k \in Y(x(\cdot), \delta_k)$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, имеет место сходимость

$$\rho[D_{\delta_k}(y_k), w_*(x(\cdot))] \to 0, \quad k \to \infty; \quad w_* = w_*(x(\cdot)) = (A_*, b_*) \tag{3.5}$$

Фиксируем какие-нибудь последовательности $\{\delta_k\}$ и $\{y_k\}$, удовлетворяющие указанным выше условиям. Покажем справедливость соотношения (3.5).

Принимая во внимание правило формирования реализации алгоритма

$$w_k = D_{\delta_k}(y_k) = (A_k, b_k)$$

можно получить следующую оценку для функционала Λ_k:

$$\Lambda_k(t) = \|x(t) - z_k(t)\|^2 + \alpha(\delta_k)\int_{t_0}^{t}\Omega_k(\tau)d\tau \le \nu_k$$

$$\Omega_k(t) = |||A_k(t)|||^2 + \|b_k(t)\|^2 - |||A_*(t)|||^2 - \|b_*(t)\|^2$$

$$\nu_k = C_*[\varepsilon(\delta_k) + \delta_k^2 + \Delta(\delta_k)^{1/2}]$$

где C_* – некоторая положительная постоянная, которая не зависит от k и определяется только по априори известным данным о системе и задаче; z_k – движение системы–модели, отвечающее обратной связи w_k (построение этого движения подробно описано выше).

Из выписанной оценки получаем

$$\max\{\|x(t) - z_k(t)\|^2 : t \in T\} \le \nu_k + 2\alpha(\delta_k)(\vartheta - t_0)\Omega_0 \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}\Omega_0 = \max\{|||A|||^2 + \|b\|^2 : A \in P, b \in Q\} \\ \|w_k\|_E^2 \le \|w_*\|_E^2 + \nu_k\alpha(\delta_k)^{-1}\end{gathered} \tag{3.7}$$

Учитывая слабую компактность множества W в гильбертовом пространстве E, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что для некоторого элемента $w^* \in W$

$$w_k \rightharpoonup w^* \text{ слабо в } E \tag{3.8}$$

Тогда при любом $t \in T$ имеем сходимость в R^n

$$z_k(t) = z_k(t; w_k) \to x(t) = x(t; w^*) \tag{3.9}$$

Из соотношений (3.6) и (3.9) получаем тогда равенства $x(t; w_*) = x(t; w^*)$, из которых следует, что $w^* = w_*$. Из свойств (3.7), (3.8) и последнего равенства получаем цепочку неравенств

$$\|w^*\|_E \le \liminf\|w_k\|_E \le \limsup\|w_k\|_E \le \|w^*\|_E, \quad k \to \infty$$

из которой следует сходимость норм в гильбертовом пространстве E

$$\|w_k\|_E \to \|w^*\|_E$$

Если учесть теперь слабую сходимость (3.8), то получим сходимость

$$w_k \to w_* \text{ сильно в } E$$

Таким образом, сходимость (3.5) имеет место.

4. Замечания. 1°. Наложенные ограничения на параметры задачи обеспечивают также сходимость найденных приближений обратной связи в пространстве $L_q(T; R^{n \times n}) \times \times L_q(T; R^n)$ при любом $q \in [1, \infty)$. Это следует из сходимости приближений в E и ограниченности множества W в $L_\infty(T; R^{n \times n}) \times L_\infty(T; R^n)$.

2°. Полученные результаты справедливы и для нелинейной обратной связи вида

$$u[t] = A(t)\varphi(t, x(t)) + b(t), \quad t_0 \le t \le \vartheta$$

где φ – некоторая известная функция с такими же свойствами, что и функция f. При этом при решении задачи восстановления статическим методом формулировки теорем 1 и 2 остаются прежними, только при вычислении градиента функционала (2.2) в сопряженной задаче выражение $A^*(t)\psi(t)$ следует заменить на выражение $J^*_\varphi(t, x(t))A^*(t)\psi(t)$, где $J_\varphi(t, x)$ – якобиан векторной функции $\varphi = \varphi(t, x)$ по переменной x. При решении задачи восстановления динамическим методом формулировка теоремы 3 остается прежней, только в выражении для функционала H слагаемое $A_s y$ следует заменить на слагаемое $A_s\varphi(t, y)$, а в правой части системы–модели слагаемое $A_\delta(t)z(t)$ следует заменить на $A_\delta(t)\varphi(t, z(t))$.

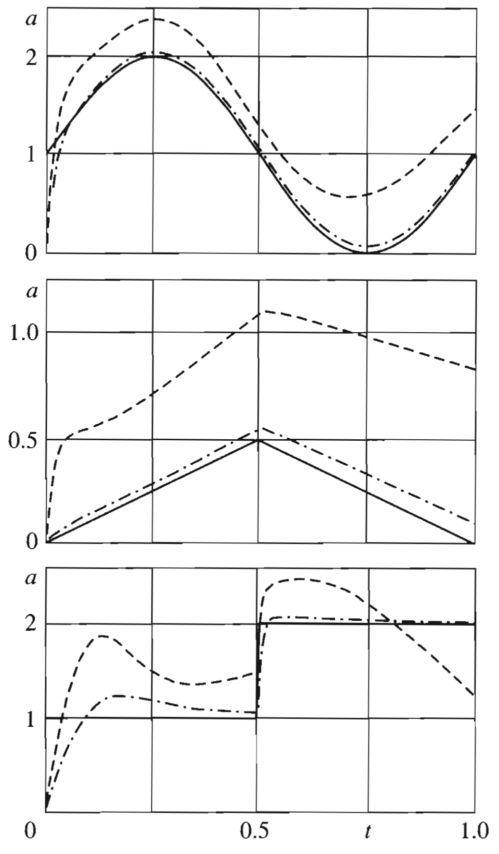
3°. Построенные регуляризирующие алгоритмы решения задачи восстановления обладают свойством равномерной регуляризируемости на множествах движений, отвечающих компактным множествам допустимых обратных связей. Пусть W_* – компактное в E подмножество W и X_* – множество всех движений, отвечающих обратным связям из W_*; тогда

$$\sup\{r_\delta(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X_*\} \to 0, \quad \delta \to 0$$

4°. В рассматриваемой задаче, как и в аналогичных задачах, решавшихся, например, в [1, 15–30], могут быть установлены соответствующие оценки скорости сходимости методов, а также установлены сходимости в более сильных метриках.

5°. Полученные здесь результаты могут быть легко распространены на широкие классы задач, в которых объекты описываются системами с распределенными параметрами (см., к примеру, [15–30]).

6°. В приложениях часто требуется, чтобы соответствующий оператор решения обратной задачи обладал свойством физической осуществимости: результаты восстановления совпадают во времени до тех пор, пока совпадает во времени поступающая на вход информация. Отметим, что оператор решения прямой задачи обладает этим свойством. Оператор динамического восстановления обратной связи также обладает этим свойством. Свойство физической осуществимости оператора решения обратной задачи оказывается чрезвычайно важным в ситуациях, когда результаты восстановления используются в системах обратной связи и тут же по ходу процесса должны использоваться в системе (таково положение дел в системах автоматического регулирования) или когда речь идет о разовом вычислении при отсутствии возможности повторить вычисления, не вернувшись во времени назад (таково положение дел в системах оперативной обработки информации). Отметим, что апостериорные методы решения обратных задач динамики, среди которых широко распространены градиентные методы, свойством физической осуществимости, как правило, не обладают.



5. Пример. Приведем результаты численного моделирования по динамическому восстановлению обратной связи $u[t] = a(t)x(t)$ в динамической системе

$$\dot{x}(t) = x(t)\sin x(t) + u[t], \quad t_0 \le t \le \vartheta, \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in R$$

В соответствии с описанным выше методом осуществлялось восстановление обратных связей со следующими функциями $a(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$: $a(t) = 1 + \sin 2\pi t$ ("гладкая" обратная связь); $a(t) = t$ при $t_0 \le t \le t_1$, $a(t) = a_0 - t$ при $t_1 < t \le \vartheta$ (обратная связь с "изломом"); $a(t) = a_1$ при $t_0 \le t \le t_1$, $a(t) = a_2$ при $t_1 < t \le \vartheta$ ("разрывная" обратная связь). При этом для обратной связи использовалась априорная информация

$$P = [b_1, b_2], \quad -\infty < b_1 < b_2 < +\infty$$

Помеха измерений моделировалась соотношением

$$y(t) = x(t) + \delta \sin pt, \quad p = \text{const}$$

Были приняты следующие согласования параметров регуляризации :

$$\varepsilon(\delta) = 0, \quad \alpha(\delta) = \delta^{1/3}, \quad \Delta(\delta) = \delta$$

На фигуре приведены результаты расчетов по восстановлению указанных обратных связей при следующих значениях параметров задачи:

$$t_0 = 0, \quad \vartheta = 1, \quad x_0 = 1, \quad t_1 = 0.5, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 3, \quad p = 1.$$

Сплошной линией показана восстанавливаемая функция (обратная связь) $a = a(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta$, штриховой – результат восстановления при $\delta = 1$, штрихпунктирной – при $\delta = 0.1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00098) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
4. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 332 с.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
6. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
9. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
10. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
11. *Warga J.* Optimal Control of Differential and Functional Equations. N.Y.; L.: Acad. Press, 1972 = *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
12. *Yoshida K.* Functional Analysis. Berlin: Springer, 1966 = *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
13. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.
14. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
15. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
16. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
17. *Вдовин А.Ю.* Оценки погрешности в задаче восстановления управления // Задачи позиционного моделирования. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1986. С. 3–11.
18. *Максимов В.И.* О моделировании управлений в параболических вариационных неравенствах // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 9. С. 1603–1609.
19. *Короткий А.И.* Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 101–124.
20. *Короткий А.И.* О восстановлении местоположения и интенсивности источников возмущений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 219–227.
21. *Короткий А.И., Цепелев И.А.* Верхняя и нижняя оценки точности в задаче динамического определения параметров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 228–238.
22. *Короткий А.И.* Восстановление множества управлений по измерениям состояний эволюционной системы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 440–446.

23. *Короткий А.И.* Восстановление управлений и параметров динамических систем при неполной информации // Изв. вузов. Математика. 1998. № 11. С. 47–55.
24. *Korotkii A.I., Tsepelev I.A.* On an inverse dynamic problem for Goursat – Darboux system // J. Math. Systems, Estimation and Control. 1998. V. 8. № 2. P. 181–184.
25. *Короткий А.И.* Восстановление управлений в условиях неполной информации о динамике системы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 566–575.
26. *Короткий А.И.* О динамической реконструкции управлений и параметров в условиях неполной информации о системе // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 11. С. 1482–1486.
27. *Короткий А.И.* Динамическое восстановление управлений в условиях неопределенности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 21–24.
28. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев И.А.* Трехмерное моделирование обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. 2003. Т. 43. № 4. С. 614–626.
29. *Korotkii A.I., Tsepelev I.A.* Solution of a retrospective inverse problem for a nonlinear evolutionary model // Proc. Steklov Inst. Mathematics. Suppl. 2. 2003. = Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9. № 2. С. 80–94.
30. *Ismail-Zadeh A.T., Schubert G., Tsepelev I.A., Korotkii A.I.* Inverse problem of thermal convection: numerical approach and application to mantle plume restoration // Phys. Earth and Planetary Interiors. 2004. V. 145. № 1–4. P. 99–114.

Екатеринбург
e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
10.VIII.2004