УДК 531.36:534.1; 62-50

© 2005 г. Л. Д. Акуленко

УПРАВЛЕНИЕ ЭВОЛЮЦИЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Исследуется управляемая динамическая система, подверженная высокочастотным воздействиям. Посредством замены переменных, обобщающей замену Н.Н. Боголюбова в задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса, построена стандартная управляемая система. Разработана конструктивная методика приближенного решения задачи оптимального управления на асимптотически большом интервале изменения аргумента. По медленным переменным и функционалу установлено свойство близости приближенного и точного решений. Дано обобщение алгоритма решения на динамические системы с переменными параметрами. Эффективность подхода иллюстрируется исследованием задач управления механическими системами: колебаниями и вращениями твердого тела с вибрирующей осью и движением "микрочастицы" в силовом поле, моделируемом бегущей и стоячей волнами.

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая динамическая система, подверженная высокочастотным периодическим воздействиям [1]. Считается, что уравнения движения (например, в форме Лагранжа) допускают представление в безразмерных величинах

$$\begin{gathered} \ddot{q} = Q(\theta, q, \dot{q}, u, \lambda), \quad q(t_0) = q^0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}^0 \\ \theta = \lambda t, \quad t_0 \le t \le T, \quad \lambda \gg 1, \quad u \in U, \quad q \in D_q, \quad \dot{q} \in D_{\dot{q}} \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь точкой обозначена производная по времени t; $(q, \dot{q})$ – $2n$-вектор фазовых переменных, θ – быстрая фаза внешнего периодического воздействия, u – r-вектор управления, U – фиксированное множество. Числовой параметр λ может принимать асимптотически большие значения ($\lambda \to \infty$), т.е. $\varepsilon = \lambda^{-1}$ – малый параметр. Считается, что величины $|q|$, $|\dot{q}|$, $|u|$ имеют порядок единицы по отношению к большому параметру λ. Значения t_0, q^0, $\dot{q}^0$, предполагаются заданными, управляемое движение системы (1.1) рассматривается на фиксированном интервале времени $t_0 \le t \le T$ (порядка единицы). Функция Q должна быть 2π-периодической и кусочно-непрерывной по θ; относительно остальных аргументов она считается достаточно гладкой. Структурные характеристики и свойства гладкости функций Q, u уточняются ниже. Они обусловлены возможностью приведения задачи управления и оптимизации для системы (1.1) к стандартной форме, допускающей применение асимптотических методов [1–3].

Приведем постановку задачи оптимального управления. Предположим, что конечные условия, налагаемые на переменные q, $\dot{q}$ в фиксированный момент времени $t = T$, имеют общий вид

$$M(q, \dot{q})|_T = 0, \quad M = (M_1, \ldots, M_m), \quad 0 \le m \le 2n \tag{1.2}$$

В частности, условия (1.2) могут отсутствовать ($m = 0$), либо соответствовать двухточечной задаче: $q(T) = q^T$, $\dot{q}(T) = \dot{q}^T$, где q^T, $\dot{q}^T$ известны. Вектор-функция M предполагается достаточно гладкой в рассматриваемой области, а возможная регулярная зависимость от λ, например гладкая зависимость от ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, не указывается для краткости.

Критерий качества управления принимается в виде интегрального функционала

$$J[u] = g(q, \dot{q})|_T + \int_{t_0}^{T} G(\theta, q, \dot{q}, u)dt \to \min_u, \quad u \in U \tag{1.3}$$

Зависимости функций g и G от аргументов аналогичны указанным выше соответственно для функций M и Q. При фиксированном значении λ соотношения (1.1)–(1.3) определяют стандартную постановку задачи оптимального управления на фиксированном интервале времени, решение которой строится на основе необходимых условий в форме принципа максимума [4].

Отметим, что зависимость функций Q и G от быстрой фазы существенно затрудняет как аналитическое, так и численное исследование задачи оптимального управления вследствие осцилляции правых частей уравнений во времени со сколь угодно высокой частотой λ. Однако при выполнении некоторых естественных условий этим свойством можно воспользоваться для построения приближенного решения посредством приведения уравнений краевой задачи принципа максимума к стандарной по Боголюбову форме и применения метода усреднения [5, 6] согласно известной методике [2, 3]. Эти условия связаны с возможностью использования замены переменных [1], обобщающей замену Н.Н. Боголюбова в классической задаче о колебаниях плоского маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса [5].

2. Приведение задачи управления к стандартной форме. Сперва производится элементарная замена аргумента времени t на быструю фазу $\theta = \lambda t$, изменяющуюся на асимптотически большом промежутке $\Delta\theta = \lambda\Delta t \sim \varepsilon^{-1}$. Тогда соотношения (1.1) примут вид

$$\begin{gathered} q'' = \varepsilon^2 Q(\theta, q, \varepsilon^{-1}q', u, \varepsilon^{-1}), \quad q(\theta_0) = q^0, \quad q'(\theta_0) = \varepsilon\dot{q}^0 \\ \theta_0 = \lambda t_0, \quad \Theta = \lambda T \gg 1, \quad \theta_0 \le \theta \le \Theta \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь штрих означает производную по фазе θ. Отметим, что начальное значение производной $q' \sim \varepsilon \ll 1$. Основное требование замены к структуре функции Q заключается в том, чтобы переменная q была медленной на рассматриваемом интервале $\Delta\theta$ (2.1).

Следуя известному подходу [1, 5], предположим, что правая часть уравнения (2.1) имеет вид

$$\varepsilon^2 Q \equiv \varepsilon R(\theta, q, q') + \varepsilon^2 S(\theta, q, \varepsilon^{-1}q', u) \tag{2.2}$$

Здесь R, S – 2π-периодические кусочно-непрерывные функции θ, регулярно зависящие от указанных аргументов в области $q \in D_q$, $\varepsilon^{-1}q' \in D_{\dot{q}}$, $u \in U$. Возможная регулярная зависимость от малого параметра ε не указывается ради краткости записи.

Класс функций Q (1.1) или (1.2), удовлетворяющих условию (2.2), достаточно широк. В прикладных задачах (системы с быстро вращающейся фазой [5]) обычно имеет место ситуация, когда $R \equiv 0$, т.е. $Q = S$. Согласно представлению (2.2) при $R \equiv 0$ допускается зависимость $Q \sim \lambda$, что существенно обобщает класс функций Q [1, 5].

Для представимости системы (2.1), (2.2) в стандартной форме с малым параметром ε на интервале $\Delta\theta \sim \varepsilon^{-1}$ достаточно потребовать выполнения условия

$$\langle R_0 \rangle \equiv 0, \quad R_0 = R(\theta, q, 0), \quad \theta \ge \theta_0, \quad q \in D_q \tag{2.3}$$

где угловые скобки означают усреднение по θ. Тогда может быть предложена замена $(q, q') \to (x, y)$, в которой оба n-вектора x, y медленные: $x' \sim \varepsilon$, $y' \sim \varepsilon$. Действительно, полагаем

$$q = x + \varepsilon R^{**}(\theta, x), \quad q' = \varepsilon y + \varepsilon \Delta R^*(\theta, x); \quad R^* = \int_{\theta_0}^{\theta} R_0(\tau, x) d\tau, \quad R^{**} = \int_{\theta_0}^{\theta} \Delta R^*(\tau, x) d\tau \tag{2.4}$$

$$x \in D_q, \quad [y + \Delta R^*(\theta, x)] \in D_{\dot{q}}, \quad \Delta R^* \equiv R^* - \langle R^* \rangle$$

Замена $q \to x$ (2.4) близка к тождественной и не зависит от y; связь q' и y зависит от x и предполагает малость q' ($q' \sim \varepsilon$; $x, y \sim 1$). Согласно условию (2.3) функции R^*, R^{**} будут 2π-периодическими по θ и ограниченными для всех $\theta \geq \theta_0$, $x \in D_q$. Существенно, что замена (2.4) не содержит неизвестной функции u.

При условии гладкости вектор-функции R_0 по q продифференцируем формулы замены (2.4) в силу системы (2.1), (2.2). Получим систему двух векторных уравнений стандартного вида [2, 3]

$$x' = \varepsilon X(\theta, x, y, \varepsilon), \quad x(\theta_0) = q^0; \quad y' = Y(\theta, x, y, u, \varepsilon), \quad y(\theta_0) = \dot{q}^0$$

$$\begin{aligned} &X \equiv [I + \varepsilon R_x^{**\prime}(\theta, x)]^{-1} y = y - \varepsilon R_x^{**\prime} y + \varepsilon^2 \ldots \\ &Y \equiv -\Delta R_x^{*\prime}(\theta, x) X + \varepsilon^{-1} [R(\theta, x + \varepsilon R^{**}, \varepsilon y + \varepsilon \Delta R^*) - R_0(\theta, x)] + \\ &+ S(\theta, x + \varepsilon R^{**}, y + \Delta R^*, u) = -\Delta R_x^{*\prime} X + R'_{0x} R^{**} + (R'_{q'})_0 (y + \Delta R^*) + S + \varepsilon \ldots \end{aligned} \tag{2.5}$$

Функции X, Y (2.5) считаются гладкими по x, y, u в указанных выше областях при $\varepsilon > 0$ достаточно малом. Функция X линейна по y и в первом приближении: $X = X_0 = y$; кроме того, она не зависит от u. Функция $Y \approx Y_0$ квадратична относительно R. В этом состоит существенное структурное отличие системы (2.5) от исследованных ранее слабоуправляемых систем стандартного вида [2, 3].

Медленная переменная x близка q с погрешностью $O(\varepsilon)$ на интервале $\Delta\theta \sim \varepsilon^{-1}$, т.е. $\Delta t \sim 1$. Медленная переменная y на величину $\Delta R^* \sim 1$ отличается от скорости $\dot{q}$, которая не является медленной в общепринятом смысле [5, 6] и, более того, $\ddot{q} \sim \varepsilon^{-1}$. Однако оба вектора q, $\dot{q}$ определяются с требуемой степенью точности (погрешностью $O(\varepsilon)$).

Отметим, что при $R \equiv 0$ преобразования (2.4) становятся элементарными: $q = x$, $q' = \varepsilon y$, а система (2.5) принимает вид

$$x' = \varepsilon y, \quad x(\theta_0) = q^0; \quad y' = \varepsilon S(\theta, x, y, u), \quad y(\theta_0) = \dot{q}^0 \tag{2.6}$$

В общем случае система вида $\ddot{\varphi} = \varepsilon \Phi$ является многофазной (функция Φ периодична по φ) и представляет значительные трудности для асимптотического анализа [7]. Локальное исследование проводится обычно в предположении $\dot{\varphi} = \sqrt{\varepsilon}\,\omega$ на интервале времени $\Delta t \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$ [6].

Система уравнений вида (2.1), (2.2) может быть исходной и получена без преобразования аргумента $\theta = \lambda t$ в предположении асимптотической неограниченности параметра λ. Это свидетельствует об относительной малости обобщенных сил $\varepsilon R + \varepsilon^2 S$ при $q \sim 1$, $\dot{q} \sim \varepsilon$, $\lambda = 1$.

Преобразуем конечные условия (1.2) в соответствии с формулами замены (2.4)

$$M(x + \varepsilon R^{**}(\theta, x), y + \Delta R^*(\theta, x))|_{\Theta} = 0, \quad \Theta = T\varepsilon^{-1} \tag{2.7}$$

В первом приближении по малому параметру слагаемое εR^{**} в первом аргументе функции M (2.7) можно не учитывать. Наличие слагаемого ΔR^* во втором аргументе требует высокой точности (погрешности $O(\varepsilon^2)$) задания величин t_0, $T \sim 1$. Изменение параметров t_0, T на $O(\varepsilon)$ приведет к существенной вариации величины ΔR^* в (2.7) порядка единицы (при $\theta = \Theta$). Как отмечалось, это свойство обусловлено сингулярным характером переменной $\dot{q}$, так как $\ddot{q} \sim \varepsilon^{-1}$.

Выпишем в новых переменных функционал (1.3)

$$J[u] = g(x+\varepsilon R^{**}, y+\Delta R^*)|_{\Theta} + \varepsilon\int_{\theta_0}^{\Theta} G(\theta, x+\varepsilon R^{**}, y+\Delta R^*, u)d\theta \qquad (2.8)$$

в котором функции R^{**}, ΔR^* определены согласно (2.4), как и в формуле (2.7). Для решения первого приближения можно ограничиться величинами порядка единицы, а слагаемое εR^{**} в g и G может быть отброшено.

Функции M, g, G могут регулярно зависеть от малого параметра ε, который в рассматриваемом далее первом приближении полагается равным нулю.

Изложим кратко асимптотическую процедуру приближенного решения терминальной задачи оптимального управления (2.5)–(2.8) согласно указанному ранее методу [2, 3].

3. Применение метода усреднения. Отбросим члены $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях (2.6), т.е. слагаемые $O(\varepsilon)$ в выражениях для X, Y; имеем

$$\begin{gathered} x' = \varepsilon y, \quad x(\theta_0) = q^0; \quad y' = \varepsilon Y_0(\theta, x, y, u), \quad y(\theta_0) = \dot{q}^0 \\ Y_0 \equiv -\Delta R_x^{*\prime} y + R'_{0x}R^{**} + (R'_{q'})_0(y+\Delta R^*) + S(\theta, x, y+\Delta R^*, u) \end{gathered} \qquad (3.1)$$

Отметим, что функция Y_0 квадратична по R, R^{**}, ΔR^*.

Система (3.1) представима в виде уравнения второго порядка для x и содержит сингулярную зависимость от x'

$$x'' = \varepsilon^2 Y_0(\theta, x, \varepsilon^{-1}x', u), \quad x(\theta_0) = q^0, \quad x'(\theta_0) = \varepsilon\dot{q}^0 \qquad (3.2)$$

Однако при переходе к аргументу t уравнение не содержит указанной особенности:

$$\ddot{x} = Y_0(\lambda t, x, \dot{x}, u), \quad x(t_0) = q^0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{q}^0 \qquad (3.3)$$

Правая часть уравнения (3.3) – быстро осциллирующая функция t. Заметим, что структуры уравнений (3.2) и (3.3) и соответствующих им уравнений (2.1), (2.2) и (1.1) существенно различаются.

Далее в конечных условиях (2.7) и критерии качества управления (2.8) отбрасываются величины $O(\varepsilon)$. На основе математического аппарата принципа максимума [4] выписываются необходимые условия оптимальности управления u

$$\begin{gathered} H = \varepsilon H_0(\theta, x, y, p, u) \to \max_u, \quad u \in U; \quad p = (p_x, p_y)^T \\ H_0 = (p_x, y) + (p_y, Y_0) - G, \quad u = u^*(\theta, x, y, p) \\ p'_x = -\varepsilon(H'_{0x})^*, \quad p'_y = -\varepsilon(H'_{0y})^*, \quad (H_0)^* = H_0|_{u^*}, \quad p_{x,y}(\Theta) = (\chi, M'_{x,y})_{\Theta} - g'_{x,y}|_{\Theta} \end{gathered} \qquad (3.4)$$

Здесь H – функция Гамильтона задачи, p_x, p_y – сопряженные x, y соответственно переменные (импульсы), χ – m-вектор множителей Лагранжа.

Предполагается, что вектор-функция u^* определяется явно в аналитическом виде и является 2π-периодической по θ и конечно гладкой по x, y, p. После подстановки выражения u^* в уравнения (3.1), (3.4) имеет место $2n$-мерная гамильтонова система уравнений в стандартной по Боголюбову форме. Требуется построить решение краевой задачи принципа максимума, в том числе найти m-вектор множителей Лагранжа χ, с погрешностью $O(\varepsilon)$. Проблема численно-аналитического исследования может быть существенно упрощена с помощью метода усреднения [5, 6] и асимптотической процедуры [2, 3].

В первом приближении по ε получим усредненную краевую задачу в исходном "медленном" времени t

$$\begin{gathered}\dot{\xi} = \eta, \quad \xi(t_0) = q^0; \quad \dot{\eta} = \mathbf{H}(\xi, \eta, \psi), \quad \eta(t_0) = \dot{q}^0; \quad \psi = (\psi_\xi, \psi_\eta)^T \\ \dot{\psi}_\xi = -h'_\xi, \quad \dot{\psi}_\eta = -h'_\eta, \quad N_{\xi,\eta} = \psi_{\xi,\eta}(T) - (\chi, M'_{\xi,\eta})_T + q'_{\xi,\eta}|_T = 0 \\ M\left(\xi, \eta + \Delta R^*\left(\frac{t}{\varepsilon}, \xi\right)\right)\bigg|_T = 0, \quad t_0 \le t \le T\end{gathered} \tag{3.5}$$

Заметим, что функция ΔR^* зависит 2π-периодически от $\theta = t\varepsilon^{-1}$.

Система (3.5) интегрируется на коротком интервале $\Delta t \sim 1$; она автономна и гамильтонова. Соответствующие x, y и $p_{x,y}$ усредненные переменные ξ, η и $\psi_{\xi,\eta}$, определяются усредненным гамильтонианом εH_0^* (3.4), т.е.

$$\begin{gathered}h(\xi, \eta, \psi) \equiv \langle H_0^*(\theta, \xi, \eta, \psi)\rangle = (\psi_\xi, \eta) + (\psi_\eta, \langle Y_0^*\rangle) - \langle G^*\rangle \\ h'_\psi = (\eta, \mathbf{H})^T, \quad \mathbf{H}(\xi, \eta) = \langle Y_0^*\rangle\end{gathered} \tag{3.6}$$

Первый интеграл $h = \text{const}$ (3.6) системы (3.5) можно использовать при аналитическом интегрировании уравнений либо при численном решении задачи для контроля точности (или вычислительных сбоев). Исследование может быть существенно упрощено в случае линейной либо линейно-квадратической задачи управления с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Для нелинейных задач, допускающих проведение операций максимизации функции H_0 по u (3.4) и усреднения (3.6) в аналитической форме, также достигается значительное облегчение численно-аналитического решения краевой задачи (3.5). Более общая ситуация требует применения численных методов как максимизации, так и усреднения, что приводит к весьма громоздким процедурам. Применение процедуры усреднения оправдывается возможностью обнуления ряда членов уравнений (2.5) и существенным сокращением интервала интегрирования.

4. Основные результаты. Формально схема решения краевой задачи заключается в нахождении неизвестных начальных данных ψ_ξ^0, ψ_η^0 и параметра χ, определяющих искомые переменные ξ, η, ψ_ξ, ψ_η как решение задачи Коши. Представим его в виде

$$\begin{gathered}\xi = \xi(t - t_0, q^0, \dot{q}^0, \psi^0, \chi), \quad \eta = \eta(t - t_0, q^0, \dot{q}^0, \psi^0, \chi) \\ \psi = \psi(t - t_0, q^0, \dot{q}^0, \psi^0, \chi), \quad \psi^0 \in \Psi^0, \quad \chi \in \mathrm{X}\end{gathered} \tag{4.1}$$

Возможная зависимость от θ_0 не указана для краткости. Множества Ψ^0, X выбираются из условий (1.1), налагаемых на q, $\dot{q}$, u с учетом формул замены (2.4). Для определения $2n$-вектора ψ^0 и m-вектора χ (всего $2n + m$ неизвестных) используется $2n + m$ конечных условий (3.5) при $t = T$, в которые подставляются выражения (4.1)

$$\begin{gathered}N^*(T - t_0, \Theta, \theta_0, q^0, \dot{q}^0; \psi^0, \chi) = 0, \quad q^0 \in D_q, \quad \dot{q}^0 \in D_{\dot{q}} \\ M^*(T - t_0, \Theta, \theta_0, q^0, \dot{q}^0; \psi^0, \chi) = 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

Вектор-функция N^* размерности $2n$ получается из условий трансверсальности (3.5) для ψ_ξ, ψ_η подстановкой выражений (4.1) при $t = T$. Указана также отмеченная выше 2π-периодическая зависимость от θ_0, Θ (через функции ΔR^*, R^{**}). Выражение для M^* (4.2) получается из конечного условия $M = 0$ (3.5) при подстановке решения (4.1).

Далее требуется найти вещественные корни ψ^*, χ^* как функции известных (измеряемых) величин, к которым относятся временные параметры $T - t_0$, Θ, θ_0 и фазовые q^0, $\dot{q}^0$. Пусть эти корни найдены; тогда подстановка ψ^*, χ^* в выражения (4.1), а затем (2.4), (3.4), (2.7), (2.8) позволяет определить приближенную фазовую траекторию q_0, $\dot{q}_0$, программное управление u_0, невязку M_0 в выполнении конечных условий и величину функционала J_0.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема. При выполнении условий $q_0 \in D_q$, $\dot{q}_0 \in D_{\dot{q}}$ и простоты корня ψ^*, χ^*, т.е. $\det(\partial(N^*, M^*)/\partial(\psi^*, \chi^*)) \neq 0$ в рассматриваемой области известных параметров, определенное выше приближенное решение является ε-близким к оптимальному по траектории, конечному условию и функционалу. Близость по управлению имеет место в смысле интегральной метрики, а равномерная близость – при дополнительном условии гладкости функции u^* (3.4).

Обоснование утверждений теоремы следует из приведенных построений и асимптотических методов оптимального управления [2, 3].

Приведем выражения для приближенного решения задачи оптимального управления (1.1)–(1.3) в исходных переменных. Согласно соотношениям (2.4), (4.1) получим фазовую траекторию

$$\begin{aligned} q_0 &= \xi(t - t_0, q^0, \dot{q}^0, \psi^*, \chi^*) \equiv q_0(t - t_0, T - t_0, \Theta, \theta_0, q^0, \dot{q}^0) \\ \dot{q}_0 &= \eta(t - t_0, q^0, \dot{q}^0, \psi^*, \chi^*) + \Delta R^*(\theta, q_0) \equiv \dot{q}_0(t - t_0, T - t_0, \Theta, \theta_0, q^0, \dot{q}^0) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Существенной особенностью является зависимость q^0, $\dot{q}^0$ от Θ, $\theta_0 \sim \varepsilon^{-1}$; она исчезает при $R_0 \sim \varepsilon$. Аналогичные свойства имеют место в задачах слабого управления квазилинейными колебательными системами на асимптотически большом интервале времени [2, 3], когда терминальное слагаемое в функционале и конечные условия зависят от быстрых переменных.

В методическом и прикладном аспектах представляет интерес разработка асимптотической процедуры приближенного решения задач оптимального управления с нефиксированным моментом окончания процесса (типа оптимального быстродействия). Однако эта проблема требует отдельного исследования, обусловленного существенной неединственностью решения краевой задачи принципа максимума: число корней уравнений трансверсальности может быть порядка ε^{-1} [2, 3].

5. Обобщение задачи управления. Рассмотрим более общую по сравнению с (1.1) систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= Q(\theta, t, q, \dot{q}, z, u, \lambda), \quad q(t_0) = q^0, \quad \dot{q}(t_0) = \dot{q}^0 \\ \dot{z} &= Z_*(\theta, t, q, \dot{q}, z, u, \lambda^{-1}), \quad z(t_0) = z^0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Функции Q, Z_* произвольным гладким образом зависят от времени t и k-мерного вектора z, $z \in D_z$. Зависимость от других аргументов аналогична описанной выше для функции Q (см. разд. 1). Краевые условия типа (1.2) и функционал (1.3) принимаются в виде

$$M(q, \dot{q}, z)|_T = 0, \quad M = (M_1, \ldots, M_m), \quad 0 \le m \le 2n + k$$
$$J[u] = g(q, \dot{q}, z)|_T + \int_{t_0}^{T} G(\theta, t, q, \dot{q}, z, u)dt \to \min_u, \quad u \in U \tag{5.2}$$

Явное введение t в функции Q, Z, G выполнено для удобства; без ограничения общности аргумент t можно включить в состав вектора z: $\dot{z}_{k+1} = 1$, $z_{k+1}(t_0) = t_0$.

Переходом к аргументу $\theta = \lambda t$ получается система уравнений и начальные данные

$$q'' = \varepsilon^2 Q, \quad z' = \varepsilon Z_*; \quad q(\theta_0) = q^0, \quad q'(\theta_0) = \varepsilon\dot{q}^0, \quad z(\theta_0) = z^0 \tag{5.3}$$

Правые части уравнений (5.3) содержат нерегулярную зависимость от q' вида $\varepsilon^{-1}q'$ через аргумент $\dot{q}$, см. (2.1). Относительно функции Q требуется выполнение условия, обобщающего (2.2),

$$\varepsilon^2 Q(\theta, t, q, \varepsilon^{-1}q', z, u, \lambda) \equiv \varepsilon R(\theta, t, q, q', z) + \varepsilon^2 S(\theta, t, q, \varepsilon^{-1}q', z, u, \varepsilon) \tag{5.4}$$

Возможная регулярная зависимость функции R от малого параметра ε не указывается; она может быть отнесена к слагаемому $O(\varepsilon^2)$, т.е. к $\varepsilon^2 S$. Предполагается, что функция R обладает нулевым средним по θ на периоде 2π при $q' = 0$. С помощью замены [1] вида $(q, q', z) \to (x, y, z)$ посредством дифференцирования явных формул замены по θ в силу системы (5.3), (5.4) получаются уравнения управляемого движения стандартного вида

$$\begin{aligned}
x' &= \varepsilon X(\theta, t, x, y, z, u, \varepsilon), \quad x(\theta_0) = q^0, \quad t = \varepsilon\theta, \quad x \in D_q, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \\
y' &= \varepsilon Y(\theta, t, x, y, z, u, \varepsilon), \quad y(\theta_0) = \dot{q}^0, \quad (y + \Delta R^*) \in D_{\dot{q}} \\
z' &= \varepsilon Z(\theta, t, x, y, z, u, \varepsilon), \quad z(\theta_0) = z^0, \quad z \in D_z, \quad u \in U
\end{aligned} \tag{5.5}$$

В отличие от выражения для X (2.5) также имеет место слабая (порядка ε) зависимость от управления u и медленных переменных t, z. Связь между переменными и правые части уравнений (5.5) определяются соотношениями, аналогичными (2.4),

$$q = x + \varepsilon R^{**}(\theta, t, x, z), \quad q' = \varepsilon y + \varepsilon\Delta R^*(\theta, t, x, z), \quad z \equiv z$$
$$R^{**} = \int_{\theta_0}^{\theta} \Delta R^* d\theta_1, \quad \Delta R^* = R^* - \langle R^* \rangle, \quad R^* = \int_{\theta_0}^{\theta} R_0 d\theta_1 \tag{5.6}$$

в которых функция R_0 представима через R (5.4) при $q' = 0$. Интегрирование по θ (5.6) проводится для фиксированных t, x, z. Дифференцирование формул замены (5.6) приводит к искомым выражениям для функций X, Y, Z в (5.5)

$$X = (I + \varepsilon R_x^{**'})^{-1}(y - \varepsilon R_t^{**'} - \varepsilon R_z^{**'} Z) = y + O(\varepsilon)$$
$$Y = (R'_x)R^{**} + (R'_{q'})(y + \Delta R^*) + \varepsilon(S) - \Delta R_x^{*'} y - \Delta R_z^{*'}(Z) + O(\varepsilon)$$
$$Z = Z_*(\theta, t, x + \varepsilon R^{**}, y + \Delta R^*, u, \varepsilon) = (Z) + O(\varepsilon) \tag{5.7}$$
$$S = S(\theta, t, x + \varepsilon R^{**}, y + \Delta R^*, u, \varepsilon) = (S) + O(\varepsilon)$$

Выражения типа (R'_x), (S), (Z) означают, что аргументы функций берутся при $\varepsilon = 0$, $q = x$. Из выражений (5.7) следует, что $(X) = y$, а (Y) – выписанная функция без учета члена $O(\varepsilon)$.

Конечные условия (5.2) и функционал (5.3) преобразуются посредством замены (5.6). Получаются выражения, аналогичные (2.7) и (2.8) соответственно. В результате имеет место задача оптимального терминального управления на асимптотически большом интервале изменения быстрой фазы (аргумента) $t_0\varepsilon^{-1} = \theta_0 \le \theta \le \Theta = T\varepsilon^{-1}$ для $(2n+k)$-мерного вектора оскулирующих переменных (x, y, z). К ней применима асимптотическая процедура приближенного решения [2, 3], изложенная в разд. 3, 4. Для оценки точности справедливо утверждение, аналогичное приведенной выше теореме.

Приближенное решение задач типа оптимального быстродействия требует отдельного рассмотрения.

6. Примеры. Рассмотрим одномерные вращательно-колебательные системы, к которым применима изложенная асимптотическая методика. В результате асимптотического анализа удается построить существенно более простые модели систем управления, не содержащие явной зависимости от времени и позволяющие использовать стандартные подходы (аналитические и численные).

1°. *Управление плоскими колебаниями и вращениями твердого тела относительно быстро вибрирующей оси.* Уравнение движения тела имеет вид [1–3]

$$A\ddot{\varphi} + \mu g l \sin\varphi = -\mu l(\ddot{\xi}_0(\nu t)\cos\varphi + \ddot{\eta}_0(\nu t)\sin\varphi) + V \tag{6.1}$$

с соответствующими начальными данными φ^0, $\dot{\varphi}^0$. Здесь φ – угловая координата, A – момент инерции относительно оси, μ – масса, l – "плечо" массовых сил, ускорение которых равно g; ξ_0, η_0 – координаты плоскопараллельно перемещающейся оси, ν – частота колебаний, V – момент внешних сил. Введением аргумента $\theta = \nu t$ представим уравнение (6.1) в стандартной форме (2.1), (2.2)

$$\begin{gathered} \varphi'' = -\varepsilon(\xi''(\theta)\cos\varphi + \eta''(\theta)\sin\varphi) - \varepsilon^2\kappa\sin\varphi + \varepsilon^2 u \\ \varepsilon = \frac{\mu l\rho}{A}, \quad \varepsilon^2\kappa = \frac{\mu g l}{A\nu^2}, \quad \xi = \frac{\xi_0}{\rho}, \quad \eta = \frac{\eta_0}{\rho}, \quad \varepsilon^2 u = \frac{V}{A\nu^2} \end{gathered} \tag{6.2}$$

где ρ – амплитуда колебаний оси. Начальные данные φ^0, $\dot{\varphi}^0$ для уравнения (6.1) и φ^0, $\varepsilon\varphi'^0$ для уравнения (6.2) могут соответствовать режиму колебаний или вращений. Первое слагаемое в правой части имеет смысл не зависящего от φ' выражения εR, а второе и третье – $\varepsilon^2 S$. Предполагается, что функции ξ'', η'' имеют нулевое среднее, т.е. выполняется условие (2.3). Тогда посредством замены (2.4) получим стандартную управляемую систему первого приближения

$$\begin{gathered} x' = \varepsilon y, \quad \varphi = x + \varepsilon R^{**}, \quad x(0) = \varphi^0 \\ y' = \varepsilon y(-\xi'\sin x + \eta'\cos x) + \varepsilon(\xi''\sin x - \eta''\cos x)R^{**} - \varepsilon\kappa\sin x + \varepsilon u \\ \varphi' = \varepsilon y + \varepsilon\Delta R^*, \quad y(0) = \varphi'^0 - \Delta R^*(0, x^0) \end{gathered} \tag{6.3}$$

Функция Гамильтона $H = \varepsilon H_0$ для управляемой системы (6.3) с функционалом вида (2.8) после максимизации по $u \in U$ позволяет определить оптимальное управление u^* и усредненный гамильтониан первого приближения h в медленном времени $\tau = \varepsilon\theta$

$$\begin{gathered} u^* = u(\theta, x, y, p_y), \quad \upsilon = \upsilon(x, y, p_y) = \langle u(\theta, x, y, p_y)\rangle \\ h(x, y, p_x, p_y) = p_x y + p_y(-y\langle\Delta R_x^{*\prime}\rangle + \langle R'_x R^{**}\rangle - \kappa\sin x) + \upsilon \end{gathered} \tag{6.4}$$

Здесь $p_{x,\,y}$ – импульсы, υ – новое (усредненное) управление, которое используется в усредненной задаче. Средние значения функций в соотношениях (6.4) вычисляются в явном виде

$$\langle \Delta R_x^{*\prime} \rangle = 0, \quad \langle R_x' R^{**} \rangle = \frac{1}{2}(\langle \xi'^2 \rangle - \langle \eta'^2 \rangle)\sin 2x - \langle \xi'\eta' \rangle \cos 2x \tag{6.5}$$

Интересно отметить обращение в нуль первого выражения (6.5) при $\langle \xi' \rangle$ или (и) $\langle \eta' \rangle$ не равных нулю, т.е. в новых переменных равномерное в среднем смещение оси отсутствует. Анализ второго выражения также представляет интерес [1]. Это слагаемое связано с эффектом появления других положений равновесия (кроме $x = 0, \pi$) и их вибрационной стабилизации в неуправляемой системе (при $u = \upsilon \equiv 0$).

Полученная усредненная задача управления – более многообразная и трудная для исследования по сравнению с задачей управления физическим маятником с неподвижной осью [1–3]. При определенных упрощающих предположениях она приводится к указанной, но с другим содержанием. В частности, при $\kappa \sim \varepsilon$ и движении по замкнутому эллипсу имеем усредненную задачу управления

$$\begin{aligned} &\xi = \cos\gamma\cos\theta, \quad \eta = \sin\gamma\sin\theta, \quad 0 \le \gamma \le \pi \\ &x' = y, \quad y' = \frac{1}{4}\cos 2\gamma \sin 2x + \upsilon \end{aligned} \tag{6.6}$$

В результате получена система уравнений (6.6) управляемого движения для эквивалентного маятника с четырьмя положениями относительного равновесия $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ при $0 \le x < 2\pi$. Движение оси по окружности ($\gamma = \pi/4, 3\pi/4$) приводит к простому уравнению управляемого движения $x'' = \upsilon$.

Если ось колеблется в плоскости плоскопараллельно, то аналогично задаче (6.6) получим

$$\begin{aligned} &\xi = \cos\gamma\cos\theta, \quad \eta = \sin\gamma\cos\theta, \quad \gamma = \text{const} \\ &x' = y, \quad y' = \frac{1}{4}\sin 2(x-\gamma) + \upsilon \end{aligned} \tag{6.7}$$

Задачи управления для систем (6.6), (6.7) исследуются стандартными регулярными методами. В общем случае система (6.4), (6.5) приводится к виду

$$x' = y, \quad y' = ay\sin(x+\alpha) + b\sin(2x+\beta) - \kappa\sin x + \upsilon \tag{6.8}$$

где a, α, b, β – постоянные, определяемые согласно соотношениям (6.5). Для решения задач управления движениями системы (6.8) с различными конечными условиями и функционалом требуется разработка численных методов, поскольку дальнейшее упрощение затруднительно.

2°. *Управляемый дрейф "микрочастицы" в силовом поле бегущей волны.* Для теории плазмы представляет определенный интерес исследование динамики "квазичастиц" в переменном поле, которое моделируется бегущей либо стоячей волнами [8], либо волновым пакетом [9].

При соответствующих предположениях о квазистационарности движение частицы в поле бегущей волны описывается уравнением [9] и начальными условиями

$$m\ddot{s} = eE_0\sin(ks - \omega t) + eE_1, \quad s(0) = s^0, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}^0 \tag{6.9}$$

Здесь m – масса, e – заряд частицы, E_0 – амплитуда напряженности бегущей волны, k – волновое число, ω – частота колебаний. Уравнение (6.9) содержит дополнительное слагаемое eE_1, которое имеет смысл малого управляющего воздействия.

Введем нужным образом безразмерные переменные и параметры; получим управляемую систему вида (2.1), (2.2)

$$
\begin{aligned}
& q'' = \varepsilon\sin(q-\theta)+\varepsilon^2 u, \quad q(0) = q^0, \quad q'(0) = \varepsilon q'^0 \\
& q = ks, \quad q' = k\dot{s}/\omega, \quad \theta = \omega t, \quad q^0, q'^0 \sim 1 \\
& \varepsilon = eE_0 k/(m\omega^2) \ll 1, \quad \varepsilon^2 u = eE_1 k/(m\omega^2), \quad u\in U
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Согласно системе (6.10) напряженность E_1 управляющего поля на порядок по малому параметру ε меньше, чем амплитуда E_0 бегущей волны. После преобразования (2.4) в первом приближении по ε получим управляемую систему стандартного вида (2.5)

$$
\begin{aligned}
& x' = \varepsilon y, \quad x(0) = q^0 \equiv x^0 \\
& y' = \varepsilon y\sin(x-\theta)+\varepsilon\cos(x-\theta)[\sin x-\sin(x-\theta)]+\varepsilon u, \quad y(0) = q'^0-\cos q^0 \equiv y^0 \\
& q = x+\varepsilon[\sin x-\sin(x-\theta)], \quad q' = \varepsilon y+\varepsilon\cos(x-\theta)
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

В прикладном аспекте может представить интерес приведение в некоторый момент времени T фазовой точки $(s, \dot{s})$ системы (6.9) в начало координат (0, 0), т.е. $q(\Theta) = q'(\Theta) = 0$. С помощью асимптотической процедуры, изложенной в разд. 3, 4, переменная q приводится в ε-окрестность, а q' – в ε^2-окрестность требуемого значения. Напомним, что переменная $q' = O(\varepsilon)$.

Усредненные уравнения и конечные (при $\theta = \Theta = \omega T$) условия первого приближения после введения медленного аргумента $\tau = \varepsilon\theta$ согласно системе (6.11) примут вид

$$
\begin{aligned}
& \dot{x} = y, \quad \dot{y} = \upsilon, \quad 0\le\tau\le\tau_f, \quad \upsilon = \langle u^*\rangle \\
& x^f = x(\tau_f) = 0, \quad y^f = y(\tau_f) = -\cos\Theta
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Пусть в функционале $J[u]$ (2.8) функции $g\equiv 0$, $G = u^2/2$; тогда $u^* = p_y = -p_x^0\tau + p_y^0$ – линейная функция τ. Импульс $p_x = p_x^0$ постоянен в первом приближении; для постоянных $p_{x,y}^0$ после интегрирования уравнений из конечных условий (6.12) находим выражения

$$
\begin{aligned}
& p_x^0 = 6\tau_f^{-3}(2\Delta x^f-\Delta y^f\tau_f), \quad \Delta x^f = x^f-(x^0+y^0\tau_f) \\
& p_y^0 = 2\tau_f^{-2}(3\Delta x^f-2\Delta y^f\tau_f), \quad \Delta y^f = y^f-y^0
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Заметим, что в усредненный гамильтониан периодические слагаемые уравнения (6.11) не вносят вклада,т.е. бегущая волна не приводит к дрейфу “частицы” в первом приближении. Управление u^* – линейная функция медленного аргумента $\tau = \varepsilon\theta$, см. (6.10), с коэффициентами $p_{x,y}^0$ (6.13). Посредством замены медленных переменных $\tau\to 0$, $\tau_f\to\tau_f-\tau$, $x^0\to x$, $y^0\to y$ оно приводится к форме синтеза (быстрая переменная θ и величина Θ не преобразуются) и имеет смысл отрицательной обратной связи.

Отметим, что при построении приближенного асимптотического решения противоречивое для квазистационарности волны требование высокочастотности ($\omega\to\infty$) несущественно. Важно, чтобы выполнялись условия нормировки (6.10), что достигается соответствующими предположениями.

Управляемая система вида (6.9) может быть получена на основе модели (6.1) в предположениях $g = 0$ и колебаниях оси

$$\xi = -\rho\sin\nu t, \quad \eta = \rho\cos\nu t, \quad \rho = \text{const}$$

что соответствует ее движению по окружности радиуса ρ (см. (6.6)).

3°. *Управление эволюцией "микрочастицы" в поле стоячей волны.* Рассмотрим модифицированную задачу [8] для случая одинаковых встречных волн. В отличие от задачи (6.9) первое слагаемое в правой части уравнения управляемого движения имеет вид

$$eE_0[\sin(ks - \omega t) + \sin(ks + \omega t)]$$

Безразмерные переменные θ, q, q' и управление $\varepsilon^2 u$ вводятся согласно соотношениям (6.10), а малый параметр ε удобнее ввести следующим образом: $\varepsilon = 2eE_0k/(m\omega^2)$. Уравнение для q принимает вид

$$q'' = \varepsilon\sin q\cos\theta + \varepsilon^2 u, \quad q(0) = q^0, \quad q'(0) = \varepsilon q'^0 \tag{6.14}$$

К системе (6.14) применим асимптотическую процедуру, изложенную в разд. 2–4. Посредством преобразования (2.4) получим стандартную управляемую систему первого приближения типа (2.5)

$$\begin{gathered} x' = \varepsilon y, \quad x(0) = q^0 \\ y' = -\varepsilon y\sin\theta\cos x + \frac{1}{2}\varepsilon\sin 2x\cos\theta(1-\cos\theta) + \varepsilon u, \quad y(0) = q^0 \\ q = x + \varepsilon\sin x(1-\cos\theta), \quad q' = \varepsilon y + \varepsilon\sin x\sin\theta \end{gathered} \tag{6.15}$$

Применение процедуры усреднения приводит к управляемой системе (6.15) типа маятника, аналогичной (6.8),

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{1}{4}\sin 2x + v, \quad v = \langle u^* \rangle \tag{6.16}$$

В результате имеем задачу построения "управления" $v(x, y, p_y)$, см. (6.4), на основе решения краевой задачи для усредненных переменных x, y (6.16) и импульсов p_x, p_y

$$\dot{p}_x = \frac{1}{2}p_y\cos 2x, \quad \dot{p}_y = -p_x$$

с соответствующими конечными условиями и условиями трансверсальности; в частности $v = p_y$ при $G = u^2/2$, $|u| < \infty$.

Таким образом, задача управления эволюцией модифицированной системы существенно отличается от задачи (6.9), рассмотренной выше, поскольку в первом приближении содержит "возвращающую силу" – $\sin(2x)/4$. Это обстоятельство представляется парадоксальным, так как прямая и встречная волны входят аддитивно и порознь не оказывают влияния на дрейф частицы в первом приближении. Однако совместное их действие приводит к указанному эффекту вследствие того, что первое приближение содержит квадратичные члены, см. (2.5). В рассматриваемом случае появляются ненулевые средние выражения в правой части уравнения для y из-за взаимного влияния воздействий прямой и встречной волн.

В методическом и прикладном аспектах может представить интерес исследование динамики и управляемого дрейфа "микрочастицы" в переменном поле, которое моделируется волновым пакетом [9], и с учетом возмущающих факторов (нестационарность параметров, сопротивление среды и др.). При стандартных предположениях к этим задачам применима изложенная в разд. 2–5 методика. Однако их исследование потребует отдельного обсуждения. Отметим, что силовые воздействия типа бегущей волны, встречных волн или волнового пакета могут быть реализованы посредством модели колеблющегося и вращающегося тела с периодически или квазипериодически движущейся осью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00563) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-1627.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л.Д.* Асимптотический анализ динамических систем, подверженных высокочастотным воздействиям // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 23–31.
2. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
5. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
6. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
7. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
8. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 429 с.
9. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.

Москва
e-mail: kumak@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
25.III.2004