

УДК 531.36:534.1

© 2005 г. В. В. Козлов, С. А. Поликарпов

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЯХ БИЛЛИАРДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача о существовании периодических траекторий заряженной частицы в магнитном поле, когда частица движется внутри замкнутой выпуклой области, упруго отражаясь от ее границы. С помощью геометрической теоремы Пуанкаре установлено наличие бесконечного числа различных периодических траекторий при небольшой напряженности магнитного поля. Найдены условия устойчивости двузвенных траекторий в случае однородного магнитного поля.

1. Биллиард в магнитном поле. Рассмотрим движение заряженной частицы единичной массы в магнитном поле. Предположим, что линии индукции магнитного поля перпендикулярны некоторой плоскости π , в которой находится частица, а ее скорость направлена вдоль π . Тогда частица будет оставаться в плоскости π во все время движения. Ее движение описывается гамильтоновой динамической системой с функцией Гамильтона

$$H = (v_{\xi}^2 + v_{\eta}^2)/2$$

и симплектической структурой

$$\omega = dv_{\xi} \wedge d\xi + dv_{\eta} \wedge d\eta - eBc^{-1} d\xi \wedge d\eta$$

где ξ, η – декартовы координаты частицы на плоскости, v_{ξ}, v_{η} – компоненты скорости, e – заряд частицы, c – скорость света, $B(\xi, \eta)$ – индукция магнитного поля, \wedge – внешнее произведение.

Важная характеристика движения – радиус Лармора – величина, вычисляемая по формуле

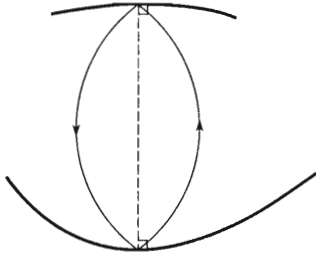
$$R = R(\xi, \eta) = vc/(e|B(\xi, \eta)|) \quad (1.1)$$

где v – величина скорости частицы.

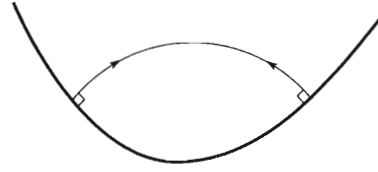
Предположим, что частица во все время движения остается внутри области, ограниченной выпуклой кривой L , отражаясь при ударе об L согласно закону абсолютно упругого удара (касательная к L компонента скорости частицы сохраняется, а нормальная меняет знак).

Индукция магнитного поля – заранее заданная однозначная функция двух переменных ξ, η . Назовем такую динамическую систему с ударами *односторонним* биллиардом. Она изучалась многими авторами (см., например, обзор [1]).

Односторонний биллиард в круге – вполне интегрируемая система (кроме интеграла энергии H имеется интеграл, линейный по скоростям). Однако, если в качестве границы L взять эллипс с неравными полуосями, то соответствующая система уже не будет допускать дополнительного аналитического первого интеграла [2].



Фиг. 1



Фиг. 2

Особый интерес представляет случай, когда направление магнитного поля (знак индукции) меняется на противоположное при каждом столкновении частицы с кривой L . Такую систему назовем *двусторонним* билиардом.

Термин *двусторонний* соответствует представлению о билиарде как о движении частицы по сильно сплюсненной поверхности σ , на которую действует магнитное поле, направленное вне (или внутрь) σ . Например, в качестве σ можно взять поверхность эллипсоида, одна из полуосей которого стремится к нулю. В действительности, магнитное поле без сингулярностей не может быть направлено всюду внутрь или вне замкнутой поверхности σ , поскольку его поток через σ всегда равен нулю. Однако в неклассических электромагнитных теориях это вполне возможно (например, теория монополя Дирака). Двусторонний билиард дает простую (правда, вырожденную) модель магнитного монополя.

Ниже рассматривается задача о периодических замкнутых траекториях билиардов в магнитном поле.

Положение частицы на кривой L охарактеризуем двумя величинами: s – параметром вдоль кривой L , пропорциональным натуральному параметру, и γ – синусом угла между внутренней нормалью к L и вектором скорости частицы сразу после отражения – угла отражения (ср. с [3]).

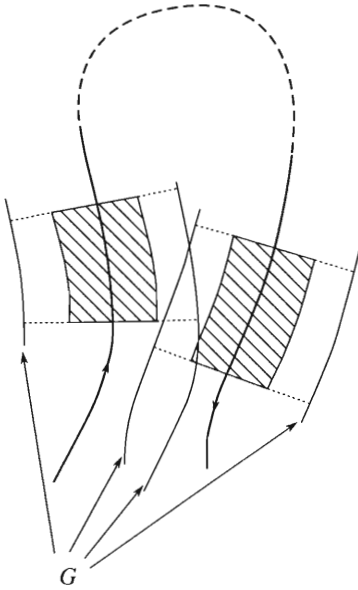
Следуя описанному ранее подходу [4], определим последовательность точек s^1, s^2, \dots, s^n , задающую периодическую n -звенную траекторию билиарда (параметр s^i соответствует i -й точке соударения частицы с L). Пусть $s^2 - s^1, s^3 - s^2, \dots, s^n - s^{n-1}, s_*^1 - s^n$ заключены между 0 и 2π , где $s_*^1 = s^1 \bmod 2\pi$ (s_*^1 – координата точки, где траектория замыкается).

Скажем, что траектория билиарда совершает k оборотов вокруг границы L , если $s_*^1 - s^1 = 2\pi k$. Число k определяет геометрические типы замкнутых траекторий. Ясно, что двузвенная траектория билиарда (когда $n = 2$) совершает один оборот вокруг кривой L .

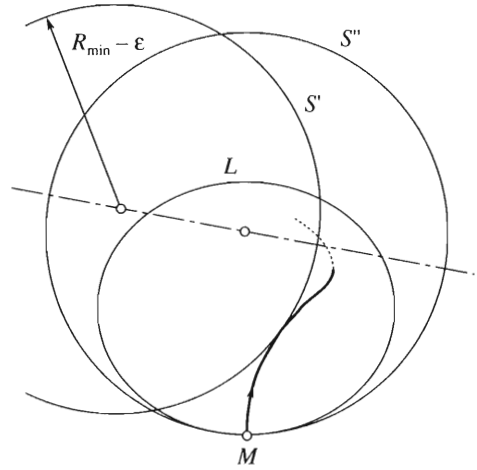
В дальнейшем особый интерес будет представлять случай, когда магнитное поле однородно, т.е. его индукция не зависит от положения частицы на плоскости. В этом случае между двумя соударениями с границей частица движется по дуге окружности радиуса Лармора (1.1), который также не зависит от положения частицы.

Двузвенная периодическая траектория одностороннего билиарда в однородном магнитном поле состоит из двух дуг, симметрично расположенных относительно стягивающей их хорды. Ясно, что эта хорда должна быть перпендикулярна кривой L в точках пересечения (фиг. 1).

В двустороннем билиарде двузвенная траектория представляет собой дугу окружности радиуса Лармора, которая перпендикулярна кривой L в точках пересечения. Заряженная частица пробегает эту дугу в обоих направлениях (фиг. 2).



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Условия существования периодических траекторий. Зафиксируем постоянную энергии, пусть $H = \text{const} > 0$. В фазовом пространстве рассматриваемой системы с упругими ударами уровень энергии D – трехмерное многообразие с краем. Его край ∂D – кольцо, соответствующее положению частицы на границе L . Рассматривается общий случай, когда магнитное поле неоднородно. Считается, что его индукция B – гладкая функция декартовых координат ξ, η .

Как и ранее [5], кривую L можно определить с помощью формул Френе, задав начальные координаты векторов сопутствующего базиса в точках кривой и ее кривизну. При таком задании кривизна кривой L будет всюду положительной.

В каждой точке замкнутой области, ограниченной кривой L , вычислим радиус Лармора (1.1) и пусть R_{\min} – наименьшее из полученных значений.

Лемма. Пусть радиус кривизны кривой L всюду меньше R_{\min} . Тогда траектория частицы, выпущенная трансверсально из точки на кривой L , пересекает ее вновь, причем также трансверсально.

Доказательство. Выпустим частицу из некоторой точки M на кривой L трансверсально к границе. Рассмотрим геометрическое место G центров окружностей радиуса $R_{\min} - \epsilon$, где ϵ достаточно мало, касающихся траектории частицы. Согласно условию леммы, G образовано двумя гладкими кривыми [1] и образует границу криволинейной полосы шириной $2(R_{\min} - \epsilon)$, осью (средней линией) которой является траектория частицы (фиг. 3).

Рассматриваемая полоса может иметь самопересечения, однако в условиях леммы траектория частицы не может пересечь ее границу. Покажем это.

Для некоторого положения частицы на траектории проведем окружность S' радиуса $R_{\min} - \epsilon$, касающуюся траектории (фиг. 4). Заметим, что центр окружности S' принадлежит G . Проведем также окружность S'' того же радиуса, что и S' , касающуюся кривой L в точке M . Согласно условию леммы кривая L пересекается с окружностью S'' только один раз [1]. Траектория частицы пересекается с окружностью S' также лишь один раз. В противном случае один из отрезков траектории между пересечениями с S' при сдвиге вдоль прямой, соединяющей центры S' и S'' , коснется S'' изнутри.

Таким образом, при движении частицы площадь той части плоскости π , в которую частица не может попасть (это полоса, которую “замечает” отрезок длины $R_{\min} - \epsilon$, в середине которого

находится частица, двигающийся вместе с частицей вдоль траектории, оставаясь перпендикулярным траектории), увеличивается со скоростью, не меньшей, чем $\mathcal{U}(R_{\min} - \varepsilon)$, в то время как область движения частицы ограничена кривой L .

Итак, будучи выпущенной трансверсально к кривой L , частица за конечное время должна вновь оказаться на L , причем касание кривой L исключается условием леммы, что и требовалось.

Основной результат составляет

Теорема 1. В условиях леммы для любого $n > 1$ и любого $k < n$, взаимно простого с n , существуют, по крайней мере, две различные n -звенные периодические траектории одностороннего бильярда, совершающие k оборотов вокруг границы L . В случае двустороннего бильярда утверждение теоремы остается в силе для любого четного n .

В случае однородного магнитного поля ($B = \text{const}$) был указан [1] более слабый вариант теоремы 1: утверждается, что в условиях теоремы при $n > 2$ имеется хотя бы одна периодическая n -звенная траектория одностороннего бильярда. Она отвечает точке максимума некоторой функции от n переменных (которая соответствует действию по Якоби на некотором классе замкнутых кривых) на компактном многообразии с кусочно-гладкой границей. Однако приведенные в [1] аргументы нельзя признать строгими. Было дано [6] полное вариационное доказательство теоремы 1 в отсутствие магнитного поля, и оно использует нетривиальные топологические идеи.

В общем случае, когда магнитное поле неоднородное, можно применить вариационную теорию С.П. Новикова, касающуюся существования замкнутых траекторий необратимых систем с компактным двумерным конфигурационным многообразием (в нашем случае это многообразие гомеоморфно двумерной сфере) [7–9]. Укажем достаточное условие существования хотя бы одной замкнутой траектории частицы единичной массы в однородном магнитном поле, которое дает теория С.П. Новикова

$$\lambda v < eBc^{-1} \sigma \tag{2.1}$$

Здесь λ – длина границы L , а σ – площадь, заключенная внутри L . Условие (2.1) годится как для одностороннего, так и для двустороннего бильярда. Например, если L – окружность радиуса r , то неравенство (2.1) принимает вид $r > 2R$, где R – радиус Лармора (1.1). При этих же предположениях условие теоремы 1 сводится к неравенству $r < R$.

Доказательство теоремы 1 основано на применении геометрической теоремы Пуанкаре (ср. с [3]). Рассмотрим отображение последования в силу рассматриваемой динамической системы $T : \partial D \rightarrow \partial D$. В силу леммы отображение T непрерывно и взаимно однозначно. Из сохранения 2-формы ω в силу гамильтоновой системы дифференциальных уравнений с гамильтонианом H следует сохранение 2-формы площади $d\gamma \wedge ds$ в силу отображения T . Кроме того, заметим, что

$$T : (s, 1) \rightarrow (s, 1) \text{ и } T : (s, -1) \rightarrow (s + 2\pi, -1)$$

Ясно, что отображение T не может иметь инвариантных точек, не лежащих на границе кольца. Поэтому рассмотрим композиции степеней отображения T и вращений кольца R_k вокруг центра на угол $-2\pi k$, где $k < n$ и число k взаимно просто с n . Поскольку R_k , очевидно, является непрерывным, взаимно однозначным и сохраняющим площадь отображением кольца на себя, то композиции $R_k T^n$ удовлетворяют всем условиям геометрической теоремы Пуанкаре [3, 4] и, следовательно, имеют два ряда геометрически различных инвариантных точек

$$U, T(U), T^2(U), \dots, T^{n-1}(U); \quad V, T(V), T^2(V), \dots, T^{n-1}(V)$$

Все эти точки инвариантны под действием $R_k T^n$ и поворачиваются на угол $2\pi k$ под действием T^n . При этом каждому ряду точек соответствует замкнутая n -звенная траектория бильярда, совершающая k оборотов вокруг кривой L .

Ясно, что двусторонний бильярд может иметь только замкнутые траектории с четным количеством звеньев. А для определения отображения последования в случае двустороннего бильярда необходимо рассматривать две его итерации: T_+ , соответствующую движению частицы по одной стороне поверхности, и T_- , соответствующую движению по обратной стороне (при изменении направления магнитной индукции).

3. Условия устойчивости двузвенных траекторий бильярда в однородном магнитном поле. Вопрос об орбитальной устойчивости двузвенных траекторий одностороннего бильярда в однородном магнитном поле (соответственно двустороннего бильярда в “почти” однородном магнитном поле) сводится к изучению устойчивости неподвижной точки соответствующего двукратно примененного отображения последования (ОП) T^2 (композиции $T_- \circ T_+$).

В плоскости движения частицы введем декартовы координаты (ξ, η) и рассмотрим итерацию отображения последования. Пусть в окрестности начальной точки дуги траектории между двумя соударениями кривая L задается уравнением $\eta = \Phi(\xi)$, а рядом с конечной точкой – уравнением $\eta = \Psi(\xi)$.

ОП удобно записать в координатах (ξ, γ) , где γ – синус угла отражения.

Для декартовых координат центра окружности Лармора (ξ_c, η_c) , по дуге которой движется частица от соударения с кривой Φ до соударения с кривой Ψ , справедливы формулы

$$\begin{aligned} \xi_c &= \xi_s - \tilde{R}(\xi_s)(\sqrt{1 - \gamma_s^2} + \gamma_s \Phi'(\xi_s)) \\ \eta_c &= \Phi(\xi_s) + \tilde{R}(\xi_s)(\gamma_s - \sqrt{1 - \gamma_s^2} \Phi'(\xi_s)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\tilde{R}(\xi_s) = R / \sqrt{1 + (\Phi'(\xi_s))^2}$$

Здесь ξ_s, γ_s – координаты, описывающие положение частицы на кривой Φ , R – радиус Лармора.

Итерация ОП задается формулами

$$(\xi_i - \xi_c)^2 + (\Psi(\xi_i) - \eta_c)^2 = R^2, \quad \gamma_i = \frac{\eta_c - \Psi(\xi_i) + (\xi_i - \xi_c)\Psi'(\xi_i)}{R\sqrt{1 + (\Psi'(\xi_i))^2}} \quad (3.2)$$

Координаты (ξ_i, γ_i) описывают положение частицы на кривой Ψ .

Рассмотрим случай одностороннего бильярда (фиг. 5). Пусть двузвенная периодическая траектория соединяет точки с декартовыми координатами $(0, -l)$ и $(0, l)$, и при этом

$$\Phi(\xi) = -l + a_{21}\xi^2/2 + O_3(\xi), \quad \Psi(\xi) = l - a_{22}\xi^2/2 + O_3(\xi)$$

Предположим также, что $a_{21} > 0$, $a_{22} > 0$ и $a_{21} > a_{22}$. Ясно, что

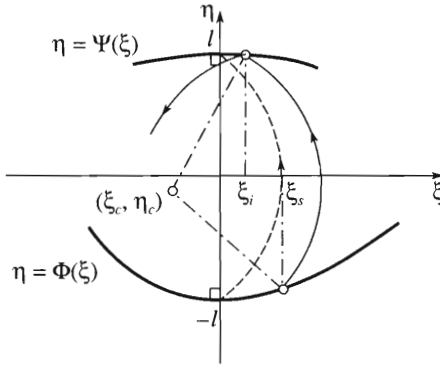
$$a_{21} = 1/R_1, \quad a_{22} = 1/R_2$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны кривых Φ и Ψ в точках с декартовыми координатами $(0, -l)$ и $(0, l)$ соответственно.

Двукратно примененное ОП имеет неподвижную точку, которая в координатах (ξ, γ) имеет вид $(0, l/R)$.

Введем обозначения

$$c_1 = 1 - 2la_{21}, \quad c_2 = 1 - 2la_{22}, \quad d = 2lR/\sqrt{R^2 - l^2}$$



Фиг. 5

Используя формулы (3.1), (3.2), найдем в линейном приближении выражения для (ξ_i, γ_i)

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \gamma_i + \frac{l}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d \\ \frac{c_1 c_2 - 1}{d} & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \gamma_s - \frac{l}{R} \end{pmatrix} + O_2 \quad (3.3)$$

Для следующей итерации ОП T , возвращающей частицу на кривую Φ , справедливы формулы, аналогичные (3.1), (3.2). С их помощью получим

$$\begin{pmatrix} \xi_f \\ \gamma_f - \frac{l}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & d \\ \frac{c_1 c_2 - 1}{d} & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \gamma_i + \frac{l}{R} \end{pmatrix} + O_2 \quad (3.4)$$

Здесь (ξ_f, γ_f) – координаты частицы, снова находящейся на кривой Φ .

Из формул (3.3), (3.4) получим известный [1] результат: в случае одностороннего бильярда неподвижная точка $(0, l/R)$ двукратно примененного ОП имеет гиперболический тип при выполнении одного из условий $R_1 < 2l < R_2$ или $2l > R_1 + R_2$. Если же выполняется одно из условий $0 < 2l < R_1$ или $R_2 < 2l < R_1 + R_2$, то неподвижная точка имеет эллиптический тип. Было также отмечено [1], что полученные неравенства полностью совпадают с условиями устойчивости, справедливыми для двузвенной траектории “обычного” бильярда (при движении частицы по инерции) (см. [4]).

Рассмотрим теперь случай двустороннего бильярда (фиг. 6). Пусть двузвенная периодическая траектория по-прежнему соединяет точки с декартовыми координатами $(0, -l)$ и $(0, l)$. Однако теперь

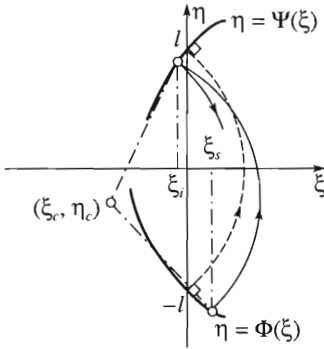
$$\Phi(\xi) = -l - a_1 \xi + a_{21} \xi^2 / 2 + O_3(\xi), \quad \Psi(\xi) = l + a_1 \xi - a_{22} \xi^2 / 2 + O_3(\xi)$$

Здесь $a_1 > 0$. Как и в случае одностороннего бильярда предположим, что $a_{21} > 0$, $a_{22} > 0$ и $a_{21} > a_{22}$.

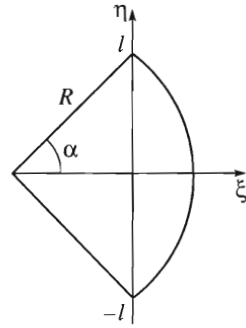
Кроме того, справедливы формулы

$$\cos^2 \alpha = 1 / (1 + a_1^2), \quad \sin \alpha = l / R$$

где α – половина угла, опирающегося на дугу окружности – двузвенную периодическую траекторию (фиг. 7).



Фиг. 6



Фиг. 7

Радиусы кривизны R_1 и R_2 кривых Φ и Ψ в точках с декартовыми координатами $(0, -l)$ и $(0, l)$ можно вычислить по формулам

$$1/R_1 = a_{21}(a_1^2 + 1)^{-3/2}, \quad 1/R_2 = a_{22}(a_1^2 + 1)^{-3/2}$$

соответственно.

Композиция $T_- \circ T_+$ имеет неподвижную точку $(\xi, \gamma) = (0, 0)$.

Введем обозначения

$$p_1 = \frac{1 - 2la_{21} - a_1^4}{(1 + a_1^2)^2}, \quad p_2 = \frac{1 - 2la_{22} - a_1^4}{(1 + a_1^2)^2}$$

$$q_1 = \frac{2l}{1 + a_1^2}, \quad q_2 = \frac{p_1 p_2 - (1 - a_1^4)^2}{q_1} - \frac{2l}{R^2}$$

Итерация отображения $T_+ : (\xi_s, \gamma_s) \rightarrow (\xi_i, \gamma_i)$ задается формулами (3.1), (3.2). Из них получим

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \gamma_s \end{pmatrix} + O_2 \tag{3.5}$$

Для итерации отображения T_- , возвращающей частицу на кривую Φ , имеем

$$\begin{pmatrix} \xi_f \\ \gamma_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & q_1 \\ q_2 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} + O_2 \tag{3.6}$$

Здесь (ξ_f, γ_f) – координаты частицы, снова находящейся на кривой Φ .

Вычислим след произведения матриц из формул (3.5), (3.6)

$$\tau = 2 \left(\frac{2(2l \cos \alpha)^2}{R_1 R_2} + 2(2l \cos \alpha) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{a_1^2 - 1}{a_1^2 + 1} + \frac{a_1^4 - 6a_1^2 + 1}{(a_1^2 + 1)^2} \right) \tag{3.7}$$

Обозначим

$$\varrho = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \cos 2\alpha + \sqrt{R_1 R_2 + \frac{1}{4}(R_1 - R_2)^2 \cos^2 2\alpha}$$

Теорема 2. В случае двустороннего бильярда неподвижная точка $(0, 0)$ композиции $T_- \circ T_+$ является

1) при $0 < \alpha < \pi/4$ гиперболической, если

$$R_1 \cos 2\alpha < 2l \cos \alpha < R_2 \cos 2\alpha \quad \text{или} \quad 2l \cos \alpha > \rho$$

эллиптической, если

$$0 < 2l \cos \alpha < R_1 \cos 2\alpha \quad \text{или} \quad R_2 \cos 2\alpha < 2l \cos \alpha < \rho$$

2) при $\alpha = \pi/4$ гиперболической, если

$$\sqrt{2}l > \sqrt{R_1 R_2}$$

эллиптической, если

$$0 < \sqrt{2}l < \sqrt{R_1 R_2}$$

3) при $\pi/4 < \alpha < \pi/2$ гиперболической, если

$$2l \cos \alpha > \rho$$

эллиптической, если

$$0 < 2l \cos \alpha < \rho$$

Доказательство основано на анализе следа произведения матриц линеаризации (3.7). Указанные условия при ослаблении магнитного поля ($R \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$) переходят в условия устойчивости двузвенной траектории обычного бильярда (при движении частицы по инерции) (см. [4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01059) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-136.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robnik M.* Regular and chaotic billiard dynamics in magnetic fields // *Nonlinear Phenomena and Chaos*. Bristol; Boston: Adam Hilger, 1986. P. 303–330.
2. *Козлова Т.В.* Неинтегрируемость вращающегося эллиптического бильярда // *ПММ*. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 87–91.
3. *Birkhoff G.D.* *Dynamical Systems*. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927 = *Биркгоф Д.* Динамические системы. Ижевск: Изд. дом "Удмурт. ун-т", 1999. 407 с.
4. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
5. *Поликарпов С.А.* О периодических траекториях бильярда в однородном поле тяжести // *Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика*. 2002. № 5. С. 42–45.
6. *Трещев Д.В.* К вопросу о существовании периодических траекторий бильярда Биркгофа // *Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика*. 1987. № 5. С. 72–75.
7. *Новиков С.П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // *Успехи мат. наук*. 1982. Т. 37. Вып. 5. С. 3–49.
8. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Периодические экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов // *Докл. АН СССР*. 1984. Т. 274. № 1. С. 26–28.
9. *Тайманов И.А.* Несамопересекающиеся замкнутые экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов // *Изв. АН СССР. Сер. Математическая*. 1991. Т. 55. № 2. С. 367–383.