УДК 531.36:534.1

© 2005 г. К. Валле, Д. Фортюне, К. Шампион-Рео

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ

Предлагается и обосновывается алгоритм построения общего решения колебательной системы без определения собственных векторов, которые являются основным источником вычислительной неустойчивости классических методов. Алгоритм Сурио [1–3], разработанный для решения систем линейных алгебраических уравнений, распространяется на построение общего решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом существенную роль играет присоединенная матрица, состоящая из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы, и представление характеристического полинома через характеристическую присоединенную матрицу. Алгоритм состоит из простых алгебраических операций, кроме численного интегрирования одного дифференциального уравнения, называемого характеристическим уравнением.

1. Введение. Линейные колебания механических систем описываются матричным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) второго порядка

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \tag{1.1}$$

Здесь x – n-мерный вектор конфигурационных переменных, M, C, K – $(n \times n)$-матрицы масс, коэффициентов демпфирования и жесткостей, F – внешние силы, точка означает дифференцирование по времени.

Основная трудность классических методов построения общего решения таких систем состоит в вычислении собственных векторов. Малые отклонения матричных коэффициентов M, C, K могут приводить к сильным отклонениям компонентов собственных векторов и к вычислительной неустойчивости.

В основе алгоритма Сурио [1–3], разработанного для решения линейных алгебраических систем уравнений, лежит понятие присоединенной матрицы. Предлагается обобщение этого алгоритма на построение общего решения систем линейных ОДУ. Преимущество такого метода состоит в отсутствии вычисления собственных значений и собственных векторов. Более того, для диссипативной системы не требуется выполнения специфических свойств матрицы C [4] и симметричности и положительности матриц масс и жесткостей.

Сначала дается краткое описание алгоритма Сурио для линейных алгебраических уравнений, затем он обобщается на матричные линейные ОДУ первого порядка и затем на механические системы, описываемые матричными линейными ОДУ второго порядка. Наконец, рассматривается система с внешним возбуждением.

2. Алгоритм Сурио. Введем основные определения и обозначения, которые понадобятся в дальнейшем. Пусть λ – скаляр и A – $(n \times n)$-матрица, I – единичная матрица, $\operatorname{adj} A$ – присоединенная матрица, т.е. транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A, иногда называемая взаимной матрицей, $\lambda I - A$ – характеристическая матрица, ее определитель равен характеристическому полиному

$P(\lambda)$, а ее присоединенная матрица называется характеристической присоединенной матрицей $Q(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = k_0\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + \ldots + k_{n-1}\lambda + k_n$$

$$Q(\lambda) = \operatorname{adj}(\lambda I - A) = \lambda^{n-1}B_0 + \lambda^{n-2}B_1 + \ldots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}$$

$$k_0 = 1, \quad k_n = (-1)^n \det A, \quad B_0 = I, \quad B_{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{adj}A$$

Алгоритм, представляющий собой усовершенствование метода Леверрье [5] и позволяющий вычислять одновременно скаляры k_i и матрицы B_i, был предложен в 1948 г. Сурио [1] и опробован на первых компьютерах в США. Позднее этот алгоритм иногда приписывали Д.К. Фаддееву [6] или Фрейму [7].

Алгоритм базируется на свойстве $A\operatorname{adj}A = I\det A$, связывающем присоединенную матрицу и определитель, и на соотношении между производной от определителя и характеристической присоединенной матрицей (штрих означает производную по λ)

$$(\lambda I - A)Q(\lambda) = P(\lambda)I, \quad P'(\lambda) = \operatorname{tr}Q(\lambda) \tag{2.1}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в левых и правых частях соотношений (2.1), приходим к расчетным рекуррентным формулам [2] алгоритма

$$B_0 = I, \quad A_i = AB_{i-1}, \quad k_i = \frac{\operatorname{tr}B_i}{n-i}, \quad B_i = A_i + k_iI; \quad i = 1, \ldots, n$$

3. Решение системы дифференциальных уравнений с производными первого порядка. Пусть матричное линейное ОДУ имеет вид

$$\dot{x} = Ax \tag{3.1}$$

Для построения решения вычисляются коэффициенты k_i характеристического полинома и матричные коэффициенты B_i характеристической приведенной матрицы. Ключевым в алгоритме Сурио является первое из соотношений (2.1). Подставив в него вместо переменной λ оператор d/dt, получим

$$\left(I\frac{d}{dt} - A\right)Q\left(\frac{d}{dt}\right) = IP\left(\frac{d}{dt}\right)$$

и пусть $\gamma(t)$ – частное скалярное решение ОДУ

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n} k_i\gamma^{(n-i)} = 0, \quad \gamma^{(n-i)} = \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}\gamma(t) \tag{3.2}$$

Тогда матричная функция

$$\phi(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i\gamma^{(n-i-1)}(t) \tag{3.3}$$

является решением матричного ОДУ

$$\dot{\phi} = A\phi(t)$$

В силу этого свойства линейное ОДУ (3.2) будем называть характеристическим ОДУ для ОДУ (3.1).

Для того чтобы матрица $\phi(t)$ в точности равнялась экспоненциалу e^{At}, необходимо, чтобы $\phi(0) = I$. В силу равенства $B_0 = I$ и равенства (3.3) для решения линейного ОДУ (3.2) следует выбрать начальные условия

$$\gamma^{(n-2)}(0) = 1, \quad \gamma^{(n-1)}(0) = \ldots = \gamma^{(1)}(0) = \gamma(0) = 0 \tag{3.4}$$

С таким выбором начальных условий для функции $\gamma(t)$ общее решение ОДУ (3.1) запишется в виде

$$x(t) = \phi(t)x_0, \quad x(0) = x_0 \tag{3.5}$$

Решение $\gamma(t)$ характеристического ОДУ (3.2) достаточно получить лишь на части $[0, h]$ заданного отрезка интегрирования. В оставшейся части экспоненциал $\phi(t)$ вычисляется с помощью матричного умножения на основании свойства

$$\phi(pt) = \phi^p(t) \tag{3.6}$$

Итак, алгоритм получения общего решения системы ОДУ вида (3.1) состоит из следующих шагов.

1°. Вычисление k_i и B_i с помощью алгоритма Сурио.

2°. Вычисление функции $\gamma(t)$ интегрированием ОДУ (3.2) с начальными условиями (3.4) на малом отрезке времени $[0, h]$.

3°. Табуляция матричной функции ϕ по формуле (3.3) на отрезке между $[0, h]$.

4°. Расширение области табуляции 3° на $[0, ph]$ с использованием свойства (3.6).

5°. Табуляция решения (3.5).

Указанный алгоритм легко может быть распространен также на ОДУ вида $A\dot{x} + Bx = 0$ с характеристической матрицей $\lambda A + B$.

4. Свободные колебания механических систем. ОДУ свободных колебаний линейной диссипативной механической системы имеет вид

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \tag{4.1}$$

с заданными начальными координатами и скоростями x_0 и $\dot{x}_0$. Матрицы M, C и K могут не удовлетворять обычным свойствам симметрии и знакоопределенности [8, 9].

Известны два способа сведения матричного ОДУ второго порядка (4.1) к матричному ОДУ первого порядка двойной размерности. В первом способе после введения дополнительных переменных $y = \dot{x}$, ОДУ (4.1) приводится к ОДУ вида [10, 11]

$$\dot{z} = Az, \quad z = \|x^T, y^T\|^T \tag{4.2}$$

Для получения $(2n \times 2n)$-матрицы A необходимо обращать матрицу масс M. При простых собственных значениях матрицы A решение ОДУ (4.2) представляется линейной комбинацией решений вида $e^{\lambda_k t}\upsilon_k$, где λ_k – собственные значения матрицы A и υ_k соответствующие им собственные векторы. В случае кратных собственных значений дополнительно появляются полиномиальные по t коэффициенты. Во втором способе ОДУ (4.1) приводится к виду

$$A\dot{z} + Bz = 0$$

где A и B – $(2n \times 2n)$-матрицы. Преимущество этого метода состоит в том, что матрицы A и B оказываются симметричными и не требуется обращения матрицы M.

В этом разделе метод, разработанный в разд. 3 для матричных линейных ОДУ первого порядка, распространяется на ОДУ вида (4.1) второго порядка без сведения к уравнениям первого порядка.

Так же, как в разд. 2, матрицу $\lambda^2 M + \lambda C + K$ будем называть характеристической матрицей, ее определитель $P(\lambda)$ – характеристическим полиномом и транспонированную матрицу ее алгебраических дополнений $Q(\lambda)$ – характеристической присоединенной матрицей:

$$P(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \sum_{i=0}^{2n} k_i \lambda^{2n-i}$$

$$Q(\lambda) = \operatorname{adj}(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \sum_{i=0}^{2n-2} B_i \lambda^{2n-2-i}$$

$$k_0 = \det M, \quad k_{2n} = \det K, \quad B_0 = \operatorname{adj} M, \quad B_{2n-2} = \operatorname{adj} K$$

Величины k_0 и B_0 будем использовать в качестве начальных условий для рекуррентных соотношений алгоритма Сурио, адаптированного для решения ОДУ (4.1).

Начнем с рассмотрения алгебраической части метода, которую разобьем на три шага. На первом шаге воспользуемся тождеством, аналогичным первому тождеству в формуле (2.1),

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)Q(\lambda) = P(\lambda)I \tag{4.3}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, придем к $2n + 1$ соотношениям между коэффициентами k_i и B_i

$$\begin{gathered} MB_0 = k_0 I, \quad MB_1 + CB_0 = k_1 I, \\ MB_2 + CB_1 + KB_0 = k_2 I, \ldots, MB_{2n-2} + CB_{2n-3} + KB_{2n-4} = k_{2n-2} I, \\ CB_{2n-2} + KB_{2n-3} = k_{2n-1} I, \quad KB_{2n-2} = k_{2n} I \end{gathered} \tag{4.4}$$

На втором шаге, вычисляя след матриц в левой и правой части соотношения (4.4), получим следующие $2n + 1$ скалярных соотношений:

$$\begin{gathered} \operatorname{tr}(MB_0) = nk_0, \quad \operatorname{tr}(MB_1) + \operatorname{tr}(CB_0) = nk_1 \\ \operatorname{tr}(MB_2) + \operatorname{tr}(CB_1) + \operatorname{tr}(KB_0) = nk_2, \ldots \\ \ldots, \operatorname{tr}(CB_{2n-2}) + \operatorname{tr}(KB_{2n-3}) = nk_{2n-1}, \quad \operatorname{tr}(KB_{2n-2}) = nk_{2n} \end{gathered} \tag{4.5}$$

На третьем шаге, используя свойство характеристической матрицы

$$P'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(\det(\lambda^2 M + \lambda C + K)) = \operatorname{tr}(Q(\lambda)(2\lambda M + C))$$

получим

$$\begin{gathered} 2nk_0\lambda^{2n-1} + (2n-1)k_1\lambda^{2n-2} + \ldots + 2k_{2n-2}\lambda + k_{2n-1} = \\ = \operatorname{tr}(2MB_0)\lambda^{2n-1} + \operatorname{tr}(2MB_1 + CB_0)\lambda^{2n-2} + \ldots + \\ + \operatorname{tr}(2MB_{2n-2} + CB_{2n-3})\lambda + \operatorname{tr}(CB_{2n-3}) \end{gathered} \tag{4.6}$$

Приравнивая в соотношении (4.6) коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$2nk_0 = 2\mathrm{tr}(MB_0), \quad (2n-1)k_1 = 2\mathrm{tr}(MB_1) + \mathrm{tr}(CB_0), \ldots$$
$$\ldots, 2k_{n-2} = 2\mathrm{tr}(MB_{n-2}) + \mathrm{tr}(CB_{2n-3}), \quad k_{2n-1} = \mathrm{tr}(CB_{2n-2}) \tag{4.7}$$

Сравнивая равенства (4.4), (4.5) и (4.7), для вычисления коэффициентов k_i и B_i по заданным параметрам n, M, C, K получим следующие рекуррентные соотношения для $i = 2, \ldots, 2n$

$$k_i = (\mathrm{tr}(CB_{i-1}) + 2\mathrm{tr}(KB_{i-2}))/i, \quad B_i = B_0(k_iI - CB_{i-1} - KB_{i-2})/k_0$$

с начальными условиями

$$k_0 = \det M, \quad k_1 = \mathrm{tr}(CB_0), \quad B_0 = \mathrm{adj}M, \quad B_1 = B_0(k_1I - CB_0)/k_0$$

Здесь для компактности записи добавлены нулевые матрицы $B_{2n-1} = B_{2n} = 0$.

Перейдем к численному построению решений $\gamma(t)$. В алгебраическом тождестве (4.3) заменим λ на d/dt и построим численное решение $\gamma(t)$ ОДУ

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma = k_0\gamma^{(2n)} + k_1\gamma^{(2n-1)} + k_2\gamma^{(2n-2)} + \ldots + k_{2n-2}\gamma^{(2)} + k_{2n-1}\gamma^{(1)} + k_{2n}\gamma = 0 \tag{4.8}$$

Тогда матрица

$$\phi(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma = B_0\gamma^{(2n-2)} + B_1\gamma^{(2n-3)} + \ldots + B_{2n-3}\gamma^{(1)} + B_{2n-2}\gamma$$

будет удовлетворять ОДУ

$$M\ddot{\phi} + C\dot{\phi} + K\phi = 0 \tag{4.9}$$

Общее решение ОДУ (4.1) представим линейной комбинацией двух линейно независимых решений, которые можно получить, выбирая для $\gamma(t)$ два набора начальных условий (при $k = 1$ и $k = 2$),

$$\gamma_k^{(2n-3+k)}(0) = 1, \quad \gamma_k^{(2n-k)}(0) = \gamma_k^{(2n-3)}(0) = \ldots = \gamma_k^{(1)}(0) = \gamma_k(0) = 0 \tag{4.10}$$

т.е. начальные данные в обоих наборах – нулевые, за исключением единиц для старшей производной $(2n-2)$-го порядка в первом наборе и для производной $(2n-1)$-го порядка во втором наборе. Тогда матричные решения ОДУ (4.9)

$$\phi_1(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma_1; \quad \phi_2(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma_2$$

удовлетворяют начальным условиям

$$\phi_1(0) = B_0, \quad \phi_1^{(1)}(0) = B_1, \quad \phi_2(0) = 0, \quad \phi_2^{(1)}(0) = B_0 \tag{4.11}$$

Решение ОДУ (4.1) можно представить в виде

$$x(t) = \phi_1(t)\upsilon_1 + \phi_2(t)\upsilon_2$$

где постоянные векторы υ_1 и υ_2 определяются из уравнений

$$B_0\upsilon_1 = x_0, \quad B_1\upsilon_1 + B_0\upsilon_2 = \dot{x}_0$$

Учитывая соотношение $B_0 = \operatorname{adj} M$, для υ_1 и υ_2 получим

$$\upsilon_1 = \frac{1}{k_0} M x_0, \quad \upsilon_2 = \frac{1}{k_0} M(\dot{x}_0 - B_1 \upsilon_1) \tag{4.12}$$

Решение $x(t)$ получено на отрезке $[0, h]$. Так же, как в случае матричного ОДУ первого порядка, это решение можно продолжить на отрезок $[0, ph]$ для любого целого p с помощью алгебраического соотношения

$$\left(\frac{1}{k_0}\Phi(t)W\right)^p = \frac{1}{k_0}\Phi(pt)W(t)$$

$$\Phi(t) = \begin{Vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1^{(1)}(t) & \phi_2^{(1)}(t) \end{Vmatrix}, \quad W = \begin{Vmatrix} M & 0 \\ -\frac{1}{k_0} M B_1 M & M \end{Vmatrix} \tag{4.13}$$

Итак, алгоритм получения общего решения ОДУ (4.1) состоит из следующих шагов.

1°. Вычисление k_i и B_i с помощью алгоритма Сурио, адаптированного для уравнения вида (4.1).

2°. Нахождение функций $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ численным интегрированием ОДУ (4.8) с начальными условиями (4.10) на небольшом интервале времени $[0, h]$.

3°. Табуляция матричных функций $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ на отрезке $[0, h]$.

4°. Расширение области табуляции 3° на отрезок $[0, ph]$ по формуле (4.13).

5°. Вычисление υ_1 and υ_2 по формуле (4.12).

6°. Табуляция решения $x(t) = \phi_1(t)\upsilon_1 + \phi_2(t)\upsilon_2$.

5. Вынужденные колебания механических систем. Вынужденные колебания линейной диссипативной механической системы с n степенями свободы описываются ОДУ (1.1) с зависящей от времени правой частью. Решение получим методом Лагранжа вариации произвольных постоянных υ_1 и υ_2, рассматривая их как функции времени

$$x(t) = \phi_1(t)\upsilon_1(t) + \phi_2(t)\upsilon_2(t) \tag{5.1}$$

При этом используем алгоритм из разд.4 вплоть до шага 3°, на котором определяются функции ϕ_1 и ϕ_2.

Как обычно, свяжем производные $\dot{\upsilon}_1$ и $\dot{\upsilon}_2$ дополнительным условием

$$\phi_1\dot{\upsilon}_1 + \phi_2\dot{\upsilon}_2 = 0 \tag{5.2}$$

Тогда

$$\dot{x}(t) = \dot{\phi}_1(t)\upsilon_1(t) + \dot{\phi}_2(t)\upsilon_2(t) \tag{5.3}$$

Дифференцируя равенство (5.2), получим

$$\phi_1\ddot{\upsilon}_1 + \phi_2\ddot{\upsilon}_2 = -\dot{\phi}_1\dot{\upsilon}_1 - \dot{\phi}_2\dot{\upsilon}_2$$

Подставляя $t = 0$ в соотношения (5.1) и (5.3), с учетом начальных условий (4.11) получим два соотношения между начальными данными для υ_1, υ_2 и x

$$x_0 = B_0\upsilon_1(0), \quad \dot{x}_0 = B_1\upsilon_1(0) + B_0\upsilon_2(0) \tag{5.4}$$

Откуда

$$\upsilon_1(0) = \frac{1}{k_0} M x_0, \quad \upsilon_2(0) = \frac{1}{k_0} M(\dot{x}_0 - B_1\upsilon_1) \tag{5.5}$$

Для определения функций $\upsilon_1(t)$ и $\upsilon_2(t)$ остается проинтегрировать следующую систему линейных ОДУ

$$\phi_1\dot{\upsilon}_1 + \phi_2\dot{\upsilon}_2 = 0, \quad M\dot{\phi}_1\dot{\upsilon}_1 + M\dot{\phi}_2\dot{\upsilon}_2 = F(t) \tag{5.6}$$

или в блочно-матричной форме

$$G\dot{\upsilon} = \Phi; \quad G = \begin{Vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ M\dot{\phi}_1 & M\dot{\phi}_2 \end{Vmatrix}, \quad \upsilon = \begin{Vmatrix} \dot{\upsilon}_1 \\ \dot{\upsilon}_2 \end{Vmatrix}, \quad \Phi = \begin{Vmatrix} 0 \\ F(t) \end{Vmatrix} \tag{5.7}$$

Используя присоединенную матрицу и определитель, получим

$$\dot{\upsilon} = \frac{\mathrm{adj}G}{\det G}\Phi \tag{5.8}$$

или после интегрирования

$$\upsilon(t) = \upsilon(0) + \int_0^t \frac{\mathrm{adj}G(s)}{\det G(s)}\Phi ds \tag{5.9}$$

Окончательно решение ОДУ (1.1) имеет вид

$$x(t) = \|\phi_1(t), \phi_2(t)\|\,\upsilon(t) \tag{5.10}$$

Эффективность предлагаемых алгоритмов проверена при исследовании реальных линейных колебательных систем как с симметричными, так и с несимметричными матрицами коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Souriau J.-M.* Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices // C.-R. Acad. Sci. 1948. T. 227. V. 2 P. 1010–1011.
2. *Souriau J.-M.* Calcul Linéaire, T. 1. Paris: Presses Univers. France. 1964. 260 p.
3. *Réaud K., Souriau J.-M., Vallée Cl., Fortuné D.* Méthode de Le Verrier-Souriau et équations différentielles linéaires // C.-R. Acad. Sci. Paris, Sér. IIb. 2000. T. 328. № 10. P. 773–778.
4. *Ma F., Caughey T.K.* Analysis of linear nonconservative vibrations // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1995. V. 62. № 3. P. 685–691.
5. *Le Verrier U.* Variations séculaires des éléments elliptiques des sept planétes principales: Mercure, Venus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus // J. Math. Pures Appli. 1840. V. 4. P. 220–254.
6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева Ф.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры, М.: Физматгиз, 1960. 656 с.
7. *Frame J.S.* A simple recursion formula for inverting a matrix (abstract) // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. P. 1045.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 575 с.
9. *Householder A.S.* The Theory of Matrices in Numerical Analysis. N.Y.: Blaisdell, 1964. 257 p.
10. *Inman D.J.* Dynamics of Asymmetric Nonconservative Systems // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 1. P. 199–203.
11. *Fawzy I., Bishop R.E.D.* On the dynamics of linear non-conservative systems // Proc. Roy. Soc. London: Ser. A. 1976. V. 352. № 1668. P. 25–40.

Пуатье, Франция
e-mail: reaud@yahoo.fr,
vallee@ms.univ-poitiers.fr,
fortune@ms.univ-poitiers.fr

Поступила в редакцию
17.II.2005