УДК 531.392

© 2005 г. Д. Н. Зекович

О ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассматривается проблема существования линейных интегралов уравнений движения механической системы, подчиненной нелинейным связям. Известные результаты для голономных систем, а также для неголономных систем с линейными связями распространяются на системы с нелинейными неголономными связями. Приводятся примеры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q^1, \ldots, q^n$; кинетическая энергия задана выражением $T = a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j/2$, а потенциальная энергия $\Pi = \Pi(q^i)$. Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование. Индексы принимают следующие значения: i, $j, k, s = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$; $\nu, \rho = 1 + m, \ldots, m + l = n$. Система подчинена нелинейным неголономным связям вида

$$f^{\nu}(q^i, \dot{q}^i) = 0 \tag{1.1}$$

Уравнения указанной системы запишем в гамильтоновой форме

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} + \lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial \dot{q}^j} \tag{1.2}$$

Здесь $p_j = \partial T/\partial \dot{q}^j$, H – функция Гамильтона, она имеет вид $H = b^{ij}p_i/2 + \Pi$, b^{ij} – элементы матрицы, обратной к $\|a_{ij}\|$, λ_{ν} – множители связей.

Предположим, что уравнения движения (1.2) имеют интеграл, линейный по импульсам:

$$\varphi = \varepsilon^j p_j = \text{const} \tag{1.3}$$

Были получены [1, 2] необходимые и достаточные условия существования линейных интегралов уравнений движения с линейными неголономными связями вида $c_j^{\nu}\dot{q}^j = 0$: функция (1.3) – интеграл уравнений движения тогда и только тогда, когда а) $c_j^{\nu}\varepsilon^j = 0$, б) (1.3) – интеграл уравнений $\dot{q}^j = \partial H/\partial p_j$, $\dot{p}_j = -\partial H/\partial q^j$. Однако было показано [3], что в [1, 2] на самом деле нет анализа необходимости условий *а* и *б* и на примерах было показано, что условия *а* и *б* не являются необходимыми, т.е. существует случай, когда $c_j^{\nu}\varepsilon^j \neq 0$, однако система имеет линейный интеграл. С помощью обобщенного понятия "циклической" координаты была доказана [3, 4] теорема о линейных интегралах, аналогичная теорема для голономных механических систем [5–7].

2. Условия существования линейных интегралов. Пользуясь методами, описанными ранее [1–4], дадим обобщение указанных результатов на механические системы с нелинейными неголономными связями (1.1).

Циклической координатой обычно называется координата q^n, для которой

$$\frac{\partial H}{\partial q^n} = 0, \quad \lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial \dot{q}^n} = 0$$

Отметим частный случай этого определения

$$\frac{\partial H}{\partial q^n} = 0, \quad \frac{\partial f^{m+1}}{\partial \dot{q}^n} = 0, \ldots, \frac{\partial f^{m+l}}{\partial \dot{q}^n} = 0$$

Связь (1.1) можно переписать в форме

$$F^\nu(q^i, p_i) = 0 \tag{2.1}$$

Далее под выражением в квадратных скобках будем подразумевать выражение, в котором с помощью связей (2.1) исключено l импульсов.

Очевидно, что выражение

$$\gamma = k_\nu F^\nu \tag{2.2}$$

где k_ν – произвольные функции координат, представляет собой линейный интеграл уравнений (1.2), если начальные условия выбраны в соответствии с уравнениями связей. Координату q^n назовем "циклической", если

$$\left[\frac{\partial H}{\partial q^n}\right] = 0 \ \left(\text{в частности, } \frac{\partial H}{\partial q^n} = 0\right), \quad \frac{\partial f^{m+1}}{\partial \dot{q}^n} = 0, \ldots, \frac{\partial f^{m+l}}{\partial \dot{q}^n} = 0$$

Имеет место следующее утверждение: интегралами, линейными относительно импульсов, обладают только такие системы, которые либо имеют "циклические" координаты, либо могут быть преобразованы в системы с "циклическими" координатами посредством расширенного точечного преобразования (сравнение с аналогичным утверждением [4]).

Действительно, выражение

$$\psi = \varphi - k_\nu F^\nu = \eta^j p_j$$

где k_ν – решение алгебраических уравнений

$$k_\nu \frac{\partial F^\nu}{\partial p_i} \frac{\partial f^\rho}{\partial \dot{q}^i} = \varepsilon^j \frac{\partial f^\rho}{\partial \dot{q}^j}$$

является интегралом уравнений (1.2) на множестве действительных траекторий системы, причем

$$\frac{\partial f^\rho}{\partial \dot{q}^j} \eta^j = 0 \tag{2.3}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial q^1}{\partial \eta^1} = \ldots = \frac{\partial q^n}{\partial \eta^n} \tag{2.4}$$

Предположим, что хотя бы одна из функций $\eta^1, \ldots, \eta^n$ отлична от нуля, например $\eta^1 \neq 0$. Пусть система решений уравнений (2.4) состоит из $n-1$ интегралов $Q^r(q^1, \ldots, q^n) =$ $=\text{const}$ $(r = 1, \ldots, n-1)$ и пусть функция Q^n определена уравнением

$$Q^n = \int \frac{dq^1}{\eta^1}$$

где в выражении для η^1 координаты $q^2, \ldots, q^n$ следует выразить через $q^1, Q^1, \ldots, Q^{n-1}$. Если переменные изменяются таким образом, что изменяется лишь величина Q^n, а величины $Q^1, \ldots, Q^{n-1}$ остаются постоянными, то в силу предыдущего уравнения получаем

$$\frac{dq^1}{\eta^1} = \ldots = \frac{dq^n}{\eta^n} = dQ^n \tag{2.5}$$

Если величины $Q^1, \ldots, Q^n$ рассматривать как новые переменные, через которые могут быть выражены прежние переменные $q^1, \ldots, q^n$, то

$$\frac{\partial q^s}{\partial Q^n} = \eta^s$$

Рассмотрим теперь расширенное точечное преобразование от переменных $q^1, \ldots, q^n$ к переменным $Q^1, \ldots, Q^n$, так что новые импульсы $P_1, \ldots, P_n$ определяются уравнениями

$$P_k = p_s \frac{\partial q^s}{\partial Q^k}$$

(см. [5, 6]). В результате этого преобразования уравнения (1.2) принимают следующую форму [2]:

$$\dot{Q}^j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} + \lambda_\nu A_j^\nu; \quad A_j^\nu = \frac{\partial f^\nu}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}$$

где $\bar{H}$ – функция Гамильтона системы, представленная в новых переменных.

Интеграл $\psi = \text{const}$ преобразуется в интеграл $P_n = \text{const}$. Так как $[\dot{P}_n] = 0$ и $A_n^{m+1} = 0, \ldots$ $\ldots, A_n^n = 0$ (см. соотношения (2.3) и (2.5)), то $[\partial \bar{H}/\partial Q^n] = 0$. Это означает, что координата Q^n – “циклическая”.

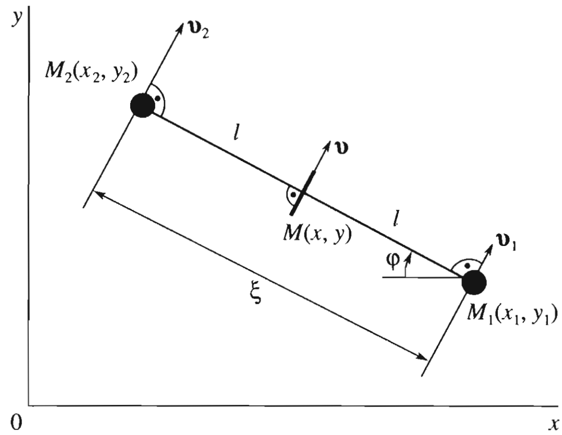
3. Примеры. *Пример* 1. Пусть две весомые материальные точки M_1 и M_2 единичной массы, соединенные стержнем неизменной длины $2l$, движутся в вертикальной плоскости таким образом, что их скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ параллельны. Эту связь можно реализовать прикреплением лезвия в точке M перпендикулярно направлению M_1M_2 [8] (см. фиг. 1).

Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 – координаты точек M_1 и M_2. Уравнения связей системы записываются в виде

$$f^3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (2l)^2 = 0, \quad f^4 = \dot{x}_1\dot{y}_2 - \dot{x}_2\dot{y}_1 = 0$$

причем второе уравнение выражает условие параллельности $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ и представляет нелинейную неголономную связь. Функция Лагранжа системы и функция Гамильтона имеют вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - g(y_1 + y_2), \quad H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) + g(y_1 + y_2) \tag{3.1}$$



Фиг. 1

Определим новые переменные соотношениями

$$Q^1 = \frac{q^1 + q^3}{2}, \quad Q^2 = \frac{q^2 + q^4}{2}, \quad Q^3 = \sqrt{(q^3 - q^1)^2 + (q^4 - q^2)^2}, \quad Q^4 = \int\frac{dq^1}{\eta^1} = \int\frac{dq^1}{q^4 - q^2} \quad (3.2)$$

$$q^1 = x_1, \quad q^2 = y_1, \quad q^3 = x_2, \quad q^4 = y_2$$

причем q^4 и q^2 в последнем интеграле должны быть выражены через q^1, Q^1, Q^2, Q^3. Формулы, выражающие старые переменные через новые, имеют вид

$$q^{1,3} = Q^1 \mp \frac{Q^3}{2}\cos Q^4, \quad q^{2,4} = Q^2 \mp \frac{Q^3}{2}\sin Q^4$$

Смысл новых переменных ясен: Q^1, Q^2 – координаты x и y центра стержня, Q^3 – постоянная величина, равная длине стержня, Q^4 – угол наклона стержня к оси x.

Уравнения движения допускают линейный и однородный относительно импульсов интеграл

$$(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - (y_2 - y_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \text{const} \quad (3.3)$$

Функция Лагранжа и уравнения связей преобразованной системы, а также функция Гамильтона записываются в виде

$$\bar{L} = (\dot{Q}^1)^2 + (\dot{Q}_2)^2 + (Q^3/2)(\dot{Q}^4)^2 - 2gQ^2$$

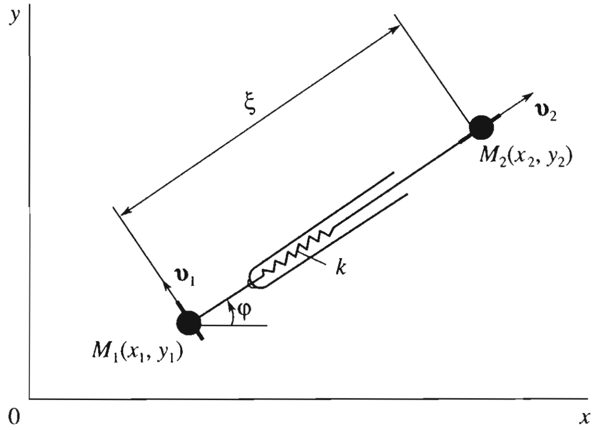
$$\bar{f}^3 = \dot{Q}^3 = 0, \quad \bar{f}^4 = \dot{Q}^1 - \dot{Q}^2\operatorname{tg}Q^4 = 0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{4}P_1^2 + \frac{1}{4}P_2^2 + \frac{1}{(Q^3)^2}P_4^2 + 2gQ^2$$

Так как

$$\partial\bar{H}/\partial Q^4 = 0, \quad A_4^3 = 0, \quad A_4^4 = 0 \quad (3.4)$$

то координата Q^4 – циклическая, и таким образом, имеет место интеграл $P_4 = \frac{1}{2}(Q^3)^2\dot{Q}^4 = \text{const}$, т.е. $\dot{\varphi} = \text{const}$.



Фиг. 2

Пример 2. Система состоит из двух материальных точек M_1 и M_2 единичной массы, соединенных невесомой конструкцией ("вилка"), как показано на фиг. 2. В точках M_1 и M_2 имеются два лезвия, одно из которых параллельно, а другое перпендикулярно отрезку M_1M_2. Система находится в потенциальном силовом поле, потенциальная энергия П, которого зависит лишь от расстояния между точками M_1 и M_2. Например, эти точки могут быть соединены упругой пружиной [8].

Уравнения связей системы можно записать в форме

$$f^3 = \dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{y}_1 \sin\varphi = 0, \quad f^4 = \dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_2 = 0$$

причем второе уравнение выражает условие ортогональности скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ и представляет нелинейную неголономную связь.

Функции Лагранжа и Гамильтона имеют форму, отличающуюся от (3.1) лишь заменой функции $g(y_1 + y_2)$ на $\Pi(x_1, y_1, x_2, y_2)$.

Определим новые переменные соотношениями, аналогичными (3.2), за исключением того, что теперь $Q^1 = q^3$, $Q^2 = q^4$. Формулы, выражающие старые переменные через новые, имеют вид

$$q^1 = Q^1 - Q^3\cos Q^4, \quad q^2 = Q^2 - Q^3\sin Q^4, \quad q^3 = Q^1, \quad q^4 = Q^2$$

Смысл новых переменных ясен: Q^1, Q^2 – координаты точки M_2, Q^3 – длина отрезка M_1M_2, Q^4 – угол наклона отрезка M_1M_2 к оси x.

Уравнения движения системы допускают линейный и однородный по импульсам интеграл вида (3.3).

Функция Лагранжа и уравнения связей преобразованной системы, а также функция Гамильтона имеют вид

$$\bar{L} = \frac{1}{2}[(\dot{Q}^1)^2 + (\dot{Q}^2)^2] + \frac{1}{2}(Q^3\dot{Q}^4)^2 - \frac{1}{2}k(Q^3 - Q_0^3)^2$$

$$\bar{f}^3 = \dot{Q}^1\cos Q^4 + \dot{Q}^2\sin Q^4 - \dot{Q}^3 = 0, \quad \bar{f}^4 = (\dot{Q}^1)^2 + (\dot{Q}^2)^2 - (\dot{Q}^3)^2 = 0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2}P_2^2 + \frac{1}{2(Q^3)^2}P_4^2 + \frac{1}{2}k(Q^3 - Q_0^3)^2$$

Так как выполняются условия (3.4), то координата Q^4 – циклическая, и таким образом, имеет место циклический интеграл $P_4 = (Q^3)^2\dot{Q}^4 = \text{const}$, т.е. $\xi^2\dot{\varphi} = \text{const}$.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и технологии Сербии (1616) при участии Математического института САНУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agostinelli C.* Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema aholonome ed esistenza di un integrale lineare nelle velosita Lagrangiane // Boll. Unione mat. Ital. Ser3. 1956. V. 11. № 1. P. 1–9.
2. *Назиев Э.Х.* О механических системах с интегралами, линейными относительно импульсов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Механика, математика. 1969. № 2. С. 77–85.
3. *Сумбатов А.С.* О линейных интегралах уравнений движения со множителями связей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1971. № 4. С. 99–101.
4. *Сумбатов А.С.* О линейных интегралах неголономных систем // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1972. № 6. С. 77–83.
5. *Whittaker E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamica. Cambrige: Univ. Press, 1927. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Глав. ред. техн.-теорет. лит., 1937. 500 с.
6. *Pars L.A.* A Treatise on Analytical Dynamics. L.: Heinemann, 1965. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
7. *Илиев И.* О линейных интегралах голономной механической системы // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 751–755.
8. *Зекович Д.* Примеры нелинейных неголономных связей в классической механике // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1991. № 1. С. 100–103.

Белград

Поступила в редакцию
25.II.2004