УДК 531.38

© 2005 г. Г. В. Горр, Е. К. Узбек

О НОВОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается задача интегрирования дифференциальных уравнений Кирхгофа [1] в случае, когда они допускают линейное инвариантное соотношение по основным переменным – компонентам момента количества движения гиростата и единичного вектора оси симметрии силового поля. С помощью первых интегралов уравнений проведена редукция исходной системы уравнений к системе второго порядка. При определенных условиях, налагаемых на параметры, характеризующие геометрию масс гиростата, потенциальные и гироскопические силы, найден интегрирующий множитель приведенных уравнений. Полученное решение уравнений Кирхгофа содержит четыре произвольные постоянные и установлено при более общих предположениях по сравнению с известными решениями [2–4].

В динамике твердого тела с неподвижной точкой большой интерес представляет изучение не только классической задачи о движении тяжелого твердого тела [5, 6], но и различных ее обобщений, особенно задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [7] и задачи о движении тяжелого твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости [1–4, 8, 9]. Это связано с тем, что последние две задачи математически эквивалентны, так как описываются дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа [1, 7]. В силу этого факта установленные ранее случаи интегрируемости уравнений движения тела в жидкости (см. обзоры [5, 6], а также [3, 4, 9, 10]) могут интерпретироваться как решения уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [7]. Так как справедливо и обратное утверждение, то любое новое решение уравнений движения гиростата [7] является новым решением и уравнений Кирхгофа.

В общем случае была доказана неинтегрируемость уравнений Эйлера–Пуассона [11] и уравнений Кирхгофа–Пуассона [8]. Поэтому для этих уравнений актуальна проблема построения новых частных решений [6].

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальные уравнения движения гиростата, имеющего неподвижную точку в силовом поле, которое является суперпозицией ньютоновского, электрического и магнитного полей, в предложенной ранее постановке [7]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times a\mathbf{x} + a\mathbf{x}\times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu} \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс, $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор, построенный в неподвижной точке, $B = (B_{ij})$ – постоянная симметричная матрица третьего порядка, определяющая гироскопические силы, $C = (C_{ij})$ – постоянная симметричная матрица третьего порядка, характеризующая потенциальные силы.

Уравнения (1.1), (1.2) имеют первые интегралы

$$\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x}-2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu})+(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})-(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})/2 = k,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1 \tag{1.3}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Поставим задачу об определении условий существования у системы (1.1), (1.2) одного инвариантного соотношения

$$x_1-(g_0+g_1\nu_1+g_2\nu_2+g_3\nu_3) = 0 \tag{1.4}$$

где g_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ – постоянные, подлежащие определению.

Для задачи о движении тела в жидкости были найдены [4] условия существования инвариантного соотношения (1.4), а интегрирование уравнений Кирхгофа–Пуассона было выполнено только в частных случаях [2, 3], причем был исследован вариант $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ [2] и вариант $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ [3]. Для классической задачи о движении тяжелого твердого тела, уравнения которой следуют из системы (1.1), (1.2) при $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, $B = 0$, $C = 0$, аналог соотношения (1.4) – $x_1 = 0$ изучен Гессом [12]. Геометрическое истолкование решения Гесса дано А.М. Ковалевым [13]. Л.Н. Сретенский [14] обобщил это решение на случай, когда $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, $B = 0$, $C = 0$.

Продифференцируем соотношение (1.4) в силу скалярных уравнений, вытекающих из системы (1.1), (1.2), и потребуем, чтобы полученное равенство после подстановки в него соотношения (1.4) было тождеством при любых значениях переменных x_2, x_3, ν_1, ν_2, ν_3. Тогда найдем следующие условия, налагаемые на параметры задачи и параметры g_i $(i = 0, 1, 2, 3)$:

$$\begin{gathered}
a_{12} = a_{23} = 0,\quad a_{22} = a_{33},\quad \lambda_2 = 0,\quad a_{13}g_0-a_{22}\lambda_3 = 0,\quad g_2 = B_{12}\\
a_{13}g_1-a_{22}g_3+a_{22}B_{13} = 0,\quad a_{13}g_2+a_{22}B_{23} = 0\\
a_{13}g_3+a_{22}g_1+a_{22}B_{33} = 0,\quad a_{22}g_1-a_{13}g_3+a_{22}B_{22} = 0\\
s_2 = g_0(a_{13}B_{23}+a_{11}g_2),\quad s_3 = g_0(a_{11}g_3-a_{13}g_1-a_{13}B_{22})\\
C_{12}+g_1(a_{13}B_{23}+a_{11}g_2) = 0,\quad C_{13}+g_1(a_{11}g_3-a_{13}g_1-a_{13}B_{22}) = 0\\
C_{23}+g_2(a_{11}g_3-a_{13}g_1-a_{13}B_{22}) = 0,\quad C_{23}+g_3(a_{13}B_{23}+a_{11}g_2) = 0\\
C_{22}-C_{33} = a_{11}(g_3^2-g_2^2)-a_{13}(g_1g_3+g_3B_{22}+g_2B_{23})
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Рассмотрим вариант, когда $a_{13} = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $s_3 = 0$. Тогда, обозначая $a_{ii} = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, из системы (1.5) имеем

$$\begin{gathered}
a_{ij} = 0\quad (i\neq j),\quad a_3 = a_2,\quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\quad B_{23} = B_{13} = 0,\quad B_{33} = B_{22}\\
C_{12} = a_1B_{12}B_{22},\quad C_{23} = C_{13} = 0,\quad C_{33}-C_{22} = a_1B_{12}^2,\quad s_3 = 0\\
g_0 = s_2/(a_1B_{12}),\quad g_1 = -B_{22},\quad g_2 = B_{12},\quad g_3 = 0
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Из условий $a_{ij} = 0$, $a_3 = a_2$ вытекает, что первая координатная ось, относительно которой задано линейное инвариантное соотношение (1.4), ортогональна круговому сечению гирационного эллипсоида. Другие равенства (1.6) показывают, что вектор гиростатического момента направлен по этой же оси, а вектор $\mathbf{s}$ в общем случае ей не принадлежит.

На основании условий (1.6) соотношение (1.4) запишем так:

$$x_1 = g_0-B_{22}\nu_1+B_{12}\nu_2 \tag{1.7}$$

Уравнения (1.1), (1.2) при условиях (1.6), (1.7) принимают вид

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= x_3(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2) - \alpha_3\nu_3 - \alpha_{13}\nu_1\nu_3 \\
\dot{x}_3 &= -x_2(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2) + \alpha_3\nu_2 + \alpha_{13}\nu_1\nu_2 \\
\dot{\nu}_1 &= a_2(x_3\nu_2 - x_2\nu_3) \\
\dot{\nu}_2 &= -a_2x_3\nu_1 + a_1g_0\nu_3 - a_1B_{22}\nu_1\nu_3 + a_1B_{12}\nu_2\nu_3 \\
\dot{\nu}_3 &= a_2x_2\nu_1 - a_1g_0\nu_2 + a_1B_{22}\nu_1\nu_3 - a_1B_{12}\nu_2^2
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

где

$$
\alpha_0 = g_0(a_1 - a_2) - a_2\lambda_1, \quad \alpha_1 = a_2B_{11} - (a_1 - a_2)B_{22}
$$

$$
\alpha_2 = a_1B_{12}, \quad \alpha_3 = s_1 + a_{22}g_0B_{22}, \quad \alpha_{13} = C_{22} - C_{11} + a_1B_{12}^2 - a_1B_{22}^2
$$

Учтем соотношения (1.6), (1.7) в интегралах (1.3). Получим

$$
\begin{aligned}
&a_2(x_2^2 + x_3^2) - 2\alpha_3\nu_1 - \alpha_{13}\nu_1^2 = 2E_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \\
&x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + (g_0 + \lambda_1)\nu_1^2 - (B_{11} + B_{22})\nu_1^2/2 = k_1
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Здесь

$$
E_1 = E - (a_1g_0^2 + C_{33})/2, \quad k_1 = k + B_{22}/2
$$

(E_1 и k_1 – новые произвольные постоянные).

Уравнения (1.8) имеют три первых интеграла (1.9), и поэтому их интегрирование сводится к интегрированию системы второго порядка. Находить интегрирующий множитель этой системы можно с помощью теории интегрирующего множителя Якоби [15]. Такой подход применяется, как правило, в случае, когда известен дополнительный первый интеграл системы (1.1), (1.2), поскольку у нее интегрирующий множитель Якоби равен единице. Для системы (1.8) справедливо условие

$$
\sum_{i=1}^{5} \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} \neq 0
$$

где

$$
y_1 = x_2, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = \nu_1, \quad y_4 = \nu_2, \quad y_5 = \nu_3
$$

и Y_i – правые части системы (1.8); таким образом, интегрирующий множитель Якоби – функция переменных y_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$). Последнее обстоятельство существенно усложняет применение общей теории [15], и поэтому в данной статье интегрирование системы (1.8) будем проводить с помощью нахождения интегрирующего множителя приведенной системы второго порядка.

Из первого и третьего соотношений системы (1.9) имеем

$$
x_2 = \frac{a_2\nu_2\varphi(\nu_1) + \nu_3\sqrt{\Delta(\nu_1)}}{a_2(1 - \nu_1^2)}, \quad x_3 = \frac{a_2\nu_3\varphi(\nu_1) - \nu_2\sqrt{\Delta(\nu_1)}}{a_2(1 - \nu_1^2)}
\tag{1.10}
$$

где

$$\varphi(\nu_1) = k_1 - (g_0 + \lambda_1)\nu_1 + (B_{11} + B_{22})\nu_1^2/2$$
$$\Delta(\nu_1) = d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_1^2 + d_3\nu_1^3 + d_4\nu_1^4 \qquad (1.11)$$

Здесь

$$d_0 = a_2(2E_1 - a_2k_1), \quad d_1 = 2a_2[\alpha_3 + a_2(g_0 + \lambda_1)k_1]$$
$$d_2 = a_2[\alpha_{13} - 2E_1 - a_2(g_0 + \lambda_1)^2 - a_2k_1(B_{11} + B_{22})]$$
$$d_3 = a_2[a_2(g_0 + \lambda_1)(B_{11} + B_{22}) - 2\alpha_3] \qquad (1.12)$$
$$d_4 = -a_2[\alpha_{13} + a_2(B_{11} + B_{22})^2/4]$$

Внесем выражения (1.7), (1.10) в последние три уравнения системы (1.8). Получим

$$\dot{\nu}_1 = -\sqrt{\Delta(\nu_1)}, \quad \dot{\nu}_2 = \frac{\nu_1\nu_2\sqrt{\Delta(\nu_1)} + \nu_3\psi(\nu_1)}{1 - \nu_1^2}, \quad \dot{\nu}_3 = \frac{\nu_1\nu_3\sqrt{\Delta(\nu_1)} - \nu_2\psi(\nu_1)}{1 - \nu_1^2} \qquad (1.13)$$

Здесь

$$\psi(\nu_1) = a_1B_{12}\nu_2(1 - \nu_1^2) + P(\nu_1), \quad P(\nu_1) = p_0 + p_1\nu_1 + p_2\nu_1^2 + p_3\nu_1^3$$
$$p_0 = a_1g_0, \quad p_1 = -a_2k_1 - a_1B_{22}, \quad p_2 = a_2\lambda_1 + g_0(a_2 - a_1) \qquad (1.14)$$
$$p_3 = [2a_1B_{22} - a_2(B_{11} + B_{22})]/2$$

Таким образом, интегрирование уравнений (1.1), (1.2) на инвариантном соотношении (1.4) сведено к интегрированию системы третьего порядка (1.13).

2. Интегрирование системы (1.13). Введем вместо переменных ν_1, ν_2, ν_3 переменные φ, θ. В силу геометрического интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ можно записать

$$\nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi \qquad (2.1)$$

Подставим выражения (2.1) в систему (1.13). Получим

$$d\theta/dt = \sqrt{\Delta(\cos\theta)}/\sin\theta \qquad (2.2)$$

$$\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta d\varphi + [a_1B_{12}\sin^3\theta\cos\varphi + P(\cos\theta)]d\theta = 0 \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.2) устанавливает зависимость $\theta(t)$. В общем случае из него вытекает, что $\nu_1 = \cos\theta$ – эллиптическая функция времени. Для определения функции $\varphi(\theta)$ из уравнения (2.3) задаем интегрирующий множитель этого уравнения в виде

$$M(\varphi, \theta) = [\sqrt{\Delta(\cos\theta)}N(\varphi, \theta)]^{-1}, \quad N(\varphi, \theta) = \varphi_1(\theta)\sin\varphi + \varphi_2(\theta)\cos\varphi + \varphi_3(\theta) \qquad (2.4)$$

где $\varphi_i(\theta)$ ($i = 1, 2, 3$) – функции, подлежащие определению.

Если интегрирующий множитель (2.4) будет найден, то уравнение (2.3) запишется так:

$$\frac{\partial V(\varphi, \theta)}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial V(\varphi, \theta)}{\partial\theta}d\theta = 0 \qquad (2.5)$$

Здесь в силу соотношений (2.3), (2.4) обозначено

$$\frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi} = \frac{\sin\theta}{N(\varphi,\theta)}, \quad \frac{\partial V(\varphi,\theta)}{\partial\theta} = \frac{a_1B_{12}\sin^3\theta\cos\varphi + P(\cos\theta)}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}N(\varphi,\theta)} \tag{2.6}$$

Принимая во внимание эти уравнения, распишем равенство

$$\frac{\partial^2 V(\varphi,\theta)}{\partial\theta\partial\varphi} = \frac{\partial^2 V(\varphi,\theta)}{\partial\varphi\partial\theta}$$

Имеем

$$\sqrt{\Delta(\cos\theta)}(\varphi_3'(\theta)\sin\theta - \varphi_3(\theta)\cos\theta) = a_1B_{12}\varphi_1(\theta)\sin^3\theta \tag{2.7}$$

$$\sqrt{\Delta(\cos\theta)}(\varphi_2'(\theta)\sin\theta - \varphi_2(\theta)\cos\theta) = \varphi_1(\theta)P(\cos\theta) \tag{2.8}$$

$$\sqrt{\Delta(\cos\theta)}(\varphi_1'(\theta)\sin\theta - \varphi_1(\theta)\cos\theta) = a_1B_{12}\varphi_3(\theta)\sin^3\theta - \varphi_2(\theta)P(\cos\theta) \tag{2.9}$$

Для нахождения решения системы (2.7)–(2.9) по аналогии с работами [2, 3] положим $\varphi_1(\theta) = \sqrt{\Delta(\cos\theta)}$. Тогда уравнение (2.7) интегрируется просто:

$$\varphi_3(\theta) = \Phi(\cos\theta)\sin\theta, \quad \Phi(\cos\theta) = x_0 - a_1B_{12}\cos\theta \tag{2.10}$$

где x_0 – произвольная постоянная. Решение уравнения (2.8) будем определять в классе многочленов по $\cos\theta$. Можно показать, что при условии $p_2 = 0$ оно допускает решение

$$\varphi_2(\theta) = -(p_1 + 2p_3) - p_0\cos\theta + p_3\cos^2\theta \tag{2.11}$$

Таким образом, в силу обозначений (1.14) получим дополнительное к условиям (1.6) ограничение параметров задачи (1.1), (1.2)

$$\lambda_1 = g_0(a_1 - a_2)/a_2 \tag{2.12}$$

Внесем выражения $\varphi_1(\theta) = \sqrt{\Delta(\cos\theta)}$, (2.10), (2.11) в уравнение (2.9) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по θ. Тогда в силу выражения для $\Delta(\nu_1)$ из соотношений (1.11) получим

$$\begin{gathered} d_1 + 2x_0a_1B_{12} + 2p_0(p_1 + 2p_3) = 0 \\ d_0 + d_2 - a_1^2B_{12}^2 + p_0^2 + p_1(p_1 + 2p_3) = 0 \\ d_1 + 3d_3 - 4a_1B_{12}x_0 - 2p_0p_3 + 2p_0p_1 = 0 \\ d_4 + a_1^2B_{12}^2 + p_3^2 = 0, \quad d_3 - 2a_1B_{12}x_0 - 2p_0p_3 = 0 \end{gathered} \tag{2.13}$$

На основании обозначений (1.12), (1.14) и условия (2.12) можно показать, что система уравнений (2.13) зависима и приводится только к двум уравнениям

$$a_2(C_{33} - C_{11}) = a_1(a_1B_{22} - a_2B_{11})B_{22} + a_1^2B_{12}^2 \tag{2.14}$$

$$x_0 = [a_1g_0(a_2B_{11} - a_1B_{22}) - a_2s_1]/(a_1B_{12}) \tag{2.15}$$

Таким образом, если параметры задачи (1.1), (1.2) удовлетворяют условиям (2.12), (2.14), то дифференциальное уравнение (2.3) допускает интегрирующий множитель (2.4), где $\varphi_1(\theta) = \sqrt{\Delta(\cos\theta)}$, $\varphi_2(\theta)$, $\varphi_3(\theta)$ выражаются формулами (2.10), (2.11), а параметр x_0 определен соотношением (2.15). При этом постоянные E_1 и k_1, входящие в выражения для d_i из (1.12), остались произвольными.

Обратимся к системе уравнений (2.6). Из первого уравнения этой системы в общем случае можно получить три варианта результата интегрирования. Они зависят от значения величины

$$\mu_0 = (p_1 + 2p_3)^2 + d_0 - x_0^2$$

Здесь полагаем, что выполнено неравенство $\mu_0 > 0$, которого можно добиться выбором произвольных постоянных E_1 и k_1. Тогда из равенства (2.2) в силу соотношений (1.11), (1.12) следует, что существуют значения переменной θ, при которых величина $\Delta(\cos\theta)$ не отрицательна, т.е. $\theta(t)$ – действительная функция времени. При условии $\mu_0 > 0$ имеем

$$V(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \ln\left|\frac{H_+(\varphi, \theta)}{H_-(\varphi, \theta)}\right| + F(\theta) \tag{2.16}$$

где

$$H_\pm(\varphi, \theta) = h(\theta) \pm \sqrt{\mu_0}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi - \alpha(\theta)}{2}, \quad h(\theta) = \Phi(\cos\theta) + \sqrt{\mu_0 + \Phi^2(\cos\theta)}$$

$$\alpha(\theta) = \arccos\frac{\varphi_2(\cos\theta)}{\sin\theta\sqrt{\mu_0 + \Phi^2(\cos\theta)}}$$

а $F(\theta)$ – функция, которая определяется путем подстановки выражения (2.16) во второе уравнение системы (2.6):

$$F(\theta) = f(\nu_1(\theta)) = \int\frac{-a_1 B_{12}[(p_1 + 2p_3) + p_0\nu_1 - p_3\nu_1^2]}{[\mu_0 + \Phi^2(\nu_1)]\sqrt{\Delta(\nu_1)}}d\nu_1 \tag{2.17}$$

Таким образом, соотношение (2.5) примет вид $dV(\varphi, \theta) = 0$, т.е. уравнение (2.3) при выполнении условий (2.12), (2.14), (2.15) допускает первый интеграл $V(\varphi, \theta) = C$, где C – произвольная постоянная. В силу равенств (2.16), (2.17) приведем его к виду

$$\varphi(\theta) = \alpha(\theta) + 2\mathrm{arctg}\left[\frac{h(\theta)}{\sqrt{\mu_0}}\mathrm{th}\frac{\sqrt{\mu_0}}{2}(C - f(\cos\theta))\right] \tag{2.18}$$

Следовательно, в построенном решении $\nu_1 = \cos\theta(t)$ – эллиптическая функция времени, а зависимость $\varphi = \varphi(\theta)$ определяет уравнение (2.18). После подстановки этих функций в уравнения (1.7), (1.10), (2.1) найдем зависимости всех переменных задачи (1.1), (1.2) от времени t. Полученное решение зависит от четырех произвольных постоянных E, k, C и t_0.

В заключение отметим, что Чаплыгин [2] построил решение уравнений (2.2), (2.3) при условиях $g_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $s_1 = 0$, а Харламов [3] – при условиях $g_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Г. Кирхгофа // Механика твердого тела. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. НАН Украины, 2001. Вып. 31. С. 3–17.

2. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. (Статья вторая) // Собр. соч. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. С. 194–311.
3. *Харламов П.В.* О линейном интеграле уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Тр. Донецк. индустр. ин-та. 1957. Т. 20. С. 51–67.
4. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // ПМТФ. 1963. № 4. С. 17–29.
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ. Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 384 с.
6. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 296 с.
7. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I. The equation of motion and their transformation // J. Theor. and Appl. Mech. 1986. № 5. P. 747–754.
8. *Козлов В.В, Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
9. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit // J. Reine und Angew. Math. 1870. Bd. 71. S. 237–262.
10. *Рубановский В.Н.* Новые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1968. № 2. С. 99–106.
11. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. № 1. С. 8–23.
12. *Hess W.* Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. Bd. 37. H. 2. S.153–181.
13. *Ковалев А.М.* О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1969. Вып. 1. С. 12–27.
14. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1963. № 3. С. 60–71.
15. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.

Донецк
e-mail: resource@donduet.edu.ua

Поступила в редакцию
3.II.2004