

УДК 531.36

© 2005 г. В. А. Самсонов

ДИНАМИКА ТОРМОЗНОЙ КОЛОДКИ И “УДАР ТРЕНИЕМ”

Обсуждается взаимодействие колеса с тормозной колодкой. Отмечается существование критического набора параметров, при котором сила трения может принять произвольное значение. В закритической области параметров в системе происходит явление “удара трением”. Описаны варианты послеударного поведения тел; один из них – остановка колеса и отскок колодки – отвечает сценарию развития процесса, описанному Е.А. Болотовым. Показана также возможность вращения колеса в обратном направлении.

Принято считать, что начальные условия движения (в момент времени t_0) системы связанных твердых тел “не возникают” сами по себе, а создаются внешними обстоятельствами, которые прекращают свое действие в момент времени $t_0 - 0$ (непосредственно предшествующий начальному). Эти обстоятельства задают не только начальные расположение и распределение скоростей элементов системы, но также и некоторые значения R_- реакций связей, которые определяют систему при $t \geq t_0$. При функционировании многих объектов техники оказывается, что величины R_- не совпадают со значениями реакций, необходимыми для сохранения определяющих связей. В классических задачах (особенно, при идеальных двусторонних связях) этим различием обычно пренебрегали, молчаливо предполагая, что реакции в момент t_0 изменятся скачком и сразу же примут необходимые значения.

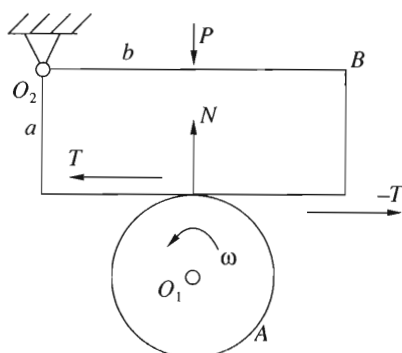
Однако в 1895 г. Пэнлеве [1] обнаружил, что для систем с сухим трением задача определения реакций может либо не иметь решения, либо иметь несколько решений. В обоих случаях вопрос о характере движения системы нуждается в дополнительном изучении. В течение двух первых десятилетий 20-го века этот круг вопросов обсуждался во французской и немецкой научной печати известными механиками. Участникам дискуссии осталась, по-видимому, не известна работа русского механика, приват-доцента Московского университета Е.А. Болотова [2], в которой обосновано, что в первом из указанных выше случаев система испытывает “удар трением”¹.

Для конкретного изложения существа дела далее рассматривается задача о взаимодействии вращающегося колеса с тормозной колодкой [3].

1. Контакт без внешних сил. Пусть колесо радиуса R (тело A , фиг. 1) вращается вокруг неподвижной оси O_1 с некоторой угловой скоростью ω_0 . К колесу прислонена (односторонняя связь) прямоугольная тормозная колодка B , которая тоже может вращаться вокруг неподвижной оси O_2 . Если колодка не контактирует с колесом, то она может поворачиваться в любую сторону, а в случае контакта – только в направлении от колеса.

Пусть сначала отсутствуют какие-либо внешние силы. Опыт подсказывает, что взаимодействие колодки с колесом должно привести к торможению колеса, т.е. к уменьшению угловой скорости ω его вращения. Посмотрим теперь, что дает механико-математическая модель, если считать тела A и B абсолютно твердыми.

¹ Работа Е.А. Болотова была высоко оценена Н.Е. Жуковским, который не только дал о ней похвальный отзыв, но и отметил ее в своей знаменитой юбилейной речи “Механика в Московском университете за последнее пятидесятилетие”. Издатели русского перевода книги Пэнлеве [1] дополнили ее материалами о зарубежных дискуссиях, но, к сожалению, не упомянули о более глубоких (по мнению Жуковского) результатах Болотова. Видимо, это повлияло на то, что достижения Е.А. Болотова не известны не только широкой научной общественности, но и некоторым сегодняшним авторам.



Фиг. 1

Тело B при сохранении контакта с колесом находится в равновесии под действием двух сил: силы N нормального давления со стороны колеса и силы T сухого трения скольжения. Поэтому

$$aT - bN = 0 \tag{1.1}$$

где a и b – плечи линий действия сил относительно оси O_2 .

Для вращения тела A имеем

$$I_w \dot{\omega} = -RT \tag{1.2}$$

Здесь I_w – момент инерции колеса относительно оси O_1 .

Для замыкания системы уравнений (1.1), (1.2) необходимо привлечь дополнительную информацию о соотношении между N и T . Поскольку колесо скользит по колодке, используем эмпирический закон сухого трения скольжения (закон Кулона)

$$T = fN \tag{1.3}$$

где f – постоянный коэффициент трения. Кроме того, условие сохранения односторонней связи имеет вид

$$N \geq 0 \tag{1.4}$$

Подставив выражение (1.3) в равенство (1.1), получаем уравнение

$$(fa - b)N = 0 \tag{1.5}$$

Отсюда выводим, что при особом (критическом) наборе, когда

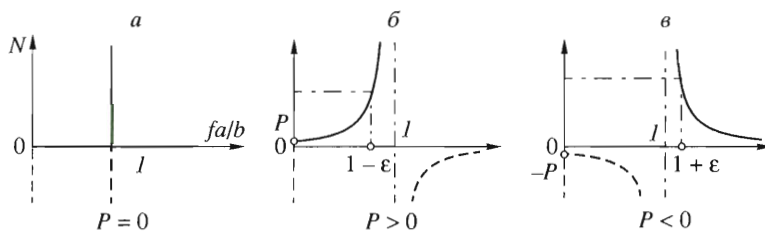
$$fa = b$$

решением уравнения (1.4) служит произвольное значение N . Следовательно, и сила T произвольна, т.е. выяснить закон торможения колеса по уравнению (1.2) невозможно!

Так проявляет себя *первая трудность*, которой не уделяется достаточно внимания.

При $fa \neq b$ имеем $N = 0$, $T = 0$. Колесо вращается с постоянной скоростью ω_0 , колодка расположена вблизи от него, с бесконечно малым зазором. Такое состояние движения, кажется, не противоречит здравому смыслу.

Более того, тезис “Если два тела в данных условиях не оказывают друг на друга давления, будучи абсолютно гладкими, то они не разовьют давлений и тогда, когда поверхности их шероховаты” – использовался Пэнлеве и другими авторами.



Фиг. 2

Зависимость N от параметра fa/b в силу уравнения (1.5) изображена на фиг. 2, а. Показанное здесь “пересечение двух прямых” не входит в число так называемых “грубых” геометрических образов и неминуемо разрушится при внесении в систему уравнений (1.1)–(1.3) какого-нибудь “возмущения”.

2. Малая внешняя сила. “Возмутим” систему дополнительной внешней силой P (фиг. 1), для простоты по той же линии действия, что и N . Тогда левая часть уравнения равновесия тела B (1.1) дополняется слагаемым bP , что при учете закона трения (1.3) дает

$$N = \frac{b}{b - fa} P \quad (2.1)$$

Поскольку при $P = 0$ имелось почти всюду опорное решение $N = 0$, кажется естественным ожидать, что при достаточно малом P будем иметь малое N .

Проверим теперь это предположение формулой (2.1). Во-первых, при $P > 0$, когда дополнительная сила прижимает колодку к колесу, решение уравнения (2.1) оказывается совместным с условием (1.4) лишь при $fa < b$ (фиг. 2, б), а при $fa > b$ уравнение равновесия колодки не имеет решения, совместного с условием (1.4). Так проявляет себя *вторая трудность*.

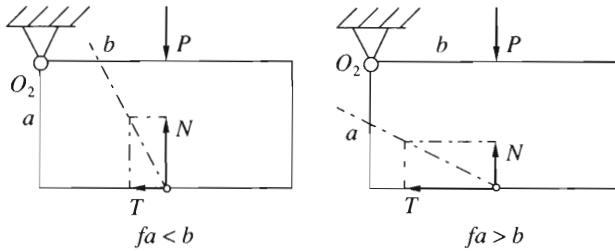
Во-вторых, при $P < 0$, когда дополнительная сила отрывает колодку от колеса, уравнение (2.1) имеет решение, совместное с условием (1.4), лишь в закритической области параметров, т.е. при $fa > b$ (фиг. 2, в). Так проявляет себя *третья трудность*, которую нередко именуют “парадоксом”: ведь трение не дает оторвать колодку от колеса, хотя возможность такого отрыва представляется “очевидной”.

В-третьих, в случае критического набора параметров, когда $fa = b$, уравнение равновесия вообще не имеет решения! (Это уже четвертая трудность).

На фоне перечисленных трудностей отметим еще и очевидное невыполнение сделанного предположения о малости N . При любом (малом) P найдется такая ε -окрестность критических значений параметров, что $N \gg P$. В этом смысле можно считать, что четвертое затруднение разрешается следующим образом: из неопределенного при $P = 0$ набора значений для N механическая система выбирает лишь одно: $N = +\infty$.

Со времен Пэнлеве перечисленные трудности принято считать “математическими” в смысле недостаточной корректности математической модели. Однако сопоставление фиг. 2, а и б, в позволяет предположить, что при превышении коэффициентом трения критического значения механическая система меняется качественно.

3. О скачке реакций. Упомянутая выше дискуссия перевела проблему в область натурфилософии. В случае обсуждаемого примера эта проблема может быть сформулирована следующим образом. Пока между телами существует зазор, колесо вращается с постоянной скоростью ω_0 . Внешним воздействием медленно подводим колодку к колесу и в момент контакта снимаем это внешнее воздействие (пусть даже и останется сила P). Очевидно, что в момент контакта сила N давления колодки на колесо, если и не исчезает полностью, то контролируемо (в мыслимом эксперименте) мала. Но в си-



Фиг. 3

лу самих свойств абсолютно твердого тела сразу же после снятия внешнего воздействия (мгновенно) сила N обязана принять значение, которое ей предписано уравнением (2.1) (даже в случае, когда $|fa - b| < b\epsilon$, а значение N весьма велико).

Естественно, что любое отличие реального тела от абсолютно твердого превращает изменение величины силы давления (а заодно и силы трения) в некоторый процесс, весьма кратковременный, но полностью пренебрегать им иногда нельзя. Более того, в реальном эксперименте очевидна необходимость учета таких погрешностей, как малая, но все же отличная от нуля скорость сближения тел.

Решение проблемы на натурфилософском уровне было предложено почти 100 лет назад Е.А. Болотовым [2], но было незаслуженно предано забвению.

Попытаемся интерпретировать рассуждение Болотова применительно к поведению тормозной колодки. Для этого восстановим геометрическую картину равновесия колодки (фиг. 3).

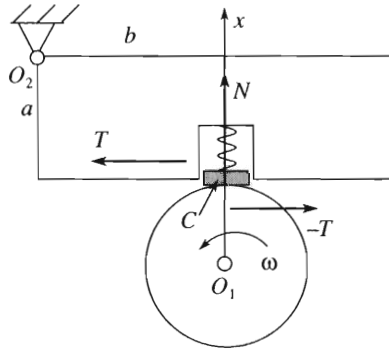
В случае $fa < b$ суммарная сила воздействия колеса на колодку может уравновесить внешнюю силу P . В случае $fa > b$ момент суммарной силы воздействия колеса на колодку при $N > 0$ стремится повернуть ее в ту же сторону, что и момент силы P . Равновесие колодки, очевидно, невозможно, но поворачиваться ей мешает колесо.

Вернемся к случаю $fa < b$. Пусть от эксперимента к эксперименту коэффициент трения возрастает. Пока $fa < b$, увеличение коэффициента трения приводит в соответствии с равенством (1.2) к сокращению времени торможения колеса. Более того, при $fa \rightarrow b - 0$ время торможения стремится к нулю.

Дальнейшее увеличение коэффициента трения (случай $fa > b$) должно было бы еще сократить время торможения, но это уже невозможно, поэтому попытка прижать колодку к колесу при $fa > b$ должна привести к мгновенному прекращению скольжения. Итак, колесо и колодка испытывают “удар трением”!

Однако соударение тел далеко не всегда завершается прекращением относительно движения столкнувшихся тел. Вполне возможно и послеударное движение тел. В рамках представлений того времени о двух фазах в процессе соударения упругих тел Болотов сделал вывод, который для рассматриваемой задачи означает, что колодка после остановки колеса “отскочит” от него; при этом скорость отскока должна определяться так называемым коэффициентом восстановления.

4. Учет “нормальной” податливости тел. Обсуждать вопросы соударения тел без учета их деформируемости бесполезно, так как при соударениях нормальные и тангенциальные силы (напряжения) достигают таких значений, что любые (реальные) тела испытывают кратковременные изменения форм. Известно, что в зоне интенсивного трения скольжения все материалы греются, для многих из них происходит микроразрушение поверхности, приводящее к изменению формы трущихся объектов; для учета этих обстоятельств необходимо внесение изменений в сам закон Кулона (1.3). Конечно, в принципе здесь возможна постановка соответствующих контактных задач



Фиг. 4

механики деформируемого тела, но для оценок могут подойти и упрощенные модели учета вязкоупругих свойств соударяющихся тел.

Одна из таких моделей в рамках обсуждаемой проблемы использовалась еще в начале 20-го века, но к задаче о тормозной колодке впервые была применена Ю.И. Неймарком и Н.В. Фуфаевым [4]. Идея состоит во включении между колесом и колодкой некоего вязкоупругого элемента, который моделировал бы те или иные свойства податливости, деформируемости тел в окрестности точки контакта.

Последуем этой идее, учитывая, что при изучении ударных взаимодействий можно пренебречь конечными силами, т.е. положим $P = 0$.

Смоделируем так называемую нормальную податливость колодки (фиг. 4). С этой целью поместим между колодкой и колесом вязкоупругую пружину с достаточно большими по величине коэффициентами жесткости k и вязкости h . Один конец пружины прикрепим к колодке, а к другому присоединим малое тело – площадку C массы m , совершающее относительно колодки движение по нормали к колесу и имитирующее инерционные свойства деформированной части колодки. Конечно, в процессе взаимодействия колодка B немного повернется, но будем для простоты считать, что ориентация площадки C сохраняется.

На тело C , остановившееся после вступления в контакт с колесом, действуют следующие силы: со стороны колеса давление N и трение T (поскольку $\omega \neq 0$, то выполнено условие (1.3)); со стороны пружины сила $F = -kx - h\dot{x}$, где x – величина сжатия пружины, пропорциональная углу поворота колодки. Отсюда имеем

$$N = kx + h\dot{x}, \quad T = f(kx + h\dot{x}) \quad (4.1)$$

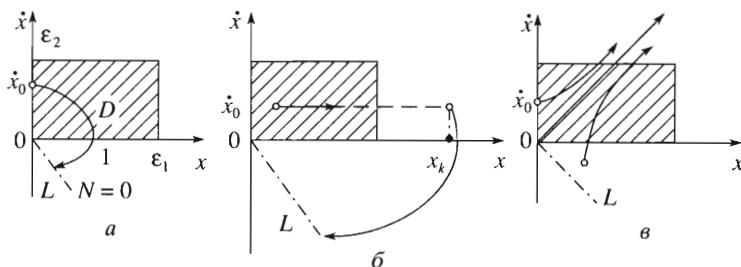
и для вращения колодки получим

$$I \frac{\ddot{x}}{b} = -Nb + Ta = (fa - b)(kx + h\dot{x}) \quad (4.2)$$

где I – момент инерции колодки относительно оси O_2 .

Рассмотрим варианты поведения решений уравнения (4.2).

Случай А. При $fa < b$ (малом трении) это уравнение соответствует традиционному объекту теории колебаний – осциллятору, движение которого должно экспоненциально затухать. Изобразим фазовую траекторию на плоскости x, \dot{x} (фиг. 5). Вышеупомянутые внешние обстоятельства обеспечили следующие начальные условия: $0 < x_0 < \epsilon_1, 0 < \dot{x}_0 < \epsilon_2$, где ϵ_1 и ϵ_2 относительно малы. Область D возможных начальных условий отмечена на фиг. 5 штриховкой. Изображающая точка, двигаясь вдоль фазо-



Фиг. 5

вой траектории 1, достигнет прямой L , на которой выполняется условие $kx + h\dot{x} = 0$ или $N = 0$. В этот момент колодка приобретет малую угловую скорость \dot{x}/b вращения от колеса и контакт тела C с колесом нарушится.

Такой исход вполне соответствует левой части фиг. 3 при $P = 0$. Видно, что если силы N и T отличны от нуля, то они оттолкнут колодку от колеса.

Угловая скорость колеса за это короткое время контакта изменится незначительно.

Случай Б. При критическом наборе параметров ($fa = b$) уравнение (5.2) вырождается в

$$I\ddot{x} = 0 \tag{4.3}$$

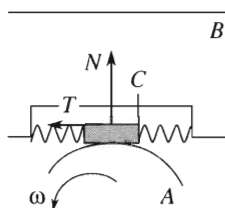
В этом случае каждая точка оси x на фазовой плоскости x, \dot{x} (фиг. 5, б) соответствует состоянию покоя, т.е. действительно величина N может принять произвольное постоянное значение в зависимости от начальной деформации пружины. Это вполне коррелирует с характером графика фиг. 2, а.

Однако если $\dot{x}_0 > 0$ (хоть и мало), то $x = \dot{x}_0 t$, т.е. величина деформации пружины возрастает со временем. Вместе с этим растет и величина силы трения (см. (4.1)), что приводит к торможению вращения колеса и к его остановке. Пусть в момент остановки координата x достигла значения x_k (фиг. 5, б). Поскольку колесо больше не вращается, то $T = 0$, а движение колодки описывается уравнением осциллятора

$$I\frac{\ddot{x}}{b} = -b(kx + h\dot{x}) \tag{4.4}$$

Фазовая траектория разгрузки осциллятора (4.4) изображена на фиг. 5, б. Ясно, что скорость, с которой колодка отскочит от колеса, будет заметно выше, чем в случае А, так как на деформацию пружины была затрачена значительная часть энергии вращения колеса.

Случай В. Пусть $fa > b$. Уравнение (4.2) теперь можно назвать “антиосциллятором”, так как и позиционная часть силы стала отталкивающей и скоростная – антидиссипативной. Фазовые траектории для этого случая изображены на фиг. 5, в. Вдоль выходящего из начала координат уса сепаратрисы экспоненциально растут x и \dot{x} . Это приводит к еще более быстрому, чем в случае Б, росту силы T трения и к более быстрой остановке колеса. После остановки колеса движение колодки описывается уравнением (4.4) и фазовая траектория этого движения похожа на показанную на фиг. 5, б с тем лишь отличием, что начинается она не только при относительно большом значении x_k , но и при достаточно большом значении \dot{x}_k , поэтому следует ожидать значительного увеличения скорости послеударного отскока колодки.



Фиг. 6

Сравним теперь выводы, сделанные при анализе случаев Б, В, с упомянутым выше (разд. 1), казалось бы, естественным тезисом Пэнлеве. Видно, что при $fa \geq b$ неподвижная точка $x = 0$, $\dot{x} = 0$ существует, т.е. движение, при котором тела не развивают давления друг на друга, теоретически возможно, но оно неустойчиво и при этих условиях наиболее вероятно “удар трением”.

Замечания. 1°. Отметим, что уравнение (1.5) в случае $fa > b$ имеет *единственное* решение, т.е. “удар трением” возможен и тогда, когда уравнения движения системы твердых тел “не обещают никаких парадоксов”. Это следует иметь в виду в случае систем с двусторонними связями, так как каждая из сторон может оказаться предварительно напряженной, поэтому “удар трением” может реализовать не та сторона двусторонней связи, которая кажется нагруженной внешними силами, а противоположная.

2°. Течение удара и его завершение подобны описанным Болотовым для более сложной задачи.

5. Учет “касательной” податливости. Конечно, нормальная податливость в присутствии касательной нагрузки не может соответствовать механическим свойствам всех материалов, из которых могут быть изготовлены колодки. Скорее всего это одно из крайних свойств материалов. На другом краю, очевидно, находится свойство касательной податливости, для моделирования которой также позаимствуем предложенную ранее схему [4], слегка ее скорректировав.

Пусть теперь (фиг. 6) тело C малой массы m может перемещаться лишь вдоль касательной к колесу. Между колодкой и телом C поместим вязкоупругую пружину с коэффициентами k , h жесткости и вязкости.

Уравнение движения тела C , положение которого относительно колодки определим координатой x , имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + T \quad (5.1)$$

Уравнение равновесия колодки

$$a(kx + h\dot{x}) = bN \quad (5.2)$$

До тех пор, пока $\dot{x} < \omega R$, имеем $T = fN$, и уравнение (5.1) приобретает вид

$$m\ddot{x} = \left(f\frac{a}{b} - 1\right)(kx + h\dot{x}) \quad (5.3)$$

Это уравнение аналогично уже обсужденному уравнению (4.2). Не повторяя деталей, сконцентрируем внимание лишь на случае $fa > b$. Непосредственно после введения колодки в контакт с колесом неизбежно будут созданы такие начальные условия, при которых фазовая траектория (фиг. 5, в) уравнения (5.3) окажется близкой к выходящему из начала координат усю сепаратрисы. Поскольку $m \ll I/b^2$, скорость тела C за короткий промежуток времени сравняется с окружной скоростью точек колеса, т.е. скольжение прекратится, и

$$\dot{x} = \omega_* R \quad (5.4)$$

Вследствие малости массы m тела C величина ω_* мало отличается от ω_0 , поэтому на следующей фазе движения происходит интенсивное сжатие пружины в соответствии с уравнением вращения колеса, которое при отсутствии скольжения, т.е. при $\dot{x} = \omega R$, принимает вид

$$(I + mR^2) \frac{\ddot{x}}{R} = -R(kx + h\dot{x}) \quad (5.5)$$

аналогичный уравнению (4.4). Начальные условия сжатия для осциллятора (5.3) соответствуют практически полной начальной энергии вращения колеса (хотя величина x_k может оказаться достаточно малой). Учтя это, заключаем, что фазовая траектория уравнения (5.5) ведет себя так же, как и на фиг. 5, б. Легко проверить, что на этом участке выполняется условие $T < fN$, гарантирующее отсутствие проскальзывания. Естественно, что при достижении изображающей точкой прямой L нарушается контакт колеса с колодкой.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Во-первых, поскольку в момент отрыва $\dot{x} < 0$, колесо вращается уже в обратную сторону! Величина скорости обратного вращения сопоставима с ω_0 . Такой результат служит дополнением к упомянутому выводу Болотова. Во-вторых, система колодка плюс тело C приобрела некоторый (хотя и малый) кинетический момент $am\dot{x} < 0$ относительно оси O_2 . Таким образом, эта система начнет медленно поворачиваться вокруг оси O_2 в направлении от колеса. Поворот этот неравномерный, пока тело C совершает колебания относительно колодки.

6. Промежуточный итог. Можно считать, что изложенное в разд. 4–6 позволяет объяснить фиг. 2.

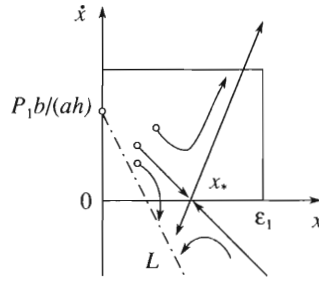
Действительно, участок прямой $N = 0$, на котором $fa < b$, в целом наследует то же свойство, которым система обладала при малом значении f : за краткое время контакта с колесом колодка приобретет небольшую угловую скорость, но вращение колеса в начальном направлении сохранится.

При критическом значении коэффициента трения $f = b/a$ (и при больших) происходит скачкообразное, “катастрофическое” изменение указанного свойства. Контакт колодки с колесом приводит на первой фазе контакта (отмеченной Болотовым) к интенсивному уменьшению скорости скольжения. На второй фазе происходит согласованное увеличение деформации контактирующих тел как по нормали к их поверхностям, так и в тангенциальном направлении. Наконец, на третьей фазе разгрузки деформированных тел последние в зависимости от свойств контактирующих тел приобретают такие послеударные скорости, что контакт колодки с колесом нарушается.

Выше рассмотрены два предельных случая податливости тел. Совместный учет нормальной и тангенциальной податливости приведет, естественно, к большему разнообразию вариантов послеударного поведения тел.

7. Об отрыве колодки. Может показаться, что объяснение процесса удара трением носит исчерпывающий характер, тем более что попытка прижать колодку к колесу силой P приводит к появлению в правых частях уравнений (4.2), (4.4), (5.2), (5.3) положительных слагаемых, которые эквивалентны смещению начальных и конечных точек вдоль изображенной на фиг. 5, в фазовой траектории.

Однако существует еще и третья особенность формулы (2.1) и фиг. 2, в, связанная с отрицательным значением силы P , точнее, с изменением направления малой внешней силы, приложенной к колодке: в этом случае формула (2.1) дает в области $fa > b$ для N некоторое конечное значение. Следовательно, и сила T принимает конечное значение, и торможение колеса происходит с ограниченным (а при малом $P_1 = -P > 0$, даже малым) ускорением, почти так же, как было в области $fa < b$. И снова мы сталкиваемся с “катастрофическим” изменением некоторого свойства. При $P < 0$ и $fa < b$ из фор-



Фиг. 7

мулы (2.2) следует $N < 0$, т.е. равновесие колодки невозможно – внешняя сила оторвет ее от колеса!

Рассмотрим здесь лишь случай тангенциальной податливости. Поскольку уравнение равновесия колодки принимает вид

$$a(kx + h\dot{x}) = b(N + P_1) \quad (7.1)$$

изменится и уравнение (5.2) движения тела C

$$m\ddot{x} = \left(\frac{fa}{b} - 1\right)(kx + h\dot{x}) - fP_1 \quad (7.2)$$

Выделим на фазовой плоскости x, \dot{x} (фиг. 7) представляющую интерес область

$$x > 0, \quad N > 0 \Rightarrow kx + h\dot{x} > (b/a)P_1$$

возможных движений. Видно, что начало координат (точка $x = 0, \dot{x} = 0$) не попадает в эту область. В самом деле, если в начальный момент после контакта пружина не напряжена, то сила P_1 повернет колодку от колеса без всякого сопротивления.

Если при обеспечении контакта прижать колодку так, что начнется деформация пружины, то можно попасть в область $N > 0$, где происходит движение изображающей точки вдоль одной из фазовых траекторий (фиг. 7). Точка

$$x_* = \frac{fbP_1}{(fa-b)k}, \quad \dot{x} = 0 \quad (7.3)$$

– неподвижная точка уравнения (8.1) (состояние покоя) – седловая, т.е. по двум входящим усам сепаратрисы изображающая точка асимптотически приближается к этой неподвижной точке (на фиг. 7 указано стрелками направление движения изображающей точки). Параллельно этому процессу происходит торможение колеса (относительно медленное по сравнению с описанным в предыдущих разделах). Для всех траекторий, расположенных ниже входящих усов, изображающая точка попадает на прямую $N = 0$, после чего колодка отделяется от колеса, которое к этому моменту вряд ли сможет потерять всю скорость своего вращения.

Заметим, что движения в малой окрестности точки $(x_*, 0)$ сопровождаются малыми же силами N, T . Внесение в систему каких-то дополнительных сил может привести к изменению характера неподвижной точки, например превратить ее в устойчивый узел и т.п.

Принципиально новым (по сравнению с изложенным в разд. 2) оказывается возможность движений в окрестности выходящего из неподвижной точки уса сепаратри-

сы. При этих движениях \dot{x} и разность $x - x_*$ экспоненциально растут. Естественно, что эти свойства сохраняются лишь до тех пор, пока $\dot{x} < \omega R$, т.е. до момента прекращения скольжения.

Сценарий дальнейших событий отличается от изложенного в разд. 6 лишь тем, что при обратном вращении колеса процесс повторного возникновения скольжения начнется несколько раньше отрыва колодки. Возможно, это приведет к некоторому уменьшению финальной скорости обратного вращения колеса по сравнению с разд. 6.

8. Заключение. Изложенное позволяет подвести итог так называемому “разрешению” парадоксов сухого трения применительно к конкретной механической системе – тормозная колодка плюс вращающееся колесо. Введение вязкоупругого элемента позволило установить, что при $fa > b$ в системе возникает явление – “удар трением”, который требует самостоятельного изучения и моделирования.

Интенсивность удара трением (разность скоростей до удара) гораздо выше интенсивности столкновения тел, неизбежного при введении их в контакт. Лишь в случае неединственности решения уравнений динамики абсолютно твердых тел существует некоторая вероятность почти безударного нарушения контакта при специальной организации начальных нагрузок контакта.

Принципиальное отличие удара трением от классической схемы соударения тел состоит в наличии трех (а не двух) фаз – скольжение, совместная деформация (нагруженные связи), восстановление (разгрузка).

Тем не менее автор не претендует на окончательное разрешение всех обнаруженных Пэнлеве трудностей.

Работа поддержана программой “Университеты России”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Painlevé P.* Leçon sur le frottement. Paris: Hermann, 1895, 111 p. = *Пэнлёве П.* Лекции о трении, М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Болотов Е.А.* О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением // Мат. сб. 1906. Т. 25. Вып. 4. С. 562–708.
3. *Самсонов В.А.* Очерки о механике. М.: Наука, 1980. 64 с.
4. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Парадоксы Пэнлеве и динамика тормозной колодки // ПММ. 1995. Т. 59, Вып. 3. С. 366–375.

Москва
e-mail: samson@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
13.XI.2003