УДК 531.36:534.1

© 2005 г. К. Каттани, А. П. Сейранян

ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ МОМЕНТОМ ИНЕРЦИИ

Рассматривается задача отыскания областей неустойчивости системы с периодически изменяющимся моментом инерции. Выведено уравнение, описывающее малые крутильные колебания системы с периодическими коэффициентами, зависящими от четырех постоянных параметров, включая демпфирование. Изложен метод исследования устойчивости, основанный на анализе поведения мультипликаторов Флоке. Получены аналитические выражения для областей неустойчивости (параметрического резонанса) в пространстве параметров. Приведены численные примеры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим малые крутильные колебания вертикального упругого стержня с жестко укрепленным на нем горизонтальным диском с бортом (фиг. 1). С диском связаны концы жесткой спицы, вдоль которой могут скользить две симметрично расположенные сосредоточенные массы m. Предположим, что эти массы совершают колебания вдоль радиуса диска симметрично относительно оси согласно периодическому закону

$$r = r_0 + a\varphi(\Omega t), \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\tau)d\tau = 0 \tag{1.1}$$

где r_0 – среднее расстояние от массы до упругой оси диска, a и Ω – амплитуда и частота возбуждения, соответственно, $\varphi(\tau)$ – гладкая периодическая функция периода 2π с нулевым средним значением. Тогда момент инерции системы (диск с двумя массами) составляет

$$J(t) = J_0 + 2m[r_0 + a\varphi(\Omega t)]^2 \tag{1.2}$$

где J_0 – момент инерции диска. Уравнение малых крутильных колебаний системы имеет вид

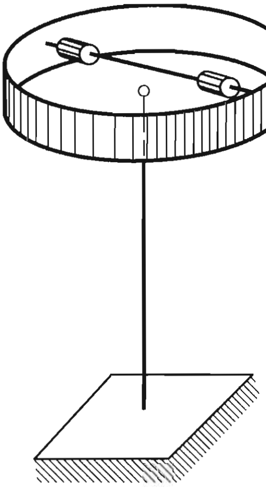
$$(J(t)\dot{\theta})^{\cdot} + \gamma\dot{\theta} + c\theta = 0 \tag{1.3}$$

где θ – угол закручивания, c – коэффициент жесткости стержня, точкой обозначена производная по времени t. Амплитуда a и коэффициент демпфирования γ предполагаются малыми.

Задача состоит в нахождении значений параметров, при которых тривиальное положение равновесия $\theta = 0$ становится неустойчивым. Эта задача без демпфирования и с гармоническим законом возбуждения была сформулирована ранее [1].

Введем безразмерные величины и параметры

$$\begin{gathered} \tau = \Omega t, \quad \varepsilon = \frac{a}{r_0}, \quad \varsigma = \frac{2mr_0^2}{\tilde{J}_0}, \quad \tilde{J}_0 = J_0 + 2mr_0^2 \\ \beta = \frac{\gamma}{\sqrt{\tilde{J}_0 c}}, \quad \omega = \frac{1}{\Omega}\sqrt{\frac{c}{\tilde{J}_0}}, \quad x_1 = \theta, \quad x_2 = \frac{\tilde{J}(t)\dot{\theta}}{\Omega}, \quad \tilde{J}(t) = \frac{J(t)}{\tilde{J}_0} \end{gathered} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Тогда уравнение (1.3) может быть записано в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{\tilde{J}(\tau)}x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -\omega^2 x_1 - \frac{\beta\omega}{\tilde{J}(\tau)}x_2 \tag{1.5}$$

с соотношением

$$\tilde{J}(\tau) = 1 + 2\varepsilon\varsigma\varphi(\tau) + \varepsilon^2\varsigma\varphi^2(\tau) \tag{1.6}$$

В новых переменных предположение о гладкости периодической функции $\varphi(\tau)$ можно ослабить, считая ее лишь кусочно-непрерывной.

Правые части уравнений (1.5) – линейные функции вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, периодические по τ с периодом 2π. Уравнения (1.5), (1.6) явно зависят от четырех независимых параметров ς, ω, ε, β, причем из них два последних малые:

$$0 < \omega, \quad 0 < \varsigma < 1, \quad 0 \le \varepsilon \ll 1, \quad 0 \le \beta \ll 1 \tag{1.7}$$

Задача состоит в нахождении областей неустойчивости (параметрического резонанса) тривиального решения $\mathbf{x} = 0$ в трехмерном пространстве $\mathbf{p} = (\omega, \varepsilon, \beta)$ при фиксированном параметре ς.

2. Производные матрицы монодромии по параметрам. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{G}(t, \mathbf{p})$ – квадратная матрица размерности $N \times N$, гладко зависящая от вектора действительных параметров $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots p_n)$ и непрерывная периодическая функция времени с периодом T.

Фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$ системы (2.1) находится из матричного дифференциального уравнения с начальным условием

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица и называется матрицантом. Матрица монодромии (Флоке) определяется равенством $\mathbf{F} = \mathbf{X}(T)$ [2, 3].

Для исследования устойчивости линейной системы (2.1) воспользуемся теорией Флоке, согласно которой линейная система с периодическими коэффициентами устойчива, если все собственные значения ρ (мультипликаторы) матрицы монодромии $\mathbf{F}$ по модулю меньше единицы, и неустойчива, если хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы.

Пусть при некотором n-мерном векторе параметров $\mathbf{p}_0$ известна матрица монодромии $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0)$. Придадим вектору параметров приращение в виде $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}$. Вследствие этого матрица $\mathbf{G}$, а следовательно, и $\mathbf{X}(t)$ получат приращения, что приведет к изменению матрицы монодромии $\mathbf{F}$. Были найдены выражения для первых и вторых производных матрицы монодромии по параметрам в виде интегралов по периоду [4, 5]

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial p_k} &= \mathbf{F}_0\int_0^T\mathbf{H}_k(\tau)d\tau \\ \frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial p_i\partial p_j} &= \mathbf{F}_0\left[\int_0^T\mathbf{H}_{ij}(\tau)d\tau + \int_0^T\mathbf{H}_i(\tau)\left(\int_0^\tau\mathbf{H}_j(\zeta)d\zeta\right)d\tau + \int_0^T\mathbf{H}_j(\tau)\left(\int_0^\tau\mathbf{H}_i(\zeta)d\zeta\right)d\tau\right]\end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\mathbf{H}_k(\tau) = \mathbf{X}_0^{-1}(\tau)\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial p_k}(\mathbf{p}_0, \tau)\mathbf{X}_0(\tau), \quad \mathbf{H}_{ij}(\tau) = \mathbf{X}_0^{-1}(\tau)\frac{\partial^2\mathbf{G}}{\partial p_i\partial p_j}(\mathbf{p}_0, \tau)\mathbf{X}_0(\tau); \quad i, j, k = 1, \ldots, n$$

Нулевой индекс означает, что соответствующая величина берется при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$.

Отметим, что для нахождения производных (2.3) необходимо лишь знание матрицанта $\mathbf{X}_0(t)$ и производных матрицы $\mathbf{G}$ по параметрам, вычисленных при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. С помощью производных (2.3) приращение матрицы монодромии запишется в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial p_k}\Delta p_k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial p_i\partial p_j}\Delta p_i\Delta p_j + \ldots \tag{2.4}$$

Знание производных матрицы монодромии позволяет найти значения этой матрицы в окрестности точки $\mathbf{p}_0$ и, следовательно, оценить поведение мультипликаторов (собственных значений матрицы монодромии $\mathbf{F}$), ответственных за устойчивость системы (2.1) при изменении параметров.

3. Области неустойчивости. Запишем систему (1.5) в виде (2.1) с матрицей

$$\mathbf{G} = \left\|\begin{matrix} 0 & [1 + 2\varepsilon\varsigma\varphi(\tau) + \varepsilon^2\varsigma\varphi^2(\tau)]^{-1} \\ -\omega^2 & -\beta\omega[1 + 2\varepsilon\varsigma\varphi(\tau) + \varepsilon^2\varsigma\varphi^2(\tau)]^{-1}\end{matrix}\right\| \tag{3.1}$$

явно зависящей от четырех параметров и периодической функции $\varphi(\tau)$. Рассмотрим поведение мультипликаторов в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (\omega, 0, 0)$ при произвольном значении параметра $\varsigma \in (0, 1)$.

Подставив значения $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$ в соотношения (2.1), (3.1), из уравнений (2.2) найдем матрицант и обратную к нему матрицу

$$\mathbf{X}_0(t) = \left\|\begin{matrix}\cos\omega t & \omega^{-1}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{matrix}\right\|, \quad \mathbf{X}_0^{-1}(t) = \left\|\begin{matrix}\cos\omega t & -\omega^{-1}\sin\omega t \\ \omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{matrix}\right\| \tag{3.2}$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$ матрица монодромии имеет вид

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{X}_0(2\pi) \tag{3.3}$$

Собственные значения этой матрицы (мультипликаторы) таковы:

$$\rho_{1,2} = \cos 2\pi\omega \pm i \sin 2\pi\omega \tag{3.4}$$

При всех значениях $\omega \neq k/2$ ($k = 1, 2, \ldots$) мультипликаторы – комплексно-сопряженные величины, они лежат на единичной окружности (устойчивость). При малом изменении параметров ω, ε, β в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (\omega, 0, 0)$, $\omega \neq k/2$ ($k = 1, 2, \ldots$) в силу непрерывности мультипликаторы остаются комплексно-сопряженными величинами. При этом для мультипликаторов имеем квадратное уравнение вида

$$\rho^2 + A\rho + B = 0 \tag{3.5}$$

Свободный член согласно формуле Лиувилля [2] с использованием равенства (3.1) описывается выражением

$$B = \exp\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{tr}\mathbf{G}\,dt\right) = \exp(-2\pi\beta\omega(1 + o(\varepsilon^2))) \tag{3.6}$$

Поскольку по теореме Виета из соотношений (3.5), (3.6) при $\beta > 0$ и достаточно малых ε имеем

$$\rho_1\rho_2 = B < 1 \tag{3.7}$$

то для комплексно-сопряженных мультипликаторов из неравенства (3.7) следует $|\rho_{1,2}| < 1$. Таким образом, малое изменение параметров ω, β, ε, причем $\beta > 0$, в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (\omega, 0, 0)$, $\omega \neq k/2$ сдвигает мультипликаторы внутрь единичного круга, что означает асимптотическую устойчивость.

Следовательно, неустойчивость (параметрический резонанс) может возникать лишь в окрестности точек

$$\mathbf{p}_0 : \varepsilon = 0, \quad \beta = 0, \quad \omega = k/2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

в которых мультипликаторы двукратные.

Для нахождения областей параметрического резонанса (ОР) разложим матрицу монодромии $\mathbf{F}$ в окрестности точек $\mathbf{p}_0$ в ряд Тейлора по параметрам ε, β и $\Delta\omega = \omega - k/2$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\varepsilon}\varepsilon + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\omega}\Delta\omega + \ldots \tag{3.9}$$

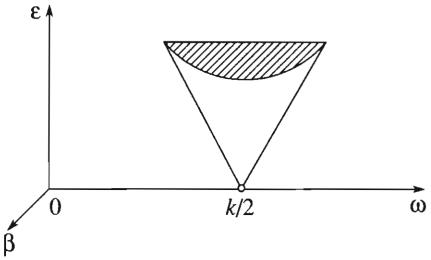
По формулам (2.3) с использованием соотношений (2.1), (3.1)–(3.3) вычислим значения производных $\partial\mathbf{F}/\partial\varepsilon$, $\partial\mathbf{F}/\partial\beta$ и $\partial\mathbf{F}/\partial\omega$ при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. В результате из разложения (3.9) с точностью до членов первого порядка малости имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \cos\pi k \left\| \begin{matrix} 1 + (\pi b_k k\varepsilon\varsigma - \pi\beta k)/2 & 4k^{-1}\pi\Delta\omega - \pi a_k\varepsilon\varsigma \\ -k\pi\Delta\omega - \pi a_k k^2\varepsilon\varsigma/4 & 1 - (\pi b_k k\varepsilon\varsigma + \pi\beta k)/2 \end{matrix} \right\| \tag{3.10}$$

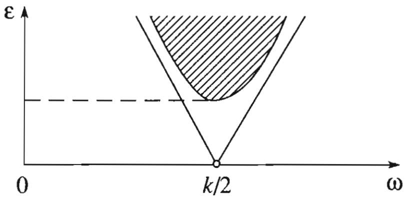
Постоянные

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\tau)\cos k\tau\,d\tau, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\tau)\sin k\tau\,d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.11}$$

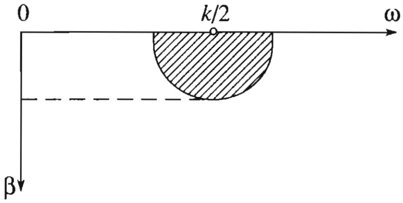
являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(\tau)$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Для матрицы (3.10) найдем приближенные значения мультипликаторов

$$\rho_{1,2} = (-1)^k(1-\pi\beta k/2) \pm \pi\sqrt{D}; \quad D = r_k^2 k^2 \varepsilon^2 \varsigma^2/4 - (2\Delta\omega)^2, \quad r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad (3.12)$$

Система неустойчива, если хотя бы один из мультипликаторов по модулю больше единицы [2, 3]. При $\beta < 0$ это условие выполнено, и система неустойчива. А при $\beta \geq 0$ это условие выполняется лишь при $\sqrt{D} > \beta k/2$. Отсюда при учете соотношений (3.12) получим, что область неустойчивости (параметрического резонанса) лежит внутри половины конуса

$$4(2\omega/k - 1)^2 + \beta^2 < r_k^2 \varepsilon^2 \varsigma^2, \quad \beta \geq 0 \qquad (3.13)$$

соединяясь с полупространством $\beta < 0$ (фиг. 2).

Отсюда, в частности, следует, что к-я ОР зависит только от к-х коэффициентов Фурье периодической функции возбуждения. Отметим, что формулы (3.13) являются аппроксимациями первого приближения для областей неустойчивости. В случае $a_k = 0$, $b_k = 0$ величина $r_k = 0$ и аппроксимации первого порядка (3.13) вырождаются в прямую $\beta = 0$, $\omega = k/2$. В этом случае для более точного нахождения ОР следует использовать аппроксимации более высокого порядка. Это может также означать, что соответствующая ОР пустая.

Положив в неравенстве (3.13) $\beta = 0$, получим ОР при отсутствии трения

$$-\frac{r_k k \varsigma}{4} < \frac{\omega - k/2}{\varepsilon} < \frac{r_k k \varsigma}{4} \qquad (3.14)$$

Сечение конуса (3.13) плоскостью $\beta = \mathrm{const}$, $\beta \geq 0$ дает ОР, ограниченную гиперболой (фиг. 3), ее асимптоты находятся из неравенств (3.14). При наличии трения ($\beta > 0$) минимальная амплитуда возбуждения резонанса согласно соотношению (3.13) составляет

$$\varepsilon_{\min} = \beta/r_k\varsigma \qquad (3.15)$$

Проанализируем изменение ОР при увеличении номера резонанса k. Известно, что если периодическая функция $\varphi(\tau)$ непрерывна вместе со своими производными s-го порядка, то для коэффициентов Фурье a_k и b_k имеют место соотношения $a_k k^{s+1} \to 0$, $b_k k^{s+1} \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому для непрерывно дифференцируемых функций величины kr_k стремятся к нулю при $k \to \infty$. Это означает, что конус (3.13) с увеличением k сужается. Отсюда также следует, что при фиксированном β и с увеличением k минимальная амплитуда возбуждения резонанса (3.15) неограниченно возрастает. Это объясняет тот факт, что наблюдать резонанс легче при низших значениях $k = 1, 2$, в то время как для достижения резонанса при более высоких k требуются большие амплитуды возбуждения.

Сечение области (3.13) плоскостью $\varepsilon = \text{const}$ представляет собой половину эллипса с полуосями $|\omega - k/2| = r_k k\varepsilon\varsigma/4$ и $\beta = r_k\varepsilon\varsigma$ (фиг. 4). Заметим, что с увеличением коэффициента трения β ширина ОР по частоте ω сужается и при $\beta > r_k\varepsilon\varsigma$ исчезает.

Из соотношения (3.13) и представленного анализа следует, что с увеличением параметра $\varsigma \in (0, 1)$ ОР расширяются. Согласно соотношениям (1.4) это означает, что при увеличении момента инерции масс и неизменном моменте инерции диска ОР расширяются.

С использованием соотношений (1.4), (3.8) находим, что параметрический резонанс возникает в окрестности размерных критических частот

$$\Omega_{\text{cr}} = \frac{2\Omega_0}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J_0 + 2mr_0^2}} \tag{3.16}$$

Отметим, что Ω_0 – собственная частота крутильных колебаний диска с двумя неподвижными массами m, расположенными на расстоянии r_0 от оси вращения. С использованием соотношений (1.4) и (3.16) ОР (3.13) можно записать в размерных переменных.

В качестве численного примера рассмотрим периодическую функцию $\varphi(\tau) = \cos\tau$ и параметр $\varsigma = 1/2$. В этом случае для первой резонансной области $k = 1$ вычислим с помощью выражений (3.11) $a_1 = r_1 = 1$, $b_1 = 0$. Таким образом, согласно соотношениям (1.4) и (3.13) получим явное выражение для первой ОР в размерных переменных

$$4\left(\frac{\Omega}{2\Omega_0} - 1\right)^2 + \frac{\gamma^2}{(J_0 + 2mr_0^2)c} < \frac{a^2}{4r_0^2} \tag{3.17}$$

Отметим, что другие ОР вырождены, поскольку $a_k = b_k = r_k = 0$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$.

В качестве другого примера рассмотрим непрерывно дифференцируемую 2π-периодическую функцию

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \tau(\pi - \tau), & 0 \le \tau \le \pi \\ (\pi - \tau)(2\pi - \tau), & \pi < \tau \le 2\pi \end{cases} \tag{3.18}$$

состоящую из парабол положительной и отрицательной кривизны. Для коэффициентов Фурье этой функции имеем

$$a_k = 0, \quad b_k = r_k = \frac{8}{\pi k^3}, \quad k = 1, 3, 5, \ldots; \quad a_k = b_k = r_k = 0, \quad k = 2, 4, 6, \ldots \tag{3.19}$$

Таким образом, согласно формуле (3.13) для нечетных резонансов получим соотношение

$$4\left(\frac{2\omega}{k} - 1\right)^2 + \beta^2 < \frac{64\varepsilon^2\varsigma^2}{\pi^2 k^6}, \quad k = 1, 3, 5, \ldots \tag{3.20}$$

показывающее, как быстро с ростом номера k сужаются ОР, тогда как четные ОР вырождены.

Изложенный метод анализа областей параметрического резонанса, использующий производные матрицы монодромии по параметрам, представляется более простым и эффективным по сравнению с методами, основанными на поиске периодических решений на границе области устойчивости [3]. Кроме того, он дает соотношения для области устойчивости, а не только для границы устойчивости, и находит мультипликаторы, описывающие характер неустойчивого движения.

Работа выполнена при поддержке фонда Regione Campania (LR 28/5/03, 2003) и Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00161).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4-е изд. М.: Наука, 1987. 352 с.
2. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
3. *Nayfeh A.H., Mook D.T.* Nonlinear Oscillations. N.Y.: Wiley, 1979. 704 p.
4. *Seyranian A.P., Solem F., Pedersen P.* Stability analysis for multi-parameter linear periodic systems // Arch. Appl. Mech. 1999. V. 69. № 3. P. 160–180.
5. *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. New Jersey, London: World Scientific, 2003. 403 p.

Рим, Москва
e-mail: ccattani@unisa.it
seyran@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
16.XII.2004