УДК 531.36: 534.1

© 2005 г. **А. П. Иванов**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И КОЛЕБАНИЯХ ПОЛЗУНА

Рассматривается задача об асимптотической устойчивости линейной системы, параметры которой принадлежат некоторому множеству. Получены критерии устойчивости для ряда типичных частных случаев. Результаты находят применение при исследовании динамики механических систем со связями, как показано на примере колебаний ползуна на шероховатой плоскости.

Ранее подобные задачи решались при анализе влияния структуры сил на устойчивость равновесия. В частности, теоремы Томсона – Тэта – Четаева [1] справедливы при общих предположениях о диссипативных силах. Были приведены [2] некоторые результаты об устойчивости в условиях параметрической неопределенности.

1. Постановка задачи и общие результаты. Будем исследовать устойчивость системы

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0, \quad q \in R^n, \quad A, B, C \in R^{n^2} \tag{1.1}$$

полагая, что невырожденная постоянная матрица A задана, а о постоянных матрицах B и C известно лишь, что они принадлежат некоторому классу матриц K.

К подобной постановке приводят задачи динамики систем твердых тел, в которых для определения реакций используют метод деформируемых элементов. Если q – вектор деформаций, то матрицы B и C описывают диссипацию и упругие силы. Вид этих матриц определяется выражениями для потенциальной энергии деформаций и диссипативной функции Релея, априори неизвестными. Заведомо можно лишь утверждать, что эти матрицы симметричны и положительны. Матрица A связывает реакции с обобщенными ускорениями, традиционно ее ассоциируют с распределением масс. В случае неидеальных связей в этой матрице учитывается также закон трения, и она может быть несимметричной.

Устойчивость в условиях неопределенности называют робастной устойчивостью [2]. Общие результаты о робастной устойчивости получены пока лишь для некоторых частных случаев, для которых область изменения параметров ограничена. В данной работе рассматриваются неограниченные матричные классы. Очевидно, что чем шире класс K, тем строже требования к матрице A для обеспечения устойчивости при любых $B, C \in K$.

Рассмотрим сначала известный частный случай.

Теорема 1. Пусть $K = S_+$ – класс симметричных положительно определенных матриц. Для асимптотической устойчивости системы (1.1) для любых B, $C \in K$ необходимо и достаточно, чтобы $A \in K$.

Доказательство. Достаточность вытекает из третьей теоремы Томсона – Тэта – Четаева [1]. Для доказательства необходимости сделаем в системе (1.1) такое ортогональное преобразование координат, в результате которого симметрическая часть матрицы A примет диагональную форму $\|a_{ii}\|$ ($i = 1, \ldots, n$). Полагая матрицы B и C диагональными, составим характеристическое уравнение

$$\det\left\|A\lambda^2 + B\lambda + C\right\| = 0 \tag{1.2}$$

В уравнении (1.2) коэффициент при λ^2 представляет собой многочлен первой степени относительно a_{ii} с положительными коэффициентами, зависящими от элементов матриц B и C. Необходимая для устойчивости положительность этого многочлена означает, что $a_{ii} \geq 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Допустим далее, что в матрице A имеется ненулевой элемент вне главной диагонали, например $a_{12} \neq 0$. Тогда угловой минор второго порядка для матрицы (1.2) представляет собой многочлен четвертой степени, коэффициенты которого зависят от элементов b_{ii} и c_{ii} ($i = 1, 2$) матриц B и C. Проверка условий Гурвица показывает, что если $a_{11}/a_{22} = b_{11}/b_{22} = c_{11}/c_{22}$, причем $a_{12}^2 c_{11} > a_{11} b_{11}^2$, то многочлен имеет корень в правой полуплоскости. Считая b_{11}, c_{11} большими параметрами, получаем, что и характеристический многочлен (1.2) имеет такой корень. Полученное противоречие показывает, что $a_{12} = 0$. Наконец, из условия невырожденности матрицы A получаем, что $a_{ii} > 0$ ($i = 1, \ldots, n$), откуда следует $A \in K$.

Другой частный случай составляет класс положительных скалярных матриц. Система (1.1) принимает вид

$$A\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \tag{1.3}$$

где b и c – положительные числа.

Теорема 2. Для асимптотической устойчивости системы (1.3) при любых b, c необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы A были положительными действительными числами.

Доказательство. Невырожденным линейным преобразованием системы (1.3) приведем матрицу A к вещественной нормальной форме (при этом в уравнении (1.3) изменится лишь первое слагаемое). Всякому действительному собственному значению λ_a этой матрицы в характеристическом уравнении (1.2) соответствует уравнение второго порядка

$$\lambda_a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

корни которого лежат в левой полуплоскости лишь при условии $\lambda_a > 0$. Комплексным собственным значениям $\alpha \pm i\beta$ соответствует уравнение четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} \alpha\lambda^2 + b\lambda + c & \beta\lambda^2 \\ -\beta\lambda^2 & \alpha\lambda^2 + b\lambda + c \end{vmatrix} = p_4\lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0 \tag{1.4}$$

$$p_4 = \alpha^2 + \beta^2, \quad p_3 = 2\alpha b, \quad p_2 = b^2 + 2\alpha c, \quad p_1 = 2bc, \quad p_0 = c^2$$

Условия Гурвица для полинома четвертого порядка таковы:

$$p_j > 0, \quad p_1p_2p_3 > p_0p_3^2 + p_1^2p_4, \quad j = 0, 1, \ldots, 4 \tag{1.5}$$

Подставляя значения (1.4) в условия (1.5), приходим к единственному неравенству

$$\alpha b^2 > c\beta^2$$

которое выполнено при любых положительных b, c лишь в случае $\alpha > 0$, $\beta = 0$, что и утверждалось.

Рассмотренные в теоремах 1, 2 классы матриц соответствуют двум предельным случаям: в теореме 1 на деформируемые элементы не накладывается ограничений, а в теореме 2 принимается модель одинаковых линейных вязкоупругих элементов. Ниже обсуждаются некоторые промежуточные случаи.

2. Случай двух независимых нелинейных элементов. Пусть $n = 2$, а в качестве класса K рассматривается класс D диагональных матриц с положительными элементами. С практической точки зрения данный случай соответствует модели двух независимых деформируемых элементов, не обязательно одинаковых или линейных.

Теорема 3. Для асимптотической устойчивости системы (1.1), где $n = 2$, при любых $B, C \in D$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \Delta = \det A > 0, \quad a_{12}a_{21} > 0 \tag{2.1}$$

Доказательство. Раскрывая определитель (1.2), получим для коэффициентов характеристического уравнения (1.4) такие выражения:

$$\begin{aligned} &p_4 = \Delta, \quad p_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11}, \quad p_2 = a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} + b_{11}b_{22} \\ &p_1 = b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11}, \quad p_0 = c_{11}c_{22} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Сначала допустим, что какое-то из неравенств (2.1) имеет противоположный смысл. Если нарушено первое неравенство, то при $b_{11} \to 0$ будем иметь $p_3 < 0$. Если $\Delta < 0$, то $p_4 < 0$. Наконец, пусть $a_{12}a_{21} < 0$. Подставляя выражения (2.2) в последнее условие (1.5), придем к неравенству

$$\begin{aligned} &-a_{12}a_{21}(b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11})^2 < b_{11}b_{22}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})(b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11}) + \\ &+ b_{11}b_{22}(a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11})^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Последнее слагаемое в правой части этого неравенства можно сделать нулевым за счет выбора c_{11}, c_{22}. Тогда левая часть будет квадратичной формой относительно b_{11}, b_{22}, а правая – формой четвертого порядка относительно этих коэффициентов. Поэтому при $b_{11}, b_{22} \to 0$ неравенство (2.3) не выполнено, что свидетельствует о неустойчивости.

Достаточность условий (2.1) следует из того, что левая часть неравенства (2.3) отрицательна, а правая – положительна.

Пусть D_2 – множество диагональных матриц второго порядка с положительными элементами, для которых второй элемент не меньше первого.

С практической точки зрения, использование в качестве класса K множества D_2 означает, что выбрана модель двух одинаковых нелинейных деформируемых элементов, причем при данных условиях второй элемент нагружен больше, чем первый.

Теорема 4. Для асимптотической устойчивости системы (1.1), где $n = 2$, при любых $B, C \in D_2$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{gathered} a_{11} > 0, \quad a_{11} + a_{22} > 0, \quad \Delta > 0, \quad a_{12}a_{21} > \Phi(a_{11} - a_{22}) \\ \Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ -x^2/4, & \text{если } x > 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Доказательство. Первые два неравенства (2.4) равносильны требованию $p_3 > 0$ для всех $b_{22} \ge b_{11} > 0$. Для выяснения смысла последнего неравенства (2.4) разделим обе части условия (2.3) на $b_{11}b_{22}$. В итоге получим

$$\begin{gathered} -a_{12}a_{21}(c_{11}\gamma + \gamma^{-1}c_{22})^2 < (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})(b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11}) + (a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11})^2 \\ \gamma = \sqrt{b_{22}/b_{11}} \ge 1 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства положительно, причем его можно сделать сколь угодно малым без изменения остальных членов этой формулы. Если $a_{12}a_{21} > 0$, то неравенство (2.5) выполнено, если же $a_{12}a_{21} < 0$, то его левая часть достигает максимума при $\gamma = 1$. Следовательно, условие (2.5) равносильно неравенству

$$-a_{12}a_{21} < (a_{11}\delta - a_{22})^2/(1+\delta)^2; \quad \delta = c_{22}/c_{11} \geq 1 \tag{2.6}$$

Если $a_{11} \leq a_{22}$, то минимальное значение правой части неравенства (2.6) равно нулю. В случае $a_{11} > a_{22}$ минимальное значение достигается при $\delta = 1$. Обе эти возможности объединены последним неравенством (2.4).

Замечания. 1°. Определим D_1 как множество диагональных матриц второго порядка с положительными элементами, для которых первый элемент не меньше второго. Тогда будет справедливо утверждение, аналогичное теореме 4, но с переменой местами коэффициентов a_{11} и a_{22}.

2°. Невыполнение условий (2.1) или (2.4) свидетельствует о том, что *при некоторых* $B, C \in K$ система неустойчива. Кроме того, можно указать условия неустойчивости *при любых* $B, C \in K$. При $K = D$ к ним относятся случаи, когда первые два неравенства (2.1) или третье неравенство имеют противоположный смысл [3]. Если же $K = D_2$, то к неустойчивости ведет нарушение третьего неравенства (2.1) (при этом $p_4 < 0$) или первых двух неравенств (2.4) (при этом $p_3 < 0$).

3°. Если не выполнены ни условия теорем 3 или 4, ни условия, перечисленные в замечании 2°, то в зависимости от выбора матриц $B, C \in K$ может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость. Переход от устойчивости к неустойчивости при непрерывном изменении элементов этих матриц происходит по сценарию бифуркации рождения цикла, так как характеристическое уравнение во всех рассматриваемых случаях не имеет нулевых корней.

3. Колебания ползуна на шероховатой плоскости. Рассмотрим твердое тело в форме параллелепипеда, скользящее по шероховатой горизонтальной плоскости. Эта система известна еще с работ Кулона по определению закономерностей трения. Тем не менее, некоторые аспекты динамики ползуна остаются неясными. К их числу можно отнести наблюдаемые на практике колебания тела в вертикальном направлении. Для случая поршня, движущегося между двумя направляющими, такие колебания объяснялись [4] резонансом между собственными частотами системы. В качестве возможных причин назывались также [5] соударения микронеровностей и колебания опоры (микросейсмы). Для объяснения явления "визга" тормозных колодок применялась [6] модель четырех линейных деформируемых элементов с заданными характеристиками. Ниже предлагается модель двух одинаковых нелинейных элементов, для которых коэффициенты жесткости и вязкости растут вместе с деформациями.

Будем считать, что движение происходит в вертикальной плоскости, являющейся плоскостью симметрии тела. Направим координатные оси горизонтально в направлении скольжения и вертикально вверх. Основные теоремы динамики выражаются уравнениями

$$m\ddot{x} = X - \mu N, \quad m\ddot{y} = Y + N, \quad mk^2\ddot{\varphi} = M + M_N - \mu b N \tag{3.1}$$

где m – масса тела, a, b – половины длин его ребер, k – радиус инерции, x, y, φ – координаты центра масс и угол поворота тела, μ – коэффициент трения, X, Y, M – внешние силы и их момент, N, M_N – главный вектор и главный момент нормальной реакции.

Поместим мысленно деформируемые элементы в угловых точках тела, тогда

$$N = N_1 + N_2, \quad M_N = a(N_2 - N_1) \tag{3.2}$$

Для деформаций элементов имеем

$$\delta_1 = a\varphi - y, \quad \delta_2 = -a\varphi - y \tag{3.3}$$

Подставляя выражения (3.2), (3.3) в уравнения (3.1), получаем

$$mk^2\ddot{\delta}_i = (-1)^{i+1}[aM + a^2(N_2 - N_1) - \mu ab(N_1 + N_2)] - k^2(Y + N_1 + N_2), \quad i = 1, 2 \quad (3.4)$$

Заменяя в равенстве (3.4) левую часть нулем, можно найти равновесные значения реакций, а затем – равновесные деформации δ_1^0, δ_2^0. Линеаризуя затем систему (3.4) в окрестности равновесия, получим систему вида (1.1) относительно возмущений $q_i =$ $= \delta_i - \delta_i^0$, где

$$b_i = \frac{\partial N_i(\delta_i^0, 0)}{\partial \dot{q}_i}, \quad c_i = \frac{\partial N_i(\delta_i^0, 0)}{\partial q_i}, \quad A = \frac{mk^2}{4a^2}\|a_{ij}\|; \quad i, j = 1, 2$$

$$a_{11} = 1 + U - V, \quad a_{12} = -1 + U - V, \quad a_{21} = -1 + U + V, \quad a_{22} = 1 + U + V$$

$$U = a^2/k^2, \quad V = \mu ab/k^2$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости скольжения ползуна по отношению к переменным δ_i, $\dot{\delta}_i$ ($i = 1, 2$). Поскольку данные переменные определяют движение центра масс тела вдоль вертикали, а также его вращательное движение, то наличие асимптотической устойчивости означает, что колебания вдоль вертикали, вызванные начальными возмущениями, со временем затухают. Применим для исследования устойчивости полученные выше результаты.

Можно проверить, что условия теоремы 2 выполнены для всех U, $V > 0$. Это означает, что модель линейных элементов непригодна для описания незатухающих колебаний.

Условия теоремы 3 сводятся к единственному неравенству

$$V < |U - 1|$$

означающему, что колебания не возникают, если коэффициент трения не превосходит некоторого порога:

$$\mu < \mu^* = |a^2 - k^2|/(ab) \quad (3.5)$$

Для однородного ползуна $k^2 = (a^2 + b^2)/3$, откуда

$$\mu^* = |2a^2 - b^2|/(3ab) \quad (3.6)$$

Видно, что критическое значение коэффициента трения зависит от формы тела и в принципе может быть сколь угодно близким к нулю. Наибольшей неустойчивостью ($\mu^* = 0$) обладает тело в форме стандартного листа бумаги, стоящего на короткой стороне.

Теоремой 4, где $K = D_2$, следует пользоваться в случае, когда равновесные решения системы (3.4) удовлетворяют условию $N_2 > N_1$, выполняющемуся, в частности, если момент внешних сил M равен нулю. Так как $a_{22} > a_{11}$, то условие устойчивости также имеет вид (3.5).

Допустим наконец, что внешний момент обеспечивает выполнение неравенства $N_2 < N_1$. Тогда условия устойчивости выполнены при всех значениях U, $V > 0$.

Необходимо отметить, что для значений

$$\mu > \mu^{**} = |a^2 + k^2|/(ab)$$

получаем $a_{11} < 0$, что свидетельствует о несуществовании или неединственности равновесных значений реакции, определяемых из системы (3.4) [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00308).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
3. *Иванов А.П.* Об особенностях динамики систем с неидеальными связями // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 212–221.
4. *Скуридин М.А.* Динамика двузвенных и кинетостатика диадных механизмов (с учетом трения) // Труды семинара по теории механизмов и машин. 1947. Т. 2. Вып. 6. С. 55–100.
5. *Толстой Д.М.* Собственные колебания ползуна, зависящие от жесткости, и их влияние на трение // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 4. С. 820–823.
6. *Popp K., Rudolph M.* Brake squeal // Detection, Utilization, and Avoidance of Nonlinear Dynamical Effects in Engineering Applications. Aachen: Shaker Verlag, 2001. P. 197–225.

Москва
e-mail: apivanov@orc.ru

Поступила в редакцию
2.X.2004