

УДК 533.72

© 2005 г. В. С. Галкин, С. В. Русаков

К ТЕОРИИ ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОСТИ И РЕЛАКСАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ

Дана общая теория объемной вязкости и релаксационного давления на базе обобщенного метода Чепмена – Энскога, а также их простые качественные теории. Обсуждаются вопросы, связанные с определением температуры. Приведены формулы для коэффициентов объемной вязкости и теплопроводности газа, обладающего вращательными степенями свободы. Исследуется влияние объемной вязкости на поглощение и дисперсию звука и структуру ударной волны в азоте.

В аэродинамике ранее применялись в основном уравнения Эйлера и пограничного слоя, в которых объемная вязкость является внепорядковой и, следовательно, опускается. Действительно, отношение градиента объемной вязкости к конвективной части уравнения движения будет порядка обратного числа Рейнольдса при условии, что коэффициенты динамической и объемной вязкости соизмеримы, а дивергенция скорости – порядка отношения характерной скорости к характерной длине. В результате в руководствах по механике газа объемная вязкость либо вообще не рассматривается, либо описывается недостаточно наглядно [1], причем на примере задачи о распространении звука [2]. Однако в настоящее время для расчета ламинарных течений сжимаемой жидкости широко используются уравнения газодинамики в приближении Навье – Стокса – Фурье (короче – уравнения Навье–Стокса), в которых учитываются слагаемые порядка обратного числа Рейнольдса, поэтому необходим анализ роли объемной вязкости в задачах обтекания.

Разработаны различные направления кинетической теории объемной вязкости [3–11], однако ее простым качественным моделям уделялось недостаточное внимание [8, 11].

Дискуссионным остается вопрос определения температуры [5, 6, 9]. В случае идеальных многоатомных газов объемная вязкость входит в выражение для тензора напряжений при условии, что распределение по внутренним энергиям молекул близко к локально равновесному и что температура T определена по полной внутренней энергии газа (как в термодинамике необратимых процессов). Если температура определена по поступательной энергии частиц (поступательная температура газа T_t), то тензор напряжений имеет одинаковый вид независимо от степени возбуждения внутренних степеней свободы молекул, объемная вязкость отсутствует, однако аналогичное слагаемое входит в выражение для внутренней энергии газа. Такое определение температуры представляется более “физичным”, так как тензор напряжений определяется переносом импульса частиц [5, 6]. В неидеальных (плотных) одноатомных газах объемная вязкость обусловлена потенциальной энергией взаимодействия молекул. При введении температуры T , выражение для коэффициента объемной вязкости изменяется, аналогичное слагаемое входит в формулу для внутренней энергии газа [9].

Аналогично состояние вопроса о релаксационном давлении – тонком эффекте, возникающем в течениях газов при условии, что часть внутренних степеней свободы молекул близка к локально равновесному состоянию, а другая релаксирует [4–8, 10, 11].

Следствием обобщенного метода Чепмена–Энскога (разд. 1) является общая система уравнений физико-химической (релаксационной) газодинамики – система уравнений с урвневой кинетикой [5, 6]. Последняя описывает, в частности, области течений газов, где внутренние степени свободы молекул заморожены. Используется понятие о поступательной температуре T_t . Тензор напряжений не меняет формы в зависимости от степени возбуждения внутренних степеней свободы молекул. Выражения для объемной вязкости и релаксационного давления получают предельным переходом $\tau/t_* \rightarrow 0$ и переопределением температуры T_t на T , где τ – время релаксации “быстрого” процесса установления квазиравновесного состояния, t_* – газодинамическое

время. Указанные величины характеризуют отличие T_i от температуры T , определенной с учетом внутренней энергии молекул для быстрых процессов.

Разд. 2 и 3 иллюстрируют положения общей теории из известных [8, 12] релаксационных газодинамических моделях, без обращения к кинетической теории.

Далее рассматривается газ с вращательными степенями свободы, близкими к локально равновесным, остальные внутренние степени свободы молекул заморожены. Подчеркивается, что при использовании температуры T_i упрощаются системы уравнений для скалярных поправок к функциям распределения (разд. 4). Основное внимание уделяется качественному рассмотрению. Вопросы значимости объемной вязкости иллюстрируются простыми, но показательными примерами (разд. 6, 7). Аналогичные вопросы для релаксационного давления более сложны, почти не разработаны и здесь не рассматриваются.

1. Обобщенный метод Чепмена–Энскога. Рассматривается случай идеальных газов, молекулы которых взаимодействуют лишь при мгновенных столкновениях, в квазиклассическом приближении, когда поступательная энергия молекул трактуется классически, а внутренняя – квантово-механически [3–8]. Химические реакции отсутствуют. Система общих уравнений физико-химической газодинамики включает уравнения баланса заселенностей n_ω , импульса и внутренней энергии (см. обзоры [5, 6])

$$\frac{Dn_\omega}{Dt} + n_\omega \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot n_\omega \mathbf{V}_\omega = K_\omega, \quad K_\omega = \int J_\omega(f, f) d\xi \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0 \quad (1.2)$$

$$n \frac{D\mathcal{E}}{Dt} + \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad n = \sum_\omega n_\omega, \quad \rho = mn$$

n_ω – числовая плотность частиц в квантовом состоянии ω , т.е. обладающих внутренней энергией E_ω , $J_\omega(f, f)$ – оператор неупругих столкновений в кинетическом уравнении; нижние индексы $\omega, \psi = 0, 1, 2, \dots, N$, где N – число квантовых уровней, суммирование проводится по всем значениям этих индексов, m – масса молекулы.

Суммируя уравнение (1.1) по ω , находим уравнение неразрывности

$$\frac{Dn}{Dt} + n \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

Обобщенный метод Чепмена – Энскога дает ряд для функций распределения $f_\omega = f_\omega^{(0)} + f_\omega^{(1)} + \dots$ по числу Кнудсена $\text{Kn} \ll 1$ относительно локально-максвелловской функции

$$f_\omega^{(0)} = n_\omega \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-hc^2), \quad \mathbf{c} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}, \quad h = \frac{m}{2kT_i} \quad (1.5)$$

где m – масса, $\boldsymbol{\xi}$ – скорость частицы. Возмущение

$$f_\omega^{(1)} = f_\omega^{(0)} \left\{ -A_\omega \mathbf{c} \cdot \nabla \ln T_i - B_\omega \left(\mathbf{c} \mathbf{c} - \frac{1}{3} \mathbf{I} c^2 \right) : \nabla \mathbf{u} - \sum_\psi D_{\omega\psi} \mathbf{c} \cdot \nabla \frac{n_\psi}{n} - G_\omega \right\} \quad (1.6)$$

$$\frac{f_\omega^{(1)}}{f_\omega^{(0)}} = O(\text{Kn})$$

Здесь \mathbf{I} – единичный тензор, A, B, D, G – скалярные коэффициенты порядка числа Кнудсена Kn , они зависят от hc^2 и не зависят от градиентов макропараметров и явно от \mathbf{u} .

Рассматривается вариант метода, когда по $f_\omega^{(0)}$ определяются величины

$$n_\omega = \int f_\omega^{(0)} d\xi, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{n} \sum_\omega \int f_\omega^{(0)} \xi d\xi, \quad T_t = \left(\frac{3}{2}nk\right)^{-1} \sum_\omega \int f_\omega^{(0)} \frac{m}{2} c^2 dc$$

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}kT_t + \mathcal{E}^{in}, \quad \mathcal{E}^{in} = \sum_\omega \frac{n_\omega}{n} E_\omega$$
(1.7)

где \mathcal{E} – удельная внутренняя энергия газа, k – постоянная Больцмана, величина \mathcal{E}^{in} обусловлена внутренней энергией молекул.

Формулы (1.7) дают условия единственности решения интегральных уравнений для коэффициентов A, B, D, G . Векторные (по \mathbf{c}) слагаемые выражения (1.6) определяют диффузионные скорости \mathbf{V}_ω и вектор теплового потока \mathbf{q} . Тензор напряжений

$$\mathbf{\Pi} = \sum_\omega m \int (f_\omega^{(0)} + f_\omega^{(1)}) \mathbf{c} \mathbf{c} dc = P\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}, \quad P = nkT_t$$
(1.8)

где P – след тензора напряжений, $\boldsymbol{\pi}$ – бездивергентный (с нулевым следом) тензор

$$\boldsymbol{\pi} = -\sum_\omega m \int f_\omega^{(0)} B_\omega \left(\mathbf{c} \mathbf{c} - \frac{1}{3} \mathbf{I} c^2 \right) : \nabla \mathbf{u} \mathbf{c} dc = -2\eta \mathbf{S}$$
(1.9)

η – коэффициент динамической вязкости, \mathbf{S} – тензор скоростей сдвига с декартовыми компонентами

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} I_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Наконец, правая часть уравнения (1.1)

$$K_\omega = K_\omega^{(0)} + K_\omega^{(1)}(G); \quad K_\omega^{(0)} = \int J(f^{(0)}, f^{(0)}) dc, \quad K_\omega^{(1)} = \int L(f^{(0)}, f^{(0)} G) dc$$
(1.10)

т.е. $K_\omega^{(0)}$ рассчитывается по $f = f^{(0)}$, величина L – линейризованный (относительно $f^{(0)}$) и симметризованный [5, 6] оператор неупругих столкновений. Вклад в величину $K_\omega^{(1)}$ дает только скалярное (по \mathbf{c}) слагаемое G_ω выражения (1.6). Принципиальным является то, что в околоравновесных ситуациях слагаемые формулы (1.10) оказываются одинаковыми по порядку величины [5, 6].

Если возбуждены вращения и колебания молекул, то $\omega = \alpha\beta$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_R$, $\beta = 0, 1, 2, \dots, N_V$, где N_R, N_V – числа вращательных и колебательных уровней соответственно. Предполагается, что вращательная энергия молекулы E_α не зависит от ее колебательного состояния [8], так что

$$\mathcal{E}^{in} = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_V, \quad \mathcal{E}_R = \sum_\omega E_\alpha \frac{n_\omega}{n}, \quad \mathcal{E}_V = \sum_\omega E_\beta \frac{n_\omega}{n}$$
(1.11)

Пусть вращения молекул относятся к быстрым процессам, т.е. $\tau_R/t_* \ll 1$, а колебания – к медленным, т.е. $\tau_V/t_* \sim 1$, где τ_R, τ_V – вращательное и колебательное времена релаксации, t_* – газодинамическое время.

Появление малого параметра $\tau_R/t_* \sim \text{Kn}$ дает возможность найти приближенное решение для n_ω и перейти к сокращенному газодинамическому описанию. При этом достаточно ограничиться эйлеровым приближением в левых частях уравнений (1.1) и (1.3), опуская слагаемые с \mathbf{V}_ω , $\boldsymbol{\pi}$, \mathbf{q} ; учет этих слагаемых дает внепорядковые члены. Напомним, что при выводе уравнений для определения коэффициентов A , B , D , входящих в выражение (1.6), конвективная часть кинетического уравнения преобразуется в рамках приближения Эйлера. С учетом сказанного и уравнения (1.4), просуммируем уравнения (1.1) по колебательным уровням β . Получим

$$n \frac{Dy_\alpha}{Dt} = R_\alpha^{(0)R} + R_\alpha^{(0)V} + R_\alpha^{(1)R} \quad (1.12)$$

где

$$y_\alpha = \frac{n_\alpha}{n}, \quad n_\alpha = \sum_\beta n_{\omega}, \quad R_\alpha = \sum_\beta K_\omega$$

n_α – вращательная заселенность. Величины с верхним индексом R включают только вращательные и поступательно-вращательные обмены, величины с верхним индексом V – обмены колебательной энергией [10]. Слагаемое $R_\alpha^{(1)V}$ опущено как внепорядковое.

В безразмерном виде слагаемое $R_\alpha^{(0)R} \sim 1/\text{Kn}$, остальные слагаемые уравнения (1.12) порядка единицы. Ищем решение в виде

$$y_\alpha = y_\alpha^{(0)} + y_\alpha^{(1)}, \quad y_\alpha^{(1)}/y_\alpha^{(0)} = O(\text{Kn})$$

В нулевом приближении имеем

$$R_\alpha^{(0)R} = 0 \Rightarrow y_\alpha^{(0)} = y_\alpha^{\text{eq}}(T_t) \quad (1.13)$$

где больцманова функция

$$y_\alpha^{\text{eq}}(T_t) = \frac{S_\alpha}{Q} \exp(-\varepsilon_\alpha), \quad Q = \sum_\alpha S_\alpha \exp(-\varepsilon_\alpha), \quad \varepsilon_\alpha = \frac{E_\alpha}{kT_t} \quad (1.14)$$

S_α – статистический вес вращательного уровня α .

Система уравнений для медленных переменных, т.е. для относительных колебательных заселенностей

$$y_\beta = \frac{n_\beta}{n}, \quad n_\beta = \sum_\alpha n_\omega$$

получается путем суммирования уравнения (1.1) по α с учетом уравнения (1.4)

$$n \frac{Dy_\beta}{Dt} + \nabla \cdot n_\beta \mathbf{V}_\beta = R_\beta^{(0)V}; \quad n_\beta \mathbf{V}_\beta = \sum_\alpha n_\omega \mathbf{V}_\omega, \quad R_\beta^{(0)V} = \sum_\alpha K_\omega^{(0)} \quad (1.15)$$

Правая часть уравнения (1.15) обусловлена колебательными обменами и рассчитана по $f^{(0)}$. При сделанных предположениях величина $R_\beta^{(1)V}$ имеет порядок Kn по сравнению с $R_\beta^{(0)V}$ и поэтому опущена.

В выражениях для η , \mathbf{V}_β , \mathbf{q} с погрешностью $O(Kn)$ по сравнению с единицей заселенность $n_{\alpha\beta}$ заменяется на $y_\alpha^{\text{eq}}(T_t)n_\beta$. После линеаризации относительно $y^{(0)}$ правая часть уравнения (1.12) будет линейна по $y^{(1)}$ и содержать, вообще говоря, свободное слагаемое (не зависящее от $n^{(1)}$). Левую часть уравнения (1.12) нужно положить равной

$$n \frac{Dy_\alpha^{(0)}}{Dt} = n \frac{dy_\alpha^{\text{eq}}(T_t)DT_t}{dT_t} \frac{DT_t}{Dt} \tag{1.16}$$

где

$$\frac{DT_t}{Dt} = -C_v^{-1} \left(kT_t \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{n} \sum_\beta E_\beta R_\beta^{(0)V} \right), \quad C_v = \frac{3}{2}k + c_v^R \tag{1.17}$$

“Вращательная” удельная теплоемкость при постоянном объеме

$$c_v^R = \frac{d}{dT_t} \mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T_t), \quad \mathcal{E}_R^{\text{eq}} = \sum_\alpha E_\alpha y_\alpha^{\text{eq}}(T_t) \tag{1.18}$$

Формула (1.17) получена в пренебрежении слагаемыми порядка Kn в уравнениях (1.3) и (1.15). Эти уравнения принимают вид

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2}kT_t + \mathcal{E}_R^{\text{eq}} + \mathcal{E}_V \right) + kT_t \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{D\mathcal{E}_V}{Dt} = \frac{1}{n} \sum_\beta E_\beta R_\beta^{(0)V} \tag{1.19}$$

Из соотношений (1.19) следует равенство (1.17).

Учитывая равенства (1.16) и (1.17), для $y_\alpha^{(1)}$ находим систему линейных алгебраических уравнений с неоднородной частью, линейной по $\nabla \cdot \mathbf{u}$. В итоге

$$y_\alpha^{(1)} = a_\alpha + b_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}$$

где коэффициенты a_α , b_α пропорциональны числу Kn .

Следовательно,

$$\frac{3}{2}kT_t + \mathcal{E}_R = \frac{3}{2}kT_t + \mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T_t) + Q, \quad Q = \sum_\alpha E_\alpha (a_\alpha + b_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}) \tag{1.20}$$

Величина Q – неравновесная поправка к внутренней энергии газа, обусловленной поступательными, вращательными и колебательными степенями свободы молекул. Вместо равенства (1.20) в термодинамике необратимых процессов используется выражение

$$\frac{3}{2}kT_t + \mathcal{E}_R = \frac{3}{2}kT + \mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T) \tag{1.21}$$

где T – поступательно-вращательная температура. Чтобы перейти от равенства (1.20) к (1.21), возьмем поступательную температуру

$$T_t = T + T^{(1)}, \quad T^{(1)}/T = O(Kn)$$

Линеаризуя формулу (1.20) и вычитая из полученного выражения величину правой части равенства (1.21), найдем

$$T^{(1)} = T_i - T = -C_v^{-1} Q \quad (1.22)$$

Неравновесная поправка Q характеризует разницу поступательной и поступательно-вращательной температур [11]. Величина C_v определена последней формулой (1.17).

Учитывая соотношение (1.22), приводим выражение (1.8) к виду

$$\Pi = (p + p_{rel} - \zeta \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - 2\eta \mathbf{S}, \quad p = nkT \quad (1.23)$$

Формулы для коэффициента объемной вязкости ζ и релаксационного давления p_{rel} очевидным образом получаются из предыдущих. Приближенные формулы даны в разд. 2 и 3. Известны [7] строгие выражения для ζ , p_{rel} , \mathbf{V}_β и \mathbf{q} .

Сокращенная система уравнений состоит из уравнений (1.2)–(1.4) и $N_V - 1$ уравнений (1.15) для относительных колебательных заселенностей y_β . Тензор напряжений дается формулой (1.23). Внутренняя энергия газа

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}kT + \mathcal{E}_R^{eq}(T) + \mathcal{E}_V, \quad \mathcal{E}_V = \sum_{\beta} E_{\beta} y_{\beta} \quad (1.24)$$

Всюду температура T_i заменена на T . Если колебания заморожены, то справедлива система (1.2)–(1.4), опускаются величины p_{rel} , \mathbf{V}_β , \mathcal{E}_V . Вектор теплового потока принимает вид

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (1.25)$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

2. Модель релаксации вращательной энергии. Здесь и в следующем разделе изложенную выше общую теорию объемной вязкости и релаксационного давления проиллюстрируем на газодинамических моделях, минуя кинетическую теорию. В соответствии со сказанным в разд. 1 применяются уравнения баланса в приближении Эйлера. След тензора напряжений

$$P = nkT_i \quad (2.1)$$

Рассмотрим газ с релаксирующими вращательными степенями свободы молекул, колебания заморожены. Уравнение энергии (1.3) принимает вид

$$\frac{D\mathcal{E}}{Dt} + kT_i \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathcal{E} = \frac{3}{2}kT_i + \mathcal{E}_R \quad (2.2)$$

где \mathcal{E} – внутренняя энергия газа, отнесенная к числу частиц в единице объема.

Для вращательной энергии \mathcal{E}_R примем простейшее релаксационное уравнение [8, 12]

$$\frac{D\mathcal{E}_R}{Dt} = \frac{1}{\tau_R} [\mathcal{E}_R^{eq}(T_i) - \mathcal{E}_R] \quad (2.3)$$

где τ_R – вращательное время релаксации, \mathcal{E}_R^{eq} – известная равновесная функция T_i (см. формулы (1.14), (1.18)). Уравнение (2.3) получается из уравнения (1.12), если опустить $R_{\alpha}^{(0)V}$ (колебания заморожены), предположить пренебрежимо малым слагаемое $R_{\alpha}^{(1)R}$, умножить на E_{α} , просуммировать по α и аппроксимировать правую часть простейшим релаксационным выражением.

Локальное равновесие (т.е. полностью возбужденные вращения) имеет место в пределе $\tau_R/t_* \rightarrow 0$. Запишем решение уравнения (2.3) для этого случая в виде ряда по степеням τ_R

$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_R^{(0)} + \tau_R \mathcal{E}_R^{(1)} + \dots \quad (2.4)$$

В нулевом приближении имеем равновесное решение

$$\mathcal{E}_R^{(0)} = \mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T_t) \quad (2.5)$$

В следующем приближении с учетом соотношений (1.4), (2.2)–(2.5) найдем

$$-\mathcal{E}_R^{(1)} = \frac{D\mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T_t)}{Dt} = c_v^R \frac{DT_t}{Dt} = -kT_t c_v^R C_v^{-1} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Величины C_v , c_v^R даются формулами (1.17), (1.18). Используя соотношения (2.6), приводим вторую формулу (2.2) к виду

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}kT_t + \mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T_t) + A(T_t) \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.7)$$

$$A(T_t) = \tau_R c_v^R k T_t C_v^{-1} \quad (2.8)$$

Всюду опускаем величины, пропорциональные τ_R^n , $n \geq 2$.

Подчеркнем, что слагаемое $A \nabla \cdot \mathbf{u}$ – релаксационный вклад в энергию газа. При этом, согласно формуле (2.1), гидростатическое давление nkT_t рассчитывается по поступательной температуре T_t . Введем поступательно-вращательную температуру T равенством

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}kT + \mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T) \quad (2.9)$$

причем для \mathcal{E} справедлива также формула (2.7).

Возьмем [5] поступательную температуру $T_t = T + \tau_R T^{(1)}$. Линеаризуя правую часть формулы (2.7) по τ_R и приравняв ее правой части формулы (2.9), находим

$$C_v \tau_R T^{(1)} + A \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Так что

$$T_t - T = \tau_R T^{(1)} = -A(T) C_v^{-1} \nabla \cdot \mathbf{u} \equiv -\frac{1}{nk} \zeta \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.10)$$

Подставляя в правую часть равенства (2.1) выражения (2.8), (2.10), “переводим” релаксационное слагаемое в тензор напряжений, так что его след

$$P = nkT_t = p - \zeta \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad p = nkT \quad (2.11)$$

где давление p рассчитывается по поступательно-вращательной температуре T . С учетом формул (2.8), (2.10) запишем выражение для коэффициента объемной вязкости

$$\zeta = nk^2 T \tau_R c_v^R(T) \left(\frac{3}{2}k + c_v^R(T) \right)^{-2} \quad (2.12)$$

Для коэффициента A в неравновесной поправке к удельной внутренней энергии (2.7) получаем выражение

$$A(T_i) = \frac{C_v(T_i)}{nk} \zeta(T_i) \quad (2.13)$$

Величина $\zeta(T_i)$ дается формулой (2.12) при замене T на T_i .

В силу соотношений (2.10) разность между поступательной и поступательно-вращательной температурами пропорциональна [11] объемной вязкости: $\zeta \nabla \cdot \mathbf{u}$.

3. Модель вращательно-колебательной релаксации. Пусть в газе кроме вращений возбуждены и колебания молекул. Уравнение энергии дается первой формулой (2.2), однако в выражение для удельной внутренней энергии газа добавляется колебательная энергия \mathcal{E}_v , т.е.

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}kT_i + \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_v \quad (3.1)$$

Вращательная энергия \mathcal{E}_R удовлетворяет уравнению (2.3), для энергии \mathcal{E}_v считаем справедливым релаксационное уравнение

$$\frac{D\mathcal{E}_v}{Dt} = \frac{1}{\tau_v} [\mathcal{E}_v^{\text{eq}}(T_i) - \mathcal{E}_v] \quad (3.2)$$

где τ_v – колебательное время релаксации.

Уравнение (3.2) получается из уравнения (1.15) в приближении Эйлера (когда $\mathbf{V}_\beta = 0$) путем умножения на E_β и суммирования по β для модели молекул – гармонических осцилляторов с одноквантовыми переходами [4].

Пусть, как и в разд. 2, $\tau_R/t_* \rightarrow 0$. Рассмотрим случай замедленных обменов колебательной энергией молекул: $\tau_v/t_* = O(1)$. Снова разлагаем решение уравнения (2.3) в ряд (2.4). Аналогично предыдущему получаем

$$\mathcal{E}_R^{(0)} = \mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T_i), \quad -\mathcal{E}_R^{(1)} = c_v^R \frac{DT_i}{Dt}$$

Используя уравнение энергии (первая формула (2.2)), выражение (3.1) для удельной внутренней энергии газа и релаксационное уравнение (3.2), находим

$$\frac{DT_i}{Dt} = -C_v^{-1} \left(kT_i \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\mathcal{E}_v^{\text{eq}}(T_i) - \mathcal{E}_v}{\tau_v} \right)$$

Величина C_v определена формулами (1.17), (1.18).

Возмущая T_i относительно вращательно-поступательной температуры T , аналогично указанному в разд. 2 получим формулы (1.24) для удельной внутренней энергии газа, а вместо формулы (2.11) – выражение

$$P = p + p_{\text{rel}} - \zeta \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad p = nkT$$

Течение газа описывается системой уравнений, указанной в конце разд. 1. Коэффициент объемной вязкости ζ дается формулой (2.12).

В тензор напряжений вошло релаксационное давление

$$p_{\text{rel}} = -\frac{\zeta}{kT} \frac{\mathcal{E}_v^{\text{eq}}(T) - \mathcal{E}_v}{\tau_v} \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) совпадает с выражением, полученным ранее [10] модифицированным методом Чепмена – Энскога.

Релаксационное давление имеет место при одновременном наличии быстрых (вращения) и медленных (колебания) обменов внутренней энергией молекул [4, 7, 10]. Роль химических реакций аналогична роли колебаний: если время их релаксации $\tau_c \rightarrow 0$, то они дают вклад в ζ , если $\tau_c = O(1)$ – в релаксационное давление [7].

4. Об определении температуры в методе Чепмена – Энскога. Коэффициент объемной вязкости и релаксационное давление обычно рассчитываются для конкретных предельных ситуаций [7], а не исходя из данного выше релаксационного описания (подход, аналогичный описанному в разд. 2 и 3, применялся при использовании метода Грэда [8]). Решение системы кинетических уравнений ищется в виде ряда $f_\omega^{(0)} + f_\omega^{(1)} + \dots$, где функция распределения $f_\omega^{(0)}$ является локально равновесной по скоростям молекул и по части их внутренней энергии, с учетом которой определяется температура T . Решение систем интегральных уравнений для составляющих функции $f_\omega^{(1)}$ становится единственным при добавлении условий [3], одно из которых упрощается при определении температуры по поступательным степеням свободы. В результате становится более простой система уравнений для определения скалярной составляющей функции $f_\omega^{(1)}$.

Поясним сказанное на простейшем примере [3]. Рассматривается газ с возбужденными вращательными степенями свободы (как и выше, вращательные уровни обозначаем через α , колебания заморожены). Скалярная составляющая функции $f_\alpha^{(1)}$ имеет вид

$$-(1/n)f_\alpha^{(0)}\Gamma_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{4.1}$$

где $f_\alpha^{(0)}$ – максвелл-больцманова функция распределения, Γ_α – функция от hc^2 и $E_\alpha/(kT)$.

Система уравнений для скалярной величины Γ_α решается при условиях [3]

$$\sum_\alpha \int f_\alpha^{(0)} \Gamma_\alpha d\mathbf{c} = 0, \quad \sum_\alpha \int f_\alpha^{(0)} \Gamma_\alpha (mc^2/2 + E_\alpha) d\mathbf{c} = 0 \tag{4.2}$$

следующих из требований, что по $f_\alpha^{(0)}$ определяется числовая плотность и поступательно-вращательная энергия газа (2.9). Решение ищется в виде ряда по ортогональным полиномам, простейшая аппроксимация, позволяющая удовлетворить условиям (4.2), имеет вид [3]

$$\Gamma_\alpha = \gamma_1 (hc^2 - 3/2) + \gamma_2 (\mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T) - E_\alpha) \tag{4.3}$$

Из второго условия (4.2) следует линейная связь коэффициентов γ_1 и γ_2 [3], возмущение (4.1) дает вклад $-\zeta \nabla \cdot \mathbf{u}$ в след тензора напряжений (2.11), коэффициент объемной вязкости ζ пропорционален γ_1 [3].

Если температуру определять по поступательным степеням свободы, то вместо второго условия (4.2) будем иметь более простое условие

$$\sum_\alpha \int f_\alpha^{(0)} \Gamma_\alpha c^2 d\mathbf{c} = 0 \tag{4.4}$$

и, следовательно, более простую аппроксимацию

$$\Gamma_\alpha = \gamma_3(\mathcal{E}_R^{\text{eq}}(T_l) - E_\alpha) \quad (4.5)$$

Напомним, что коэффициенты γ_k – постоянные величины ($k = 1, 2, 3$). В силу условия (4.4) возмущение (4.1), (4.5) дает вклад только в выражение для удельной внутренней энергии (2.7). С помощью уравнений [3] легко доказывается справедливость формулы (2.13).

Вычислительные преимущества введения T_l увеличиваются при переходе к более сложным случаям (например, смесь газов с квазистационарными колебательными состояниями [7]).

5. Коэффициенты объемной вязкости и теплопроводности. Рассмотрим переносные свойства газа с вращательными степенями свободы молекул, близкими к локально равновесным (случай быстрых обменов вращательной энергией молекул). Колебания молекул заморожены, химические реакции отсутствуют. Тензор напряжений дается формулой (1.23), где в данном случае $p_{\text{rel}} = 0$. Зависимость коэффициента динамической вязкости η от вращательных степеней свободы пренебрегаем [3], для функции $\eta(T)$ имеются надежные экспериментальные данные.

Запишем формулу (2.12) для коэффициента объемной вязкости ζ в виде

$$\zeta = \frac{1}{4} \pi k c_v^R \eta Z \left(\frac{3}{2} k + c_v^R \right)^{-2}; \quad Z = \frac{\tau_R}{\tau_l}, \quad \tau_l = \frac{\pi \eta}{4 \rho} \quad (5.1)$$

где τ_l – время релаксации поступательных степеней свободы молекул.

Такое же выражение для ζ получается методом Чепмена – Энскога в главном приближении по полиномам Сонина и Вальдмана–Трубенбахера [8]. Ниже коэффициент удельной теплоемкости c_v^R , обусловленный вращательными степенями свободы молекул, полагается равным k (двухатомный газ; при этом отношение удельных теплоемкостей $\gamma = 7/5$, $\mathcal{E}_R^{\text{eq}} = kT$). Для отношения времен вращательной и поступательной релаксации Z часто применяется приближенная формула Паркера

$$Z = Z_\infty \left[1 + \frac{\pi^{3/2}}{2} \theta^{1/2} + \left(\frac{\pi^2}{4} + 2 \right) \theta \right]^{-1}, \quad \theta = \frac{T}{T_*} \quad (5.2)$$

а также уточненная формула [8], отличающаяся от (5.2) наличием в квадратных скобках дополнительного слагаемого $\pi^{3/2} \theta^{3/2}$.

Для азота $T_* = 91.5$ К, $Z_\infty = 18.2$.

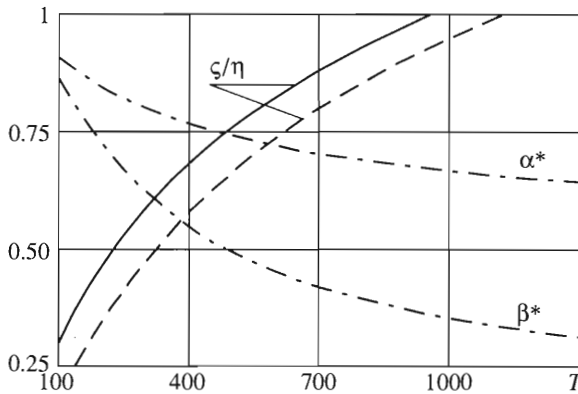
На фиг. 1 показана зависимость от T отношения ζ/η , рассчитанная для азота по формуле (5.1) с использованием формулы Паркера (5.2) (сплошная кривая) и с использованием уточненной формулы [8] (штриховая кривая). Предельное ($T \rightarrow \infty$) значение этого отношения равно 2.23. При $T > 900$ К относительный вклад колебательных степеней свободы в удельную теплоемкость становится существенным.

Вектор теплового потока дается формулой (1.25). Коэффициент теплопроводности запишем в виде [13]

$$\lambda = \frac{15}{4} R \eta \Lambda, \quad \Lambda = \lambda_l^* + \lambda_R^*, \quad R = \frac{k}{m} \quad (5.3)$$

λ_l^* и λ_R^* обусловлены соответственно поступательными и вращательными степенями свободы. Обычно на практике ограничиваются модифицированным приближением Эйкена [3]. При этом

$$\lambda_l^* = 1, \quad \lambda_R^* = \frac{4}{15} \beta_l \approx \frac{4}{15} 1.328, \quad \beta_l = \frac{\rho \mathcal{D}}{\eta} \quad (5.4)$$



Фиг. 1

где \mathcal{D} – коэффициент самодиффузии газа без учета вращательных степеней свободы. Величина β_i слабо зависит от межмолекулярных потенциалов, поэтому применяется приведенное во второй формуле (5.4) ее среднее значение [3]. В этом приближении число Прандтля $Pr = \gamma C_v \eta / \lambda = \text{const}$ (напомним, что γ и C_v – постоянные величины). При низких T точность приближения (5.4) недостаточна, применяется приближение Мэзона – Мончика [8]

$$\lambda_i^* = 1 - \frac{A}{\sigma}, \quad \lambda_R^* = \frac{2\beta_R}{5\sigma}(1 + A), \quad \beta_R = \frac{\rho \mathcal{D}_R}{\eta} = \beta_i \varphi(T) \tag{5.5}$$

$$A = \frac{5 - 2\beta_R}{\pi Z} \left[1 + \frac{2}{\pi Z} \left(\frac{5}{2\sigma} + \beta_R \right) \right]^{-1}, \quad \sigma = \frac{3k}{2c_v^R}$$

где \mathcal{D}_R – коэффициент самодиффузии газа с учетом вращательных степеней свободы. Отношение $\mathcal{D}_R/\mathcal{D}$ будем оценивать с помощью приближенной формулы Сандлера [8]

$$\mathcal{D}_R/\mathcal{D} \equiv \varphi(T) = 1 + 0.27Z^{-1} - 0.44Z^{-2} - 0.90Z^{-3} \tag{5.6}$$

В приближении (5.5), (5.6) число Прандтля зависит от температуры T .

6. Поглощение и дисперсия звука. Объемная вязкость существенна в случае, если она порядка динамической вязкости и должна учитываться в главном по $Kn \ll 1$ приближении. Примером служит распространение малых возмущений в молекулярном газе с возбужденными вращательными степенями свободы. Безразмерный коэффициент поглощения

$$\alpha = \alpha_1 Kn + O(Kn^3), \quad Kn = \omega \eta / p \ll 1 \tag{6.1}$$

где ω – частота. Подчеркнем, что все величины (т.е. p , η , ζ и т.д.), входящие в формулу (6.1) и приведенные ниже формулы (6.2)–(6.4), равны своим значениям в покоящемся газе.

Коэффициент α_1 хорошо известен [2], так как дается приближением Навье – Стокса

$$\alpha_1 = \frac{2B}{3\gamma} + \frac{15}{8\gamma^2} \Lambda (\gamma - 1)^2, \quad B = 1 + \frac{3\zeta}{4\eta} \tag{6.2}$$

Гораздо менее известно, что дисперсия звука должна изучаться в рамках приближения Барнетта, так как навье-стоксовы и барнеттовы слагаемые переносных свойств дают вклад одного порядка величины в отклонение коэффициента дисперсии от предельной (по $\text{Kn} \rightarrow 0$) величины (см., например, [13]).

Безразмерный коэффициент дисперсии

$$\beta = 1 - \beta_2 \text{Kn}^2 + O(\text{Kn}^4), \quad \beta_2 = \kappa_1 + \kappa_2 \quad (6.3)$$

характеризует изменение фазовой скорости при увеличении Kn . Коэффициент

$$\kappa_1 = \frac{2B^2}{3\gamma^2} + \frac{25B}{4\gamma^3} \Lambda(\gamma - 1)^2 + \frac{225}{128\gamma^4} \Lambda^2(\gamma - 1)^3(3\gamma - 7) \quad (6.4)$$

дается приближением Навье – Стокса, а коэффициент

$$\kappa_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \left(\frac{7}{8} Q_1 - Q_3 \right) + \frac{2Q_2}{3\gamma} \quad (6.5)$$

обусловлен барнеттовыми слагаемыми переносных свойств [13], причем

$$Q_1 = \frac{15\sigma}{7(1+\sigma)} \left(\lambda_i^{*2} + \frac{5}{3} \sigma \lambda_R^{*2} \right) - \frac{8}{7} \lambda_i^* - \frac{20}{7} (B-1) (\lambda_i^* - \sigma \lambda_R^*) \quad (6.6)$$

$$Q_2 = 1 + 2(1+\sigma)(B-1)^2, \quad Q_3 = \lambda_i^* + \frac{5}{2} (\lambda_i^* - \sigma \lambda_R^*) (B-1)$$

Входящие в выражения (6.2), (6.4)–(6.6) величины будем рассчитывать при помощи формул предыдущего раздела для азота ($c_v^R = k$, $\gamma = 7/5$). Величина B определена второй формулой (6.2).

Обозначим через

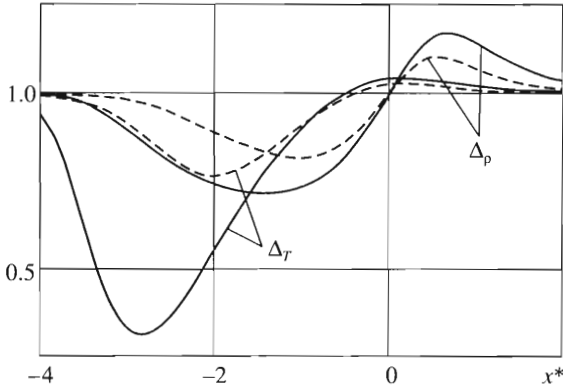
$$\alpha^* = \alpha_1(\zeta = 0)/\alpha_1(\zeta \neq 0), \quad \beta^* = \beta_2(\zeta = 0)/\beta_2(\zeta \neq 0)$$

отношения, определяющие вклад объемной вязкости в коэффициенты поглощения и дисперсии. Значения величины в числителях получаются, если в формулах (6.2), (6.4), (6.6) положить $B = 1$.

Результаты расчетов этих отношений приведены на фиг. 1. Объемная вязкость особенно сильно влияет на коэффициент дисперсии β_2 : величина Q_2 квадратична по ζ . Подчеркнем, однако, что при сильном влиянии объемной вязкости необходимо, по-видимому, переход к релаксационному описанию [8], т.е. не следует полагать τ_R/t_* малой величиной.

7. Структура ударной волны. Как отмечено в вводной части статьи, относительная величина градиента объемной вязкости в уравнении движения сжимаемой жидкости в общем случае порядка Re^{-1} . Однако это справедливо, если температура газа достаточно велика, так что $\zeta \sim \eta$, и если дивергенция скорости не мала. Оценку этого влияния сверху получим, если рассмотрим вопрос о влиянии объемной вязкости на структуру ударной волны, так как здесь $\text{Re} \sim 1$, $\zeta \sim \eta$, $\nabla \cdot \mathbf{u} \sim u/L$. Ранее решена задача о структуре слабой ударной волны в молекулярном газе [13]. Обозначим через u^* , T^* приведенные значения скорости и температуры в ударной волне

$$u^* = \frac{u(\xi) - u(-\infty)}{u(\infty) - u(-\infty)}, \quad T^* = \frac{T(\xi) - T(-\infty)}{T(\infty) - T(-\infty)} \quad (7.1)$$



Фиг. 2

где ξ – безразмерная координата вдоль потока [13]. Первое приближение по параметру интенсивности ударной волны дается приближением Навье – Стокса (в следующем приближении необходим учет барнеттовых переносных свойств [13].) При этом

$$u^* = T^* = (1 + \text{th}(\xi/b))/2, \quad b = 8\gamma^2\alpha_1(\gamma + 1)^{-2} \tag{7.2}$$

Коэффициент поглощения α_1 определен первой формулой (6.2) и рассчитывается по данным для невозмущенного потока. С ростом отношения ζ/η растет коэффициент b . Следовательно, происходит расширение области возмущенного течения по ξ .

Для приложений более интересен вопрос о влиянии объемной вязкости на профили T, ρ в ударных волнах умеренной и сильной интенсивности. Обозначим через

$$\Delta_T = T(\zeta = 0)/T(\zeta \neq 0), \quad \Delta_\rho = \rho(\zeta = 0)/\rho(\zeta \neq 0)$$

отношения значений температуры и плотности, рассчитанных при помощи системы уравнений Навье – Стокса предложенным авторами методом [14] для $\zeta = 0$ и $\zeta \neq 0$ (напомним, что в ударной волне $\rho \sim 1/u$). Данные на фиг. 2 получены при $T(-\infty) = 100$ К, число Маха перед волной $M = 5$ (штриховые кривые) и $M = 11$ (сплошные кривые), координата вдоль потока x^* отнесена к средней длине свободного пробега перед волной, значению $x^* = 0$ соответствует значение приведенной плотности $\rho^* = 1/2$ [14].

Использованы формулы разд. 4, в частности для Z – формула (5.2).

Объемная вязкость значительно изменяет профили плотности и температуры, особенно в передней зоне ударной волны. Ее влияние увеличивается с ростом числа Маха.

Авторы благодарят Г.А. Тирского за замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00501) и программ “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1984.2003.1) и Министерства образования РФ (Е02-40-52).

ЛИТЕРАТУРА

1. Emanuel G. Bulk viscosity of a dilute polyatomic gas // Phys. Fluids. 1990. V. 2. № 12. P. 2252–2254.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

3. *Ferziger J.H., Kaper H.G.* Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam; London: North-Holland, 1972 = *Ферцигер Дж., Канер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
4. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
5. *Kogan M.N., Galkin V.S., Makashev N.K.* Generalized Chapman – Enskog method: derivation of the nonequilibrium gasdynamic equations // *Rarefied Gas Dynamics. Pap. 11th Intern. Symp. Cannes, 1978.* Paris: CEA, 1979. V. 2. P. 693–734.
6. *Kogan M.N.* Kinetic theory in aerothermodynamics // *Prog. Aerospace Sci.* 1992. V.29. № 4. P. 271–354.
7. *Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в неравновесных потоках реагирующих газов. СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. 270 с.
8. *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 335 с.
9. *Ernst M.H.* Transport coefficients and temperature definition // *Physica.* 1966. V. 32. № 2. P. 252–272.
10. *Кузнецов В.М.* К теории коэффициента объемной вязкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1967. № 6. С.89–93.
11. *Waldmann L.* Transporterscheinungen in Gasen von mittlerem Druck // *Handbuch der Physik. Band XII.* Ed. S.Flugge. Berlin: Springer-Verlag, 1958. S. 295 = *Вальдман Л.* Явления переноса в газах при среднем давлении // *Термодинамика газов.* М.: Машиностроение, 1970. С. 169–414.
12. Физико-химические процессы в газовой динамике: Справочник. Т. 2. Физико-химическая кинетика и термодинамика / Под ред. Черного Г.Г. и Лосева С.А. М.: Научно-изд. центр механики. 2002. 367 с.
13. *Галкин В.С., Жаров В.А.* Решение задач о распространении звука и структуре слабой ударной волны в многоатомном газе при помощи уравнений Барнетта // *ПММ.* 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 467–476.
14. *Галкин В.С., Русаков С.В.* Барнеттова модель структуры ударной волны в молекулярном газе // *ПММ.* 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 419–426.

Жуковский
e-mail: flumec@progtech.ru

Поступила в редакцию
16.XII.2003