УДК 531/539

© 2005 г. Ф. Бойер, Д. Примо

УРАВНЕНИЯ ПУАНКАРЕ – ЧЕТАЕВА И СИСТЕМЫ МНОГИХ ГИБКИХ ТЕЛ

Рассматриваются вопросы динамики систем многих гибких тел (СМГТ) и ее связи с фундаментальной системой уравнений, полученных Пуанкаре около ста лет тому назад [1]. Эти уравнения, называемые уравнениями Пуанкаре – Четаева, сегодня известны как основа лагранжевой теории редукции. Путем обобщений этих уравнений на случай движения среды Коссера показывается, что в динамике СМГТ можно воспользоваться двумя основными системами уравнений. Доказывается, что обобщенная модель Ньютона – Эйлера СМГТ в проекциях на плавающие оси и уравнения в частных производных нелинейной, геометрически точной теории в рамках галилеева подхода представляют собой уравнения Пуанкаре – Четаева.

Интерес к динамической модели СМГТ [2–10] обусловлен приложениями к динамике к системам двух типов: к быстрым легким промышленным манипуляторам и большим космическим структурам. В зависимости от того, какие соотношения используются для описания деформаций звеньев, для моделирования таких систем могут быть использованы два подхода.

Первый из них, называемый "подходом, основанным на плавающих осях" [5–10], часто оказывается ограниченным областью линейной упругости, так как в его рамках деформации звеньев рассматриваются как модальные возмущения основных движений некоторых подвижных структур. В рамках этого подхода наиболее эффективные алгоритмы численного моделирования и управления основываются на модели Ньютона – Эйлера [5–9], которую противопоставляют модели Лагранжа [10]. Были предложены разные методы вывода модели Ньютона – Эйлера СМГТ. Первоначально для вывода использовались законы Эйлера и Ньютона совместно с методом проекций [5]. В качестве альтернативы было предложено [6] исходить из уравнений Лагранжа в квазикоординатах. Применение неголономных скоростей позволило воспользоваться [7] уравнениями Гамеля. Такая же модель может быть получена из принципа виртуальной энергии [8] и с помощью понятий описания движения по Эйлеру и по Лагранжу [11]. Для плавающих систем отсчета формулировка механики по Ньютону – Эйлеру имеет много преимуществ по сравнению с механикой по Лагранжу. Прежде всего, она требует не так много вычислительных затрат, так как в ее рамках удается описать динамику отдельных звеньев и связать эти описания с помощью рекурсивной кинематической модели цепи. Кроме того, входящие при таком описании динамические величины допускают простую физическую интерпретацию, чего нельзя сказать о подходе Лагранжа, в рамках которого те же величины входят в кинетическую энергию в виде сложных выражений. Это преимущество оказывается решающим, когда делается попытка добавить к рассмотрению некоторые нелинейные явления, такие как, например, эффект динамического упрочнения [12]. Наконец, благодаря своему рекурсивному характеру, эта модель может быть использована и при применении быстрых прямого [13] и обратного [14] $o(n)$ алгоритмов, где n – число звеньев.

Другая, галилеева теория, сначала была развита для больших космических структур, допускающих конечные деформации и малые напряжения [2–4]. С ней связано следующее основное замечание: если упругие перемещения – величины того же порядка, что и твердотельные, задача об их разделении становится искусственной, и для разделения таких движений требуется слишком много дополнительных предположений. Так, в этой теории системы отсчета для деформации звеньев галилеевы, а для распределения звеньев глобальны. По большей части этот подход основывался на теории балок Рейсснера [15], в рамках которой каждое конструктивное поперечное сечение остается твердым (среда Коссера [16]). Конфигурационное пространство такой системы может быть отождествлено с $SO(3) \times R^3$ с помощью отображения, ставящего в соответствие материальной линии балки точки из этого пространства. Численная процедура, применявшаяся [2–4] для решения задачи о вращательном движении податливой конструкции, существенным образом опиралась не на один, а на совокупность параметров из соответствующего пространства, как это бывает в рамках подхода Лагранжа. Метод основывается на понижении порядка с помощью пространственного метода конечных элементов и на неявной одношаговой схеме интегрирования из класса схем Ньюмарка. Стандартную схему "прогноз – коррекция" Ньюмарка приходится модифицировать, так как кривизна пространства SO(3) препятствует стандартным линейным операциям в векторных пространствах. Так как это препятствие преодолевается проектированием динамики на исходную конфигурацию, нелинейная задача Коши с помощью процедуры Ньютона заменяется на конечную последовательность линейных задач. Для определения линейной динамики в касательном пространстве точная внутренняя линеаризация в слабой форме достигается за счет дифференцирования в абсолютном пространстве. Так как до выполнения пространственной и временной дискретизаций не делается никаких приближений, такой подход называется "геометрически точным".

Цель настоящей работы – показать, что эти уравнения, точнее, уравнения обобщенной модели Ньютона – Эйлера СМГТ в сопутствующей системе отсчета, и уравнения геометрически точной модели системы многих балок в галилеевой системе отсчета могут быть представлены непосредственно в виде множества уравнений, открытых Пуанкаре [1] и уточненных Четаевым [17, 18]. Эти уравнения, известные сегодня как уравнения Пуанкаре – Четаева [19–21] или Эйлера – Пуанкаре [22], представляют собой обобщение уравнений Лагранжа на группе Ли, необязательно коммутативной [23, 24]. В динамике СМГТ, в противоположность стандартной структурной динамике, упругие элементы механизма не только испытывают деформации, но и осуществляют движения как твердое целое. В этом состоит особенность результатов Пуанкаре.

В разд. 1 вводятся обозначения и основные понятия. В разд. 2, согласно конструкции братьев Коссера [24], уравнения Пуанкаре – Четаева распространяются на случай континуума. В разд. 3 эти уравнения применяются к важному случаю СМГТ – гибкому манипулятору с разомкнутым контуром.

1. Обозначения и основные определения. Вкратце напомним определения следующих средств дифференциальной геометрии (ср. [23], приложение 2), которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть G – n-мерная группа Ли преобразований $R^3 \mapsto R^3$ с единицей e. Движение материальной системы в конфигурационном пространстве G определяется отображением g: $t \in R^+ \mapsto g(t) \in G$. В пространстве R^3, где осуществляется движение, определено множество преобразованных конфигураций $\Sigma(t) = g(t)\Sigma_0 \in R^3$, $t \in R^+$, где $\Sigma_0 \in R^3$ – исходная конфигурация системы, именуемая также "материальное пространство". Алгебра Ли группы G обозначена $\mathfrak{g}$ и определена как оснащенное скобкой Ли [,] пространство T_eG, касательное к G в единице e. Введем на G внутреннее произведение $\langle\, ,\rangle$ и определим $\mathfrak{g}^*$ как векторное пространство 1-форм на G.

Обозначим: L_g – левый и R_g – правый сдвиги на G, а L_{g*} и R_{g*} – индуцированные ими отображения касательных пространств. Сдвиги L_g и R_g с помощью внутреннего произведения индуцируют кокасательные отображения L_g^* и R_g^*, двойственные отображениям L_{g*} и R_{g*} соответственно. Дифференцирование группового автоморфизма Ad_g: $h \in \in G \mapsto R_{g^{-1}}(L_g(h))$ в точке $h = e$ дает отображение действия Ad_{g*} группы G на $\mathfrak{g}$. Тогда дифференцирование Ad_{g*} по g в $g = e$ определяет присоединенное отображение $\mathrm{ad}_{(\cdot)*}$ отображения $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$. С помощью двойственности отображение $\mathrm{ad}_{(\cdot)*}$ определяет коприсоединенное отображение $\mathrm{ad}^*_{(\cdot)*}: \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$. Левоинвариантное (соответственно правоинвариантное) поле на G представляет собой векторное поле, инвариантное по отношению к L_{g*} (соответственно R_{g*}).

Векторное пространство левоинвариантных (соответственно правоинвариантных) векторных полей на группе G, оснащенное скобкой Пуассона векторных полей [,], реализует другое определение пространства $\mathfrak{g}$. За счет двойственности векторное пространство левоинвариантных (соответственно, правоинвариантных) 1-форм на группе G реализует другое определение пространства $\mathfrak{g}^*$. Пространство действия $\mathfrak{g} \cong (T_eG, [\ ,\ ])$ идентично пространству бесконечно малых преобразований, примененных к исходной конфигурации Σ_0 ("правых", или "материальных" преобразований), или к текущей конфигурации $\Sigma(t)$ ("левых", или "пространственных" преобразований). Альтернативно пространство левоинвариантных (соответственно правоинвариантных) полей реализует другое определение материальных (соответственно пространственных) бесконечно малых преобразований.

Выписать уравнения динамики материальной системы в терминах бесконечно малых материальных (соответственно пространственных) преобразований означает описать динамику в "материальном (соответственно пространственном) подходе". Последующие вычисления выполнены "в координатах", как и в оригинальных работах Пуанкаре и Четаева. Соглашение о суммировании по повторяющимся индексам принято всюду, кроме случаев, оговоренных в конце разд. 2. Наконец, будем употреблять иногда условные обозначения $f(x_1, \ldots, x_k) = f(x_l)$ $(l = 1, \ldots, k)$ для любой функции f, вектора x и целого числа k.

2. Уравнения Пуанкаре – Четаева для среды Коссера. Среда Коссера представляет собой континуум микротел, например поперечных сечений балки, поперечных твердых материальных линий оболочки или зерен в микрополярном континууме [25], поэтому пространственные конфигурации среды могут быть описаны действием n-мерной группы G (в типичном случае – SE(3) или SO(3)) на элементарное твердое микротело в каждой точке подмногообразия D исходной конфигурации среды (линии отсчета для балки, мембраны отсчета для оболочки). В отличие от конечномерного случая, изученного Пуанкаре [1], преобразования из группы параметризованы не только временем, но и материальными координатами X^I $(I = 1, \ldots, p, p \le 3)$ в пространстве D. Пространство параметров (нужно быть осторожным, так как эти параметры не являются групповыми) обозначим $P = R^+ \times D$, где R^+ – ось времени. Обозначим через x произвольно выбранную точку P с координатами

$$(x^i)_{i = 0, \ldots, p} = (t, X^I)_{I = 1, \ldots, p} = (t, X)$$

Для того чтобы выписать уравнения Пуанкаре для среды Коссера, будет применен принцип Гамильтона к полю лагранжианов вида

$$\mathcal{L}\colon P \mapsto \bigwedge^p(T^*D), \quad x \mapsto \mathcal{L}(q(x), \eta_i)dV, \quad i = 0, \ldots, p \tag{2.1}$$

Здесь $\mathcal{L}$ – плотность лагранжиана на пространстве D, T^*D – i – кокасательный пучок к пространству D, $\bigwedge$ – внешнее произведение, dV – объем p-формы в пространстве D, $q(x)$ – вектор групповых параметров текущего преобразования в точке X, примененного к микротелу. Далее, пусть $\eta_i(x)$ – текущее допускаемое телом бесконечно малое преобразование, т.е рассмотренное в базисе пространства $\mathfrak{g}$ преобразование сдвига вдоль i-й координатной линии P, проходящей через точку X.

В дальнейшем в первую очередь сосредоточимся на материальном подходе, так как он представляет наибольший интерес с точки зрения механики. В рамках этого подхода величинам $\eta_i(x)$ даются две интерпретации, зависящие от принимаемого определения пространства $\mathfrak{g}$. Если это пространство определить как $(T_eG, [\ ,\ ])$, то

$$\eta_i(x) = L_{g(x)^{-1}*}(\partial_{x^i} g(x)) = \eta_i^\alpha(x)e_\alpha \tag{2.2}$$

Здесь и всюду далее e_α – базис бесконечно малых материальных преобразований, т.е преобразований, действующих на материальные частицы; если не оговорено иное,

$i = 0,\dots, p$; $I = 1, \dots, p$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$. С другой стороны, если определить алгебру Ли как пространство левоинвариантных полей, оснащенных скобкой Пуассона, то величины η_i^α определяются соотношениями

$$\eta_i(x) = \partial_{x^i} g(x) = \eta_i^\alpha(x) X_{\alpha, g(x)} \tag{2.3}$$

где (X_α: $g \mapsto X_{\alpha, g} = L_{g*}(e_\alpha)$, $g \in G$) – базис левоинвариантных векторов на группе G, причем базовая точка на G соответствует индексу базиса. На самом деле простой анализ отличий выражений (2.2) от выражений (2.3) показывает, что множество этих векторных полей на P реализует единственное поле 1-форм на P со значениями в соответствующей группе алгебре Ли η: $P \mapsto \mathfrak{g} \otimes T^*P$ [24], где $\otimes$ означает тензорное произведение. Например, если принять $(T_eG, [\ ,\ ])$ в качестве определения алгебры Ли, то это векторное поле, имеющее вид

$$\eta(x) = (L_{g^{-1}*}(\partial_{x^i} g))(x) dx^i = \eta_i^\alpha(x) e_\alpha \otimes dx^i \tag{2.4}$$

определит примененное слева к $g(x)$ бесконечно малое преобразование, осуществляемое за счет сдвига из произвольной точки x в точку $x + dx$ в пространстве P. С другой стороны, принимая левоинвариантные векторные поля в качестве определения алгебры Ли, это поле 1-форм можно представить в виде соотношения

$$\eta(x) = (\partial_{x^i} g)(x) dx^i = \eta_i^\alpha(x) X_{\alpha, g(x)} \otimes dx^i \tag{2.5}$$

доставляющего замену $g(x)$ в поле левоинвариантного базиса, накрывающего группу G, при переходе от x к $x + dx$ на P.

Для того чтобы применить принцип Гамильтона к плотности лагранжиана вида (2.1), нужно вывести формулу, играющую ключевую роль в вариационном исчислении на некоммутативных группах Ли. Это соотношение – следствие того факта, что вариация δ осуществляется в фиксированный момент времени и при фиксированных материальных параметрах. Для обоснования этого результата прежде всего заметим, что вариация функции f из $C^\infty(G)$ в точке $g(x)$ имеет вид

$$\delta f(g(x)) = \delta g(x) f = \Omega^\alpha(x) X_{\alpha, g(x)} f \tag{2.6}$$

где $\Omega^\alpha(x)$ – компоненты виртуальных бесконечно малых преобразований в базисе левоинвариантных полей. С другой стороны, производная любой функции f по параметру τ пространственно-временной кривой $\boldsymbol{\gamma}$: $\tau \in R \mapsto \boldsymbol{\gamma}(\tau) \in P$, проходящей через точку x, имеет вид

$$\frac{df(g(x))}{d\tau} = \frac{dg(x)}{d\tau} f = (\eta_i^\alpha(x) X_{\alpha, g(x)} \otimes dx^i)(f, \xi_x) = \eta_i^\alpha(x) \xi^i(x) X_{\alpha, g(x)} f \tag{2.7}$$

где $\xi_x = \xi^i(x) \partial_{x^i}$ – касательный вектор к кривой $\boldsymbol{\gamma}$ в точке x. Более того, заметим, что, в частности, при выполнении условия $\tau = x^j$ выполнено соотношение $\xi_x = \partial_{x^i}$ и выражение (2.7) принимает вид

$$\partial_{x^j} f(g(x)) = (\partial_{x^j} g(x)) \cdot f = (\eta_i^\alpha(x) X_{\alpha, g(x)} \otimes dx^i)(f, \partial_{x^j}) = \eta_j^\alpha(x) X_{\alpha, g(x)} f \tag{2.8}$$

поэтому для варьирования при фиксированном времени и фиксированном положении среды

$$\frac{d}{d\tau}\delta f - \delta\frac{df}{d\tau} = 0 \tag{2.9}$$

для любой функции f из класса $C^\infty(G)$ и для любой кривой $\boldsymbol{\gamma}$, проходящей через точку x.

Подставляя выражения (2.6) и (2.7) в равенство (2.9) при g, эквивалентном x, находим

$$\frac{d}{d\tau}\delta f - \delta\frac{df}{d\tau} = \eta_i^\alpha\xi^i X_{\alpha,g}(\Omega^\beta X_{\beta,g}f) - \Omega^\beta X_{\beta,g}(\eta_i^\alpha\xi^i X_{\alpha,g}f) = 0$$

Так как это соотношение должно быть выполнено для любой кривой $\boldsymbol{\gamma}$, т.е. для любого множества ξ^i, условие фиксированности параметров может быть переписано как

$$\begin{gathered}\eta_i^\alpha(X_{\alpha,g}\Omega^\beta)(X_{\beta,g}f) + \eta_i^\alpha\Omega^\beta X_{\alpha,g}(X_{\beta,g}f) - \\ -\Omega^\beta(X_{\beta,g}\eta_i^\alpha)(X_{\alpha,g}f) - \Omega^\beta\eta_i^\alpha X_{\beta,g}(X_{\alpha,g}f) = 0,\ \ \forall f\in C^\infty(G)\end{gathered} \tag{2.10}$$

С помощью соотношений (2.6) и (2.8) можно найти в левой части равенства (2.10) как слагаемые $\Omega^\beta(X_{\beta,g}\eta_i^\alpha) = \delta\eta_i^\alpha$ и $\eta_j^\alpha(X_{\alpha,g}\Omega^\beta) = \partial_{x^j}\Omega^\beta$, так и скобку Пуассона левоинвариантных базисных векторов $[X_\alpha, X_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ со структурными постоянными $c_{\alpha\beta}^\gamma$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В итоге имеют место следующие соотношения:

$$\delta\eta_i^\alpha = \partial_{x^i}\Omega^\alpha + c_{\beta\gamma}^\alpha\eta_i^\beta\Omega^\gamma \tag{2.11}$$

Уравнения (2.11) обобщают соответствующую однопараметрическую формулу [1].

Точно так же условие фиксированности параметров, выраженное в правоинвариантном базисе, может быть записано как

$$\delta\mu_i^\alpha = \partial_{x^i}\Omega^\alpha - c_{\beta\gamma}^\alpha\mu_i^\beta\Omega^\gamma \tag{2.12}$$

где структурные постоянные в правоинвариантном базисе Z_α: $g \mapsto Z_{\alpha,g} = R_{g*}(e_\alpha)$, $g \in G$ противоположны постоянным в левоинвариантном базисе [22].

Прежде чем применить принцип Гамильтона, надо выполнить моделирование полей внешних усилий, приложенных к среде. Геометрически результирующая текущих сил, приложенных к микротелу в точке X при конфигурации $g(x)$, является элементом пространства $\mathfrak{g}^*$. Поэтому определим два поля внешних форм со значениями в двойственном пространстве алгебры Ли – поле внешних усилий, приложенных внутри среды, имеющее вид

$$\bar{F}\colon R^+\times D^0 \mapsto \mathfrak{g}^*\otimes\bigwedge^p(T^*D^0),\quad (t,X)\mapsto\bar{F} = \bar{\mathcal{F}}(x,g(x))\omega_{g(x)}^\alpha\otimes dV \tag{2.13}$$

и поле приложенных на границе среды текущих внешних усилий, имеющее вид

$$\tilde{F}\colon R^+\times\partial D \mapsto \mathfrak{g}^*\otimes\bigwedge^p(T^*\partial D),\quad (t,X)\mapsto\tilde{F} = \tilde{\mathcal{F}}(x,g(x))\omega_{g(x)}^\alpha\otimes dS \tag{2.14}$$

где ω^α: $\mathfrak{g} \mapsto \omega_g^\alpha$, $g \in G$ – базис левоинвариантных 1-форм, двойственный базису X_α, и dS – поверхностная $(p-1)$-форма на границе ∂D.

Далее будут использоваться следующие обозначения интегралов:

$$\int(\cdot)dt = \int_{t_1}^{t_2}(\cdot)dt, \quad \int(\cdot)dV = \int_D(\cdot)dV, \quad \int(\cdot)dS = \int_{\partial D}(\cdot)dS$$

Выпишем теперь модифицированный принцип Гамильтона

$$\delta A = \delta\int\int\mathcal{L}(\eta_i^\alpha, q^\beta)dVdt = \int\delta W_{\text{ext}}dt, \ \forall\delta g; \quad \delta W_{\text{ext}} = \int\bar{\mathcal{F}}_\alpha\Omega^\alpha dV + \int\tilde{\mathcal{F}}_\alpha\Omega^\alpha dS \tag{2.15}$$

где A – действие по Лагранжу, а δW_{ext} – виртуальная работа приложенных к среде внешних усилий.

Приступая к вариации действия, имеем

$$\delta A = \delta\int\int\mathcal{L}(\eta_i^\alpha, q^\beta)dVdt = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i^\alpha}\delta\eta_i^\alpha dVdt, \quad I_2 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\beta}\delta q^\beta dVdt$$

и в силу ограничений (2.11)

$$I_1 = I_{11} + I_{12}, \quad I_{11} = \int\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i^\alpha}\partial_{x^i}\Omega^\alpha dVdt, \quad I_{12} = \int\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i^\alpha}c^\alpha_{\beta\gamma}\eta_i^\beta\Omega^\gamma dVdt \tag{2.16}$$

Так как

$$I_{11} = \int\int\left[\partial_t\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_0^\alpha}\Omega^\alpha\right) + \partial_{x^I}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_I^\alpha}\Omega^\alpha\right)\right]dVdt$$

то соотношения

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i^\alpha}\partial_{x^i}\Omega^\alpha = \partial_{x^i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i^\alpha}\Omega^\alpha\right) - \partial_{x^i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i^\alpha}\right)\Omega^\alpha \tag{2.17}$$

интегрирование по частям по времени и учет того, что вариация $\delta g(x) = \Omega^\alpha X_{\alpha,\, g(x)}$ обращается в нуль на концах промежутка времени, дают

$$I_{11} = \int\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_I^\alpha}\Omega^\alpha N_I dSdt \tag{2.18}$$

где N_I – I-я компонента единичной нормали к границе ∂D.

В силу соотношения (2.6)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\beta}\delta q^\beta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\beta}\Omega^\alpha X_{\alpha,\, g}(q^\beta)$$

и справедливо равенство

$$I_2 = \int\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^\beta}\Omega^\alpha X_{\alpha,\, g}(q^\beta)dVdt \tag{2.19}$$

Тогда в силу соотношений (2.17) – (2.19) модифицированный принцип Гамильтона (2.15) принимает вид

$$0 = \int\left(\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_I^\alpha}N_I - \tilde{\mathcal{F}}_\alpha\right)\Omega^\alpha dS + \right.$$

$$\left. + \int\left(-\partial_{x^i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i^\alpha} + c^\gamma_{\beta\alpha}\eta_i^\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_i^\gamma} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_\beta}X_{\alpha,\, g}(q^\beta) - \bar{\mathcal{F}}_\alpha\right)\Omega^\alpha dV\right)dt$$

Так как это уравнение справедливо для любой вариации, т.е для любых независимых Ω^α, имеет место

Утверждение. В пространстве $\mathfrak{g}^*$, отождествленном с пространством левоинвариантных 1-форм, полевое уравнение и соотношения на границе имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i^\alpha} - c_{\beta\alpha}^\gamma \eta_i^\beta(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i^\gamma} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\beta}X_{\alpha,\, g(x)}(q^\beta) - \bar{\mathcal{F}}(x, g(x))\right)\omega_{g(x)}^\alpha = 0,\ \ \forall x \in R^+ \times D^0 \tag{2.20}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_I^\alpha}N_I(x) - \tilde{\mathcal{F}}_\alpha(x, g(x))\right)\omega_{g(x)}^\alpha = 0,\ \ \forall x \in R^+ \times \partial D \tag{2.21}$$

Заметим, что для вычисления слагаемого (2.19) нет необходимости во введении карты параметров в пространстве G. На самом деле, используя базис бесконечно малых материальных преобразований (e_α) пространства $(T_eG, [\ ,\ ])$, имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\beta}X_{\alpha,\, g}(q_\beta) = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\eta(x), L_{g(x)}(\exp(\varepsilon e_\alpha)))\right]_{\varepsilon = 0} \tag{2.22}$$

где $\exp\colon (T_eG, [\ ,\ ]) \mapsto G$ – естественное отображение алгебры Ли в группу [23] и где плотность лагранжиана теперь является функцией преобразований, т.е. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta, g)$.

Слагаемые (2.22) отвечают за дефект симметрии функции Лагранжа в материальном подходе (ср. с замечанием 4 ниже). Теперь, если требуется выписать уравнения Пуанкаре – Четаева в пространственном подходе, поле 1-форм со значениями в алгебре Ли (2.5) заменяется на

$$\mu(x) = (\partial x^I g)(x)dx^I = \mu_i^\alpha(x)Z_{\alpha,\, g(x)} \otimes dx^i$$

Применение того же вычислительного процесса к пространственной лагранжевой плотности $\mathcal{L}(\mu, q)dV$ при учете соотношения (2.12) вместо (2.11) дает

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_i^\alpha} + c_{\beta\alpha}^\lambda \mu_i^\beta(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_i^\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\beta}Z_{\alpha,\, g(x)}(q^\beta) - \bar{\mathcal{E}}_\alpha(x, g(x))\right)\lambda_{g(x)}^\alpha = 0,\ \ \forall x \in R^+ \times D^0 \tag{2.23}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_I^\alpha}N_I(x) - \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(x, g(x))\right)\lambda_{g(x)}^\alpha = 0,\ \ \forall x \in R^+ \times \partial D \tag{2.24}$$

где $\lambda^\alpha\colon g \mapsto \lambda_g^\alpha$, $g \in G$ – базис правоинвариантных 1-форм, двойственный к Z_α, а $\bar{\mathcal{E}}_\alpha$ и $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha$ – компоненты полей форм внешних и внутренних граничных усилий в этом базисе, в общем случае зависящем от x и $g(x)$.

Наконец, за дефект симметрии функции Лагранжа в пространственном подходе отвечают слагаемые

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\beta}Z_{\alpha,\, g(x)}(q_\beta) = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\mu(x), R_{g(x)}(\exp(\varepsilon e_\alpha)))\right]_{\varepsilon = 0} \tag{2.25}$$

где $\exp(\varepsilon e_\alpha)$ применяется теперь слева к $g(x)$, так что e_α – базис бесконечно малых пространственных преобразований, т.е. преобразований, примененных к точкам пространства.

Выделим в соотношениях (2.20) и (2.23) компоненты коприсоединенного отображения $\mathrm{ad}^*_{(\cdot)}\colon \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*$ в двойственном к левоинвариантному и правоинвариантному базисам соответственно [24]. Применим к каждому из подходов (2.20), (2.21) и (2.23), (2.24) кокасательные отображения $L^*_{g(x)}$ и $R^*_{g(x)}$ соответственно. В базисе $f^\alpha = L^*_{g(x)}(\omega^\alpha_{g(x)}) = R^*_{g(x)}(\lambda^\alpha_{g(x)})$ на $\mathfrak{g}$, где алгебра $\mathfrak{g}$ теперь определена как $(T_eG, [\ ,\ ])$, динамика определяется уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \mathrm{ad}^*_{\eta_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - X_{g(x)}(\mathcal{L}) = \bar{\mathcal{F}}, \quad \forall x \in R^+ \times D^0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_I}N_I = \tilde{\mathcal{F}}, \quad \forall x \in R^+ \times \partial D \tag{2.27}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} X_{g(x)}(\mathcal{L}) = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\eta(x), L_{g(x)}(\exp(\varepsilon e_\alpha)))\right]_{\varepsilon = 0} f^\alpha \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i^\alpha}f^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_I} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_I^\alpha}f^\alpha, \quad \bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}_\alpha f^\alpha, \quad \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_\alpha f^\alpha \end{gathered} \tag{2.28}$$

Аналогично в рамках пространственного подхода

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_i} + \mathrm{ad}^*_{\mu_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - Z_{g(x)}(\mathcal{L}) = \bar{\mathcal{E}}, \quad \forall x \in R^+ \times D^0 \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_I}N_I(x) = \tilde{\mathcal{E}}, \quad \forall x \in R^+ \times \partial D \tag{2.30}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} Z_{g(x)}\mathcal{L} = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(\mu(x), R_{g(x)}(\exp(\varepsilon e_\alpha)))\right]_{\varepsilon = 0} f^\alpha \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_i^\alpha}f^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_I} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_I^\alpha}f^\alpha, \quad \bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}_\alpha f^\alpha, \quad \tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_\alpha f^\alpha \end{gathered} \tag{2.31}$$

Заметим, что в соотношениях (2.26), (2.27) базис f_α является двойственным базисом к бесконечно малым материальным преобразованиям, в то время как в (2.29), (2.30) – это двойственный базис к бесконечно малым пространственным преобразованиям.

Замечание 1. Даже если система непрерывна и в некотором смысле бесконечномерна, группа, примененная в приведенной выше конструкции, конечна, но параметризована материальным многообразием D (будем говорить, что группа измерена на D [24]). Этим рассматриваемая система радикальным образом отличается от систем, рассматриваемых в гидромеханике, где конфигурационное пространство – бесконечномерная группа [26]. Фактически конфигурационное пространство среды Коссера – множество $\mathcal{C} = \{g: D \mapsto G\}$.

Замечание 2. Сравнивая соотношения (2.20), (2.21) и (2.26), (2.27) (соответственно (2.23), (2.24) и (2.29), (2.30)) заметим, что уравнения Пуанкаре – Четаева выписываются в проекциях на тот же левоинвариантный (соответственно, правоинвариантный) двойственный базис, что и двойственный базис материальных (соответственно пространственных) преобразований. Рассмотрение право- и левоинвариантных полей для определения алгебры Ли соответствует на самом деле хорошо известному методу подвижного базиса, предложенному Картаном [27] для изучения некоторых проблем интегрируемости. Эта точка зрения имеет также свой аналог в пространстве действий группы, где, как известно, материальная формулировка в компонентах аналогична пространственной в подвижном базисе, связанном с телом.

Замечание 3. Когда пространство параметров P редуцируется на ось времени R^+, уравнения в частных производных (2.26), (2.27) и (2.29), (2.30) вырождаются в классические обыкновенные дифференциальные уравнения Пуанкаре – Четаева [1].

Утверждение. Конечномерные уравнения Пуанкаре – Четаева в материальной формулировке имеют вид

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_0} - \mathrm{ad}^*_{\eta_0}\frac{\partial L}{\partial \eta_0} - X_{g(t)}(L) = F, \ \ \forall t \in R^+ \\ X_{g(t)}(L) = [L(\eta_0, L_{g(t)}(\exp(\varepsilon e_\alpha)))]_{\varepsilon=0} f^\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_0} = \frac{\partial L}{\partial \eta_0^\alpha} f^\alpha \end{gathered} \tag{2.32}$$

Конечномерные уравнения Пуанкаре – Четаева в пространственной формулировке имеют вид, аналогичный (2.32):

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mu_0} + \mathrm{ad}^*_{\mu_0}\frac{\partial L}{\partial \eta_0} - Z_{g(t)}(L) = E, \ \ \forall t \in R^+ \\ Z_{g(t)}(L) = [L(\mu_0, R_{g(t)}(\exp(\varepsilon e_\alpha)))]_{\varepsilon=0} f^\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu_0} = \frac{\partial L}{\partial \mu_0^\alpha} f^\alpha \end{gathered} \tag{2.33}$$

Здесь $L = L(\eta_0, g)$ ($L = L(\mu_0, g)$) – функция Лагранжа системы в материальной (пространственной) формулировке, $F = F_\alpha(t, g)f^\alpha$ ($E = E_\alpha(t, g)f^\alpha$) – 1-форма внешних материальных (пространственных) усилий, приложенных к системе.

Замечание 4. Изучаемые уравнения были обобщены и связаны с некоторыми системами уравнений аналитической динамики В.В. Румянцевым [20] в случае, когда алгебра Ли инвариантных полей заменена на произвольно замкнутую систему бесконечно малых линейных операторов X_α. В этом случае остаются справедливыми уравнения Пуанкаре – Четаева, в которых структурные постоянные алгебры Ли заменены переменными коэффициентами $c^\lambda_{\beta\alpha}$.

Замечание 5. Эти уравнения особенно интересны, когда лагранжиан и плотность внешних сил не зависят от конфигурации $g(x)$. Этот случай широко изучался [23, 22]. Он относится к теории лагранжевой редукции. В данном контексте, если функция Лагранжа системы, а, в рассматриваемом здесь случае, – и внешние силы, инвариантны относительно левых преобразований (для твердого тела) или правых преобразований (для несжимаемой жидкости), то, единожды выраженная на своей алгебре Ли, она становится не зависящей от конфигурации. Результирующие динамические уравнения имеют вид (2.26), (2.27) или (2.29), (2.30), в которые больше не входят слагаемые дефекта симметрии (2.22) (соответственно (2.25)) и, кроме того, компоненты сил (2.13) и (2.14) (и соответственно их пространственные аналоги) не зависят от конфигурации. В современной терминологии динамика сводится к динамике на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы симметрий системы. Эти уравнения, таким образом, представляют собой уравнения в частных производных в терминах лишь скоростей η_0 или μ_0 (для эйлеровой формулировки). Следовательно, их можно сначала интегрировать по времени и лишь на втором шаге, благодаря уравнениям

$$\partial_t g((x)) = L_{g(x)*}(\eta_0(x)) \quad \text{или} \quad \partial_t g(x) = R_{g(x)*}(\mu_0(x))$$

можно восстановить движение среды.

Замечание 6. Если группа G коммутативна, то

$$X_\alpha = Z_\alpha, \quad [X_\alpha, X_\beta] = [Z_\alpha, Z_\beta] = 0$$

Следовательно, поле локальных базисов (X_α) выводится из множества q^α координатных функций из класса $C^\infty(G)$ и удовлетворяет соотношениям

$$X_\alpha = \partial_{g^\alpha}, \quad \omega^\alpha = dq^\alpha$$

Как результат имеем $\eta^\alpha = \dot{q}^\alpha$ и скорости оказываются интегрируемыми, т.е. голономными. В последнем случае уравнения Пуанкаре – Четаева (2.32) и (2.33) вырождаются в единственную систему уравнений Лагранжа

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\right)dq^\alpha = 0$$

3. Приложения к системам многих гибких тел. Чтобы продемонстрировать приложение уравнений Пуанкаре – Четаева к системам многих гибких тел, рассмотрим специальный случай гибкого манипулятора. Покажем, как эти уравнения позволяют выписать геометрически точные уравнения в галилеевой системе отсчета и обобщенные уравнения Ньютона – Эйлера в плавающей системе отсчета. Обобщения на другие виды топологии систем многих тел осуществляются непосредственно.

Уравнения в частных производных гибкого манипулятора в галилеевой системе отсчета. *Основы кинематики тела.* В рамках данного подхода каждое тело, входящее в систему, моделируется в соответствии с нелинейной теорией балок Рейсснера [15]. В дальнейшем рассмотрим случай прямолинейной балки начальной длины L с постоянным поперечным сечением. Пусть Σ_0 – исходная конфигурация балки. Ее точки – материальные частицы, положения которых $X = X^iE_i$ в связанной с исходной конфигурацией системы Σ_0 материальной системе отсчета (O, E_1, E_2, E_3), такой, что E_1 – материальная линия балки. В пространственной системе координат (O, e_1, e_2, e_3), взятой практически совпадающей с материальной, текущее положение частицы X задается в виде

$$x(X, t) = x^i(t, X^I)e_i$$

В теории Рейсснера поперечные сечения балки предполагаются твердыми, поэтому они реализуют микротела одномерной среды Коссера. Таким образом, согласно общей конструкции, предложенной в разд. 2, пространство параметров здесь $P = R^+ \times [0, L]$. Текущее трехмерное поле положений балки определяется действием преобразования φ_t: $\Sigma_0 \mapsto R^3$, параметризованного временем и определенного как

$$\begin{gathered} x(t, X) = \varphi_t(X) = X^1e_1 + d(t, X^1) + R(t, X^1)(X^2E_2 + X^3E_3) \\ \forall X = (X^1, X^2, X^3) \in \Sigma_0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $d(t, X^1)$ – текущая трансляция, примененная к центру масс поперечного сечения X^1, а $R(t, X^1)$ – поворот этого же поперечного сечения.

Преобразование (3.1) может быть переписано в рамках однородного формализма как

$$\left\| \begin{matrix} x(t, X) \\ 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} R(t, X^1) & d(t, X^1)X^1e_1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right\| = g(t, X^1)\left\| \begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right\| \tag{3.2}$$

где однородные матрицы g размером 4×4 реализуют SE(3) – группу евклидовых перемещений в трехмерном пространстве R^3. Таким образом, конфигурационное пространство балки реализуется как

$$\mathscr{C} = \{g\colon [0, L] \mapsto \mathrm{SE}(3)\}$$

(см. замечание 1). Кроме того, поле g действует на подмножестве множества

$$\Sigma_0\colon \mathscr{V} = \{r = X^2E_2 + X^3E_3/(X^IE_I \in \Sigma_0)\}$$

которое играет роль “типичного” микротела. Алгебра Ли группы SE(3), обозначенная se(3), здесь отождествлена с пространством винтов R^6, оснащенным произведением, обозначенным звездочкой, таким, что

$$\eta * \eta' = \left\| \begin{matrix} \Omega \\ V \end{matrix} \right\| * \left\| \begin{matrix} \Omega' \\ V' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Omega \times \Omega' \\ \Omega \times V' - \Omega' \times V \end{matrix} \right\|, \ \forall \eta, \eta' \in R^6 \tag{3.3}$$

В соответствии с материальным подходом алгебра se(3) отождествляется здесь с бесконечно малыми материальными твердыми перемещениями с базисом

$$\left\| \left\| \begin{matrix} E_I \\ 0 \end{matrix} \right\|_{I = 1, 2, 3}, \left\| \begin{matrix} 0 \\ E_I \end{matrix} \right\|_{I = 1, 2, 3} \right\| = (e_\alpha)_{\alpha = 1, \ldots, 6} \tag{3.4}$$

и полем 1-форм со значениями в алгебре Ли (2.4)

$$\eta\colon R^+ \times [0, L] \mapsto \mathrm{se}(3) \otimes T^*(R^+ \times [0, L])$$

$$\eta(t, X^1) = \eta_0 \otimes dt + \eta_1 \otimes dX^1 = \left\| \begin{matrix} \Omega(t, X^1) \\ V(t, X^1) \end{matrix} \right\| \otimes dt + \left\| \begin{matrix} K(t, X^1) \\ \Gamma(t, X^1) \end{matrix} \right\| \otimes dX^1 \tag{3.5}$$

где η_0 и η_1 – винты, ассоциированные с изоморфизмом между se(3) и R^6 в $g^{-1}\partial_t g$ и $g^{-1}\partial_{X^1} g$ соответственно. Интуитивно ясно, что $\eta_0(t, X^1)$ – материальное бесконечно малое преобразование, допускающее переход от подвижных осей, связанных с поперечным сечением X^1 в момент t, к подвижным осям в момент $t + dt$. В то же время $\eta_1(t, X^1)$ – бесконечно малое преобразование, позволяющее в фиксированный момент времени t перейти от подвижных осей, связанных с сечением X^1 к подвижным осям, связанным с сечением $X^1 + dX^1$. Двойственное пространство алгебры Ли se(3)* отождествлено с пространством динамических винтов, изоморфным R^6, двойственному произведению винтов и динамических винтов, сводящемуся к двойственному произведению в R^6. Если

$$\eta = \left\| \begin{matrix} \Omega \\ V \end{matrix} \right\|, \quad \lambda = \left\| \begin{matrix} \Lambda \\ W \end{matrix} \right\|$$

– произвольные векторы из se(3) и его двойственного пространства соответственно, то коприсоединенное действие η на λ определяется как [22]

$$\mathrm{ad}^*_\eta(\lambda) = \left\| \begin{matrix} \Lambda \times \Omega + W \times V \\ W \times \Omega \end{matrix} \right\| \tag{3.6}$$

Мера деформаций тела. Определим теперь меру деформаций тела, принятую в теории Рейсснера. Имеются два поля деформаций балки [2]: 1) поле векторов материальных деформаций, которое обозначим ε и которое определяется как

$$(t, X^1) \in R^+ \times [0, L] \mapsto \varepsilon(t, X^1) = R^T \partial_{X^1} \varphi_t(X^1, 0, 0) - E_1 = \Gamma(t, X_1) - E_1 \qquad (3.7)$$

где компонента вектора вдоль E_1 представляет собой меру растяжения балки, в то время как две другие относятся к поперечному сдвигу; 2) поле материальной кривизны

$$(t, X^1) \in R^+ \times [0, L] \mapsto R^T \partial_{X^1} R = \hat{K}(t, X_1) \qquad (3.8)$$

материальный тензор которого был уже введен вторым равенством (3.5) через поле псевдовектора K, связанного с $\hat{K}$ с помощью естественного изоморфизма $so(3) \mapsto R^3$ (это понятие в дальнейшем будет систематически применяться).

Лагранжиан тела. Теперь запишем поле скоростей как

$$\partial_t \varphi_t(X) = \partial_t d + (\partial_t R) r$$

Полагая, что направляющая балки проходит через центры масс поперечных сечений, представим выражение для кинетической энергии в виде

$$2T = \int\limits_{\Sigma_0} (\partial_t \varphi_t)^2 dm = \rho A \int\limits_0^L [(\partial_t d)^T \partial_t d + ((\partial_t R) r)^T (\partial_t R) r dX^1]$$

где A – площадь поперечного сечения. Тогда, вводя вектор η_0: $\eta_0^T = (\Omega^T, V^T)$, выражение для кинетической энергии можно переписать как

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_0^L \rho \eta_0^T \mathbf{J} \eta_0 dX^1 = \int\limits_0^L \mathcal{T}(\eta_0) dX^1, \quad \mathbf{J} = \left\| \begin{matrix} J & 0 \\ 0 & J \end{matrix} \right\| \qquad (3.9)$$

где $\mathcal{T}$ – плотность кинетической энергии, ρJ – материальный тензор инерции поперечного сечения

$$\rho J = \rho \iint\limits_A \hat{r}^T \hat{r} dX^2 dX^3 = \rho I_p \mathscr{E}_1 + \rho I_a \mathscr{E}_2 + \rho I_a \mathscr{E}_3; \quad \mathscr{E}_k = E_k \times E_k, \quad k = 1, 2, 3$$

Здесь I_a и I_p – осевой и полярный моменты инерции типичного поперечного сечения.

Рассматривая случай упругого материала при малых деформациях и вводя вектор η_1: $\eta_1^T = (K^T, (\Gamma - E_1)^T)$, энергию деформаций можно приблизить квадратичным потенциалом мер деформации (3.7) и (3.8)

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_0^L \eta_1^T \mathbf{H} \eta_1 dX^1 = \int\limits_0^L \mathcal{U}(\eta_1) dX^1, \quad \mathbf{H} = \left\| \begin{matrix} H_r & 0 \\ 0 & H_d \end{matrix} \right\| \qquad (3.10)$$

где $\mathcal{U}$ – плотность энергии деформаций, H_d и H_r – редуцированные тензоры Гука для балки в материальной системе отсчета

$$H_d = EA\mathscr{E}_1 + GA\mathscr{E}_2 + GA\mathscr{E}_3, \quad H_r = GI_p\mathscr{E}_1 + EI_a\mathscr{E}_2 + EI_a\mathscr{E}_3$$

E – модуль Юнга, G – модуль кручения. Окончательно плотность лагранжиана принимает вид

$$\mathcal{L}(\eta_0, \eta_1) = \mathcal{T}(\eta_0) - \mathcal{U}(\eta_1) \qquad (3.11)$$

и больше не зависит от конфигурации балки, т.е. левоинвариантна. Это неудивительно, так как левая инвариантность упругого потенциала соответствует принципу независимости от выбора системы координат, в то время как правая инвариантность относится к изотропии упругих свойств среды. С другой стороны, левая инвариантность кинетической энергии соответствует изотропии пространства, в то время как правая инвариантность – изотропии инертных свойств материала.

Уравнения Пуанкаре – Четаева для тела. Полевые уравнения. Звено подвержено действию левоинвариантных внешних сопутствующих сил и моментов

$$(t, X^1) \mapsto \bar{F} = \bar{\mathcal{F}} dX^1 = \begin{Vmatrix} \bar{m}(t, X^1) \\ \bar{n}(t, X^1) \end{Vmatrix} dX^1 \tag{3.12}$$

и левоинвариантных сопутствующих сил и моментов, приложенных в его крайних точках,

$$X^1 = 0: t \mapsto \tilde{F}_-(t) = \begin{Vmatrix} \tilde{M}_-(t) \\ \tilde{N}_-(t) \end{Vmatrix}; \quad X^1 = L: t \mapsto \tilde{F}_+(t) = \begin{Vmatrix} \tilde{M}_+(t) \\ \tilde{N}_+(t) \end{Vmatrix} \tag{3.13}$$

Рассматривая уравнения (2.26), (2.27) при $x^0 = t$ и $x^1 = X^1$, можно вывести уравнения Пуанкаре – Четаева для свободной одномерной среды Коссера с плотностью лагранжиана вида (3.11)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta_0} - \mathrm{ad}^*_{\eta_0}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta_0} - \frac{\partial}{\partial X^1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_1} + \mathrm{ad}^*_{\eta_1}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta_1} = \bar{\mathcal{F}} \tag{3.14}$$

Применение коприсоединенных отображений $\mathrm{ad}^*_{\eta_0}$ и $\mathrm{ad}^*_{\eta_1}$, определяемых соотношениями (3.6), к кинетической энергии $\mathcal{T}$ и потенциальной энергии $\mathcal{U}$ для любых $(t, X^1) \in R^+ \times]0, L[$ соответственно дает

$$\begin{Vmatrix} \rho J(\partial_t \Omega + \Omega \times J\Omega) \\ \rho A(\partial_t V + \Omega \times V) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \partial_{X^1} M + K \times M + (R^T \partial_{X^1} \phi) \times N + \bar{m} \\ \partial_{X^1} N + K \times N + \bar{n} \end{Vmatrix} \tag{3.15}$$

Здесь введены поле положений линии балки $\varphi_t(X^1, 0, 0) = \phi(t, X^1)$, а также сила и момент внутренних сил, приложенных к поперечному сечению X^1,

$$\begin{Vmatrix} H_r K \\ H_d \varepsilon \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M \\ N \end{Vmatrix} = \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}\right)^T, \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma}\right)^T\right) \tag{3.16}$$

где M – момент поля внутренних сил, приложенных к поперечному сечению и вычисленных в центре масс этого сечения, N – результирующая сила.

Уравнения на границе. Применение общих уравнений (2.27) с $N_1(0) = -1$ и $N_1(L) = 1$ дает

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(t, 0) = -\tilde{F}_-(t), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(t, L) = \tilde{F}_+(t), \quad t \in R^+$$

Наконец, в силу равенства (3.15)

$$\begin{Vmatrix} M(t, 0) \\ N(t, 0) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M_-(t) \\ N_-(t) \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} M(t, L) \\ N(t, L) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M_-(t) \\ N_-(t) \end{Vmatrix}, \quad t \in R^+ \tag{3.17}$$

Уравнения (3.15)–(3.17) – это уравнения в частных производных Рейсснера [15]. Их можно интегрировать как тензорные уравнения в материальном пространстве или, альтернативно, как уравнения в терминах компонент в поле подвижных осей $(R(t, X^1)E_1$, $R(t, X^1)E_2$, $R(t, X^1)E_3)$. Для интегрирования этих уравнений их необходимо замкнуть с помощью закона Гука, уравнений $\partial_t R = R\hat{\Omega}$, $\partial_t \phi = RV$, позволяющих восстановить изменение конфигурации, и определений мер деформации.

Замечание. Уравнения Рейсснера были записаны [15] в пространственной постановке и были выведены с помощью применения уравнений Пуанкаре – Четаева (2.29), (2.30) к пространственному лагранжиану, зависящему также и от конфигурации. В этом случае для получения правильного результата необходимо вычислить дефект симметрии $Z_{g(x)}(L)$.

Уравнения в частных производных гибкого манипулятора. Рассмотрим специальный случай движения манипулятора в невесомости. Манипулятор состоит из p звеньев, обозначенных (от базы до конечной точки) как $B_0, B_1, \ldots, B_p$. База B_0 предполагается твердой и фиксированной, в то время как остальные звенья моделируются балками Рейсснера. Звенья связаны цилиндрическими шарнирами, обозначенными (от базы до конечного шарнира) как $a_1, a_2, \ldots, a_p$. К шарнирам приложены моменты τ_j, действующие на соответствующие звенья a_j (здесь и всюду далее, если не оговорено иное, $j = 1, 2, \ldots, p$); предполагается, что эти моменты сосредоточены в точках. Все принятые обозначения сохраняются и в случае одного звена с точностью до отброшенного индекса. Векторы a_j трехмерны. Определим их материальный аналог как

$$A_j(t) = R_j^T(t, L_j)a_j(t) = R_{j+1}^T(t, 0)a_j(t)$$

С помощью этих материальных векторов определим оператор $A_j^{\perp}$, проектирующий любой вектор V на пространство, перпендикулярное к A_j,

$$A_j^{\perp}: R^3 \mapsto R^2, \quad V \mapsto A_j^{\perp}V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}(V - (A_jV)V)$$

В этих обозначениях динамика манипулятора описывается системой уравнений, включающей:

полевые уравнения

$$\begin{Vmatrix} \rho_j(J_j\partial_t\Omega_j + \Omega_j \times J_j\Omega_j) \\ \rho_jA_j(\partial_t V_j + \Omega_j \times V_j) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \partial_{X^1}M_j + K_j \times M_j + (R_j^T\partial_{X^1}\phi_j) \times N_j \\ \partial_{X^1}N_j + K_j \times N_j \end{Vmatrix}, \quad X^1 \in]0, L_j[\quad (3.18)$$

уравнения для восстановления положений звеньев

$$\partial_t R_j(t, X^1) = R_j(t, X^1)\hat{\Omega}_j(t, X^1), \quad \partial_t\phi_j(t, X^1) = R_j(t, X^1)V_j(t, X^1), \quad X^1 \in [0, L_j] \quad (3.19)$$

выписанные в соответствии с произвольным исходным положением манипулятора;

уравнения для восстановления поворотов в шарнирах

$${}^jR_{j+1}(t) = R_j^T(t, L_j)R_{j+1}(t, 0), \quad {}^0R_{j+1}(t) = R_1(t, 0), \quad j = 1, \ldots, p-1 \quad (3.20)$$

граничные условия для звеньев

$$\begin{gathered} N_j(t, 0) = -\tilde{N}_j(t), \; N_j(t, L_j) = -\tilde{N}_{j+1}(t), \; M_j(t, 0) = \tilde{M}_j(t), \; M_j(t, L_j) = -\tilde{M}_{j+1}(t) \\ N_p(t, 0) = -\tilde{N}_p, \; N_p(t, L_p) = 0, \; M_p(t, 0) = -\tilde{M}_p(t), \; M_p(t, L_p) = 0 \;\; j = 1, \ldots, p-1 \end{gathered} \quad (3.21)$$

где конечная точка манипулятора предполагается свободной, $\tilde{N}_j$ и $\tilde{M}_j$ – сила и момент, действующие на звено B_j со стороны B_{j-1}; $\tilde{N}_j$ и $A_j^{\perp}\tilde{M}_j$ – векторы множителей Лагранжа, которые введены для того, чтобы были выполнены следующие условия связи:

$$\begin{gathered} V_j(t, L_j) = {}^jR_{j+1}(t)V_{j+1}(t, 0), \quad A_j^{\perp}(t)\Omega_j(t, L_j) = A_j^{\perp}(t)^jR_{j+1}(t)\Omega_{j+1}(t, 0) \\ V_1(t, 0) = 0, \quad A_1^{\perp}\Omega_1(t, 0) = 0; \quad j = 1, \ldots, p-1 \end{gathered} \tag{3.22}$$

Уравнения гибкого манипулятора в плавающих осях. *Основы кинематики звена.* В подходе, основанном на применении плавающей системы отсчета, каждое звено манипулятора рассматривается как трехмерное упругое тело, испытывающее малые деформации, накладывающиеся на конечные движения в целом. Рассмотрим типичное свободное звено в исходной конфигурации $\Sigma_0 \subset R^3$. Оснастим звено Σ_0 материальной системой координат (O, E_1, E_2, E_3). Текущую конфигурацию тела обозначим $\Sigma(t)$. Она погружена в геометрическое пространство R^3, оснащенное пространственной системой координат (O, e_1, e_2, e_3). Материальная и пространственная системы координат будут рассматриваться нераздельно.

В этом же подходе текущее преобразование φ_t, отображающее Σ_0 на $\Sigma(t)$, может быть записано как композиция двух преобразований. Первое из них – чистая деформация, отображающая Σ_0 на $\Sigma_0(t)$; оно обозначается φ_t^e. Второе, обозначаемое φ_t^r, представляет собой перемещение как твердого целого, переводящее $\Sigma_0(t)$ в $\Sigma(t)$. Таким образом, имеем последовательность преобразований

$$\varphi_t = \varphi_t^r \circ \varphi_t^e \colon \Sigma_0 \mapsto \Sigma_0(t) \mapsto \Sigma(t)$$

переводящую материальную точку X в точку пространства x по следующему правилу:

$$X(t, X) = \varphi_t(X)\varphi_t^r(\varphi_t^e(X)) \tag{3.23}$$

Как и раньше, преобразование, соответствующее перемещению точек тела как твердого целого записывается в виде

$$\varphi_t^r(X') = d_0(t) + R(t)X' \tag{3.24}$$

где X' – точка из $\Sigma_0(t)$, а d_0 – перемещение принадлежащей телу точки отсчета. Для упругих преобразований его можно записать как

$$\varphi_t^e(X) = X' = X + d(t, X) \tag{3.25}$$

где d – поле перемещений материального происхождения, отображающее положение частицы, принадлежащей исходной конфигурации, на ее образ за счет чистой деформации.

Как и раньше, множество всех преобразований как твердого целого реализует группу Ли SE(3), действующую в данном случае на текущей деформированной конфигурации $\Sigma_0(t)$. При этом φ_t^e – точка из diff(Σ_0) – пространства диффеоморфизмов R^3 в себя, ограниченных на Σ_0. Более того, плавающая система осей отождествляется с подвижной системой координат – образом материальной системы координат – посредством компоненты, доставляющей преобразование как твердого целого.

С композицией отображений (3.23) конфигурационное пространство тела образует группу

$$G = \mathrm{SE}(3)\times \mathrm{diff}(\Sigma_0)$$

Что касается пространства $\mathrm{diff}(\Sigma_0)$, то заменим его конечной группой

$$D(t, X) = \sum_{\alpha=1}^{m} \Phi_\alpha(X) q^\alpha(t) = \Phi_\alpha(X) q^\alpha(t), \;\; \forall X \in \Sigma_0 \tag{3.26}$$

именуемой модальной редукцией, где Φ_α – натуральные моды тела при определенных граничных условиях (модальные индексы обозначаются греческими буквами, индексы в пространстве R^3 – латинскими). Они представляют собой материальные векторы, т.е. $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha^K E_K$.

Такая модальная декомпозиция предполагает прежде всего, что тело подвержено малым деформациям. При этих условиях группа диффеоморфизмов $\mathrm{diff}(\Sigma_0)$ параметризована вектором модальных координат $q = (q^1, q_2^2, \ldots, q_m^m)^T$ и из геометрических соображений заменена линейным пространством R^m, т.е. коммутативной группой Ли. Тогда группа Ли $G = \mathrm{SE}(3) \times R^m$ реализует пространство конфигураций упругого тела, и два любых преобразования g и g' из этой группы G перемножаются как

$$g \circ g' = \left\| \begin{matrix} \left\| \begin{matrix} R & d \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \\ q \end{matrix} \right\| \circ \left\| \begin{matrix} \left\| \begin{matrix} R' & d' \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \\ q' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \left\| \begin{matrix} RR' & Rd' + d \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \\ q + q' \end{matrix} \right\| \tag{3.27}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G реализуется как $\mathrm{se}(3) \times R^m$, а благодаря естественному изоморфизму, ставящему в соответствие пространству $\mathrm{se}(3)$ пространство R^6 – и как пространство R^{6+m}, оснащенное произведением, обозначенным звездочкой, таким, что

$$\eta * \eta' = \left\| \begin{matrix} \Omega \\ V \\ \dot q \end{matrix} \right\| * \left\| \begin{matrix} \Omega' \\ V' \\ \dot q' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Omega \times \Omega' \\ \Omega \times V' - \Omega' \times V \\ (\dot q + \dot q') - (\dot q + \dot q') \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Omega \times \Omega' \\ \Omega \times V' - \Omega' \times V \\ 0 \end{matrix} \right\| \tag{3.28}$$

где $\eta, \eta' \in R^{6+m}$, а $\dot q = (\dot q^1, \dot q_2^2, \ldots, \dot q_m^m)^T$ – вектор модальных скоростей (точкой обозначена производная по времени). Кроме того, в соответствии с материальной постановкой задачи пространство R^{6+m} отождествляется с пространством бесконечно малых материальных преобразований базиса

$$(e_\alpha)_{\alpha = 1, \ldots, 6+m} = \left\| \left\| \begin{matrix} E_I \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|_{I=1,2,3}, \left\| \begin{matrix} 0 \\ E_I \\ 0 \end{matrix} \right\|_{I=1,2,3}, \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{q^\alpha} \end{matrix} \right\|_{\alpha=1,\ldots,m} \right\|$$

Также 1-форма со значениями в алгебре Ли (2.4) редуцируется к

$$\eta(t) = \eta_0(t)\otimes dt, \quad \eta_0(t) = \begin{Vmatrix} \Omega \\ V \\ \dot{q} \end{Vmatrix} \tag{3.29}$$

где η_0 – вектор из R^{6+m}, ассоциированный с $L_{g^{-1}*}(\dot{g})$ с помощью изоморфизма между se(3) и R^6, т.е. удовлетворяющий соотношениям $\hat{\Omega} = R^T\dot{R}$ и $V = R^T d_0$.

Двойственное к алгебре se(3) $\times R^m$ пространство se(3)* $\times R^m$ вновь оказывается пространством R^{6+m}. В нем шесть первых компонент – компоненты динамического винта в материальной системе координат, и последние m – компоненты обобщенных модальных сил. Что касается произведения двойственности, то оно редуцируется в произведение двойственности в пространстве R^{6+m}. Наконец, конрисоединенное действие любого вектора $\xi \in \mathfrak{g}$ на любой вектор λ из его двойственного пространства в силу соотношения соотношения (3.29) имеет вид

$$\mathrm{ad}_\xi^*(\lambda) = \mathrm{ad}_{\eta_0}\begin{Vmatrix} \Lambda \\ W \\ \Omega \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Lambda\times\Omega + W\times V \\ W\times\Omega \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{3.30}$$

Лагранжиан одного звена. Принимая во внимание соотношения (3.24)–(3.26), из равенства (3.23) имеем

$$\varphi_t(X) = d_0(t) + R(t)(X + \Phi_\alpha(X)q^\alpha(t))$$

поэтому поле скоростей имеет вид

$$\dot{\varphi}_t(X) = \dot{d}_0(t) + \dot{R}(t)(X + \Phi_\alpha(X)q^\alpha(t)) + R\Phi_\alpha(X)\dot{q}^\alpha(t)$$

Подставляя это выражение в выражение для кинетической энергии тела и выделяя вектор η_0 из алгебры Ли, находим

$$T = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0}\dot{\varphi}_t^T\dot{\varphi}_t dm = \frac{1}{2}mV^TV + \frac{1}{2}\Omega^TJ\Omega + \frac{1}{2}m_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + V^T(\Omega\times ms + a_\alpha\dot{q}^\alpha) + \Omega^T\beta_\alpha\dot{q}^\alpha$$

где слева направо выписаны выражения для кинетической энергии поступательного и вращательного движений, затем выражение для кинетической энергии деформаций и, наконец, смешанные слагаемые. Здесь введены тензоры (интегрирование осуществляется по точкам звена Σ_0)

$$m_{\alpha\beta} = \int\Phi_\alpha^T\Phi_\beta dm, \quad a_\alpha = \int\Phi_\alpha dm, \quad \alpha_\beta = \int X\times\Phi_\beta dm, \quad \lambda_{\alpha\beta} = \int\Phi_\alpha\times\Phi_\beta dm$$

$$m = \int dm, \quad ms = \int(X + \Phi_\alpha q^\alpha)dm, \quad \beta_\nu = \alpha_\nu + \lambda_{\gamma\nu}q^\gamma$$

$$J = \int(X + \Phi_\alpha q^\alpha)^T(X + \Phi_\beta q^\beta)dm = J_{rr} + (J_{re,\alpha} + J_{er,\alpha}^T)q^\alpha + J_{ee,\alpha\beta}q^\alpha q^\beta$$

Помимо кинетической энергии задается потенциальная энергия деформаций, определяемая как квадратичная форма модальных координат,

$$2U = K_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta = q^TKq$$

где K – матрица модальной жесткости. Окончательно лагранжиан свободного звена принимает в $\mathrm{se}(3) \times R^m$ редуцированный вид

$$L(\eta_0, q) = \frac{1}{2}\eta_0^T \mathcal{J} \eta_0, \quad -\frac{1}{2}q^T K q, \quad \mathcal{J} = \begin{Vmatrix} J & m\hat{s} & \beta \\ m\hat{s}^T & mI & a \\ \beta^T & a^T & M \end{Vmatrix} \tag{3.31}$$

где $I = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$, $M = (m_{\alpha\beta})_{\alpha,\,\beta\,=\,1,\,\ldots,\,m}$ – матрица обобщенной модальной инерции, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ и $a = (a_1, \ldots, a_m)$ – матрицы материальных векторов, $m\hat{s}$ – кососимметричный тензор, такой, что $m\hat{s}\,\upsilon = ms \times \upsilon$, $\forall \upsilon \in R^3$.

Уравнения Пуанкаре – Четаева для звена. Конечномерные уравнения Пуанкаре – Четаева (2.32) с лагранжианом (3.31), имеющие вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_0} + \mathrm{ad}^*_{\eta_0}\frac{\partial T}{\partial \eta_0} - X_g(L) = 0 \tag{3.32}$$

после некоторых вычислений можно представить как

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_0} - \mathrm{ad}^*_{\eta_0}\frac{\partial T}{\partial \eta_0} = \mathcal{J}\begin{Vmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{V} \\ \ddot{q} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \dot{J}\Omega + \Omega \times (J\Omega + \beta\dot{q}) + ms \times (\Omega \times V) \\ \Omega \times (mV + 2s\dot{q} + \Omega ms) \\ \dot{\beta}^T\Omega \end{Vmatrix}$$

Здесь учтены соотношения

$$m\dot{s} = a_\alpha \dot{q}^\alpha = aq, \quad \dot{\beta}\dot{q} = \dot{\beta}_\alpha \dot{q}^\alpha = 0$$

$$V \times (\Omega \times ms) - \Omega \times (V \times ms) = (V \times \Omega) \times ms = ms \times (\Omega \times V)$$

Теперь, так как лагранжиан (3.31) зависит от конфигурации только через деформации, выражение (2.32) для дефекта симметрии записывается в виде

$$X_g(L) = \left(0, 0, \left(\frac{d}{d\varepsilon}L(\eta, q + \varepsilon\partial_q)\right)^T_{\varepsilon = 0}\right)^T = (0, 0, (\partial_q L)^T)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{1}{2}\Omega^T(J_{re,\,\alpha} + J_{er,\,\alpha})\Omega + \frac{1}{2}q^\beta\Omega^T(J_{ee,\,\alpha\beta} + J_{ee,\,\beta\alpha})\Omega + \dot{q}^\beta\Lambda^T_{\alpha\beta}\Omega + V^T(\Omega \times a_\alpha) - K_{\alpha\beta}q^\beta$$

Замечая, что $\lambda_{\gamma\alpha} = -\lambda_{\alpha\gamma}$ и что для любой (3×3)-матрицы A

$$-\Omega^T((A^T + A)\Omega) = -(A\Omega)^T\Omega - \Omega^T(A\Omega) = -2\Omega^T A\Omega$$

дефект симметрии можно представить в виде m-мерного вектора-столбца

$$\partial_q L = \Omega^T J_{er,\,\alpha}\Omega - q^\beta\hat{\Omega}^T J_{ee,\,\alpha\beta}\Omega + 2\dot{q}^\beta\lambda^T_{\alpha\beta}\Omega + K_{\alpha\beta}q^\beta$$

При этом динамика свободного упругого тела в пространстве

$$\mathfrak{g} = \mathrm{se}(3) \times R^m \cong R^{6+m}$$

при учете соотношения (3.32) определяется уравнениями

$$\mathbf{J}\begin{Vmatrix} \dot{\Omega} \\ \gamma \\ \ddot{q} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \Omega \times J\Omega + 2J_{re,\,\alpha}\Omega\dot{q}^\alpha + 2J_{ee,\,\alpha\beta}\Omega q^\beta\dot{q}^\alpha \\ 2\Omega \times a\dot{q} + \Omega \times (\Omega \times ms) \\ \Omega^T J_{er,\,\alpha}\Omega - q^\beta\Omega^T J_{ee,\,\alpha\beta}\Omega + 2\dot{q}^\beta\lambda^T_{\alpha\beta}\Omega + K_{\alpha\beta}q^\beta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{3.33}$$

где введено материальное ускорение точки отсчета $\gamma = \dot{V} + \Omega \times V$.

Уравнения (3.33) хорошо известны специалистам в области механики многих тел в плавающих осях. Здесь они соответствуют "обобщенной модели Ньютона – Эйлера" для упругого тела [5–10]. Их можно интерпретировать как тензорные уравнения в материальном пространстве или как уравнения в терминах компонент по отношению к плавающим осям ($R(t)E_1$, $R(t)E_2$, $R(t)E_3$). Для их интегрирования нужно замкнуть уравнения (3.33) уравнением $\dot{R} = R\hat{\Omega}$.

Обобщенная модель Ньютона – Эйлера для гибкого манипулятора. Рассмотрим теперь тот же манипулятор, что и в первой части разд. 3. Каждое звено моделируется теперь с помощью подхода, связанного с введением плавающих осей, привязанных к точкам сочленения O_1, O_2, ..., O_p между телами, составляющими основу механизма; модальные функции формы определяются этими же точками. Динамические винты, индуцированные шарнирами, принадлежат типу ведомого звена. Если оснастить все тензоры теми же индексами, что и звенья, то обобщенная модель Ньютона – Эйлера для гибкого манипулятора будет задаваться тремя системами уравнений:

уравнениями динамики звеньев

$$\left\| \begin{matrix} J_{rrj} & J_{rej} \\ J_{rej} & J_{eej} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \dot{V}_j \\ \ddot{q}_j \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} C_j \\ c_j \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_j - {}^jT_{j+1}F_{j+1} \\ -\Phi_j^T {}^jR_{j+1}F_{j+1} \end{matrix} \right\|, \quad j = 0, \dots, p \tag{3.34}$$

моделью скоростей

$$V_j = {}^jT_{j-1}V_{j-1} + {}^jR_{j-1}\Phi_{j-1}\dot{q}_{j-1} + \dot{q}_{rj}A_j, \quad j = 1, \dots, p \tag{3.35}$$

моделью ускорений

$$\dot{V}_j = {}^jT_{j-1}\dot{V}_{j-1} + {}^jR_{j-1}\Phi_{j-1}\ddot{q}_{j-1} + H_j, \quad j = 1, \dots, p \tag{3.36}$$

Соотношение (3.34) выведено из соотношения (3.33) с помощью замены

$$(\dot{V}_j^T, \ddot{q}_j^T) = (\dot{\Omega}_j^T, \gamma_j^T, \ddot{q}_j^T)$$

а F_j – динамический винт, приложенный со стороны j-го тела к следующему. Матрица Φ_j размером $6 \times m$, определяющая перемещения и повороты вектора формы j-го звена, определена в точке O_{j+1}. Матрица ${}^jR_{j-1}$ размером 6×6 задает преобразование плавающей системы осей. Матрица ${}^jT_{j-1}$ размером 6×6 отвечает за преобразование винта ($j - 1$)-го звена из собственных плавающих осей в плавающие оси следующего тела. Шестимерный вектор A_j определяет ось j-го шарнира. Наконец, вектор H_j определяет кориолисово и центробежное ускорения, возникающие в j-м шарнире.

Уравнения (3.34) – (3.36) впервые были выписаны в [5], позднее – в [6–9] (см. [12–14] относительно деталей их использования в динамике систем многих гибких тел).

4. Выводы. Предложенное обобщение уравнений Пуанкаре – Четаева на среду Коссера показывает, как можно два основных множества уравнений, используемых в динамике гибких манипуляторов, описать с помощью естественного языка. Полученные в рамках Галилеева подхода уравнения в частных производных составляют основу геометрически точного подхода при численном исследовании систем многих гибких тел [2–4]. С другой стороны, применение плавающих осей для описания деформаций звеньев позволяет отождествить конфигурационное пространство с Декартовым произведением группы SE(3) и пространства обобщенных координат, описывающих деформации. С геометрической точки зрения, имеет место приведение (тривиализация) динамики упругого твердого тела на главное расслоение, в котором коммутативная подгруппа играет роль многообразия базы (здесь – модальное пространство, или, более общо, "пространство форм"), а слои – некоммутативная подгруппа (здесь SE(3)) [22]. Заметим, наконец, что эти уравнения имеют многочисленные приложения к динамике многих тел; в частности, они позволили построить $0(n)$-алгоритмы, где n – число звеньев в задачах обратной и прямой динамики гибкого манипулятора в относительных координатах [13, 14]. Современное приложение этих уравнений в роботике касается изучения движения систем со многими сочленениями. В этом случае упругое многообразие из рассматривавшихся ранее примеров заменяется на многообразие сочленений системы многих твердых тел. Возникающая задача управления состоит в следующем: какими должны быть движения в сочленениях, чтобы обеспечить средствами управления возможности адекватного движения на SE(3). Этот вопрос – основной в теории движения животных [28].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique // C. r. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 132. P. 369–371.
2. *Simo J.C., Vu-Quoc L.* On the dynamics in space of rods undergoing large motions – A geometrically exact approach // Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng. 1988. V. 66. P. 125–161.
3. *Cardona A., Géradin M.* A beam finite element non-linear theory with finite rotations // Intern. J. Numer. Methods. in Eng. 1988. V.26. P. 2403–2438.
4. *Ibrahimbegovic A., Al Mikdad M.* Finite rotations in dynamics of beams and implicit tipe-stepping schemes // Intern. J. Numer. Methods in Eng. 1998. V. 41. P. 781–814.
5. *Hughes P.C., Sincarsin G.B.* Dynamics of elastic multibody chains: Part A. Body motion equations // J. Dynamics and Stability of Systems. 1989. V. 4. P. 209–226.
6. *Meirovitch L.* Hybrid state equations of motion for flexible bodies in terms of quasi-coordinates // J. Guidance. 1991. V. 14. P. 1008–1013.
7. *Bremer H.* Fast moving flexible robot dynamics // Symp. on Robot Control (SYROCO). Nantes, France. 1997. P. 45–52.
8. *Boyer F., Coiffet P.* Generalisation of Newton – Euler model for flexible manipulators // J. Robotic Systems. 1996. V. 13. № 1. P. 11–24.
9. *Boyer F.* Contribution à la modélisation et commande dynamique des robots flexibles // PhD Thesis. Paris: University Paris VI. 1994.
10. *Book J.W.* Recursive Lagrangian dynamics of flexible manipulators arms // Intern. J. Robotic Research. 1984. V. 3. P. 87–101.
11. *Germain P.* Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique. Tome 1. Paris: Ellipses, 1986. 448 p.
12. *Boyer F., Glandais N., Khalil W.* Flexible multibody dynamics based on non-linear Euler – Bernoulli kinematics // Intern. J. Numer. Methods in Eng. 2002. V. 54. P. 27–59.
13. *D'Eleuterio G.M.T.* Dynamics of an elastic multibody chain. Part C. Recursive dynamics // Dynam. Stab. Syst. 1992. V.7. № 2. P. 61–89.
14. *Boyer F., Khalil W.* An efficient calculation of flexible manipulator inverse dynamics // J. Robotic Research. 1998. V. 17. № 3. P. 282–293.
15. *Reissner E.* On a one-dimensional large displacement finite strain beam theory // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 87–95.
16. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
17. *Chetayev N.G.* Sur les équations de Poincaré // C. r. Acad. Sci. Paris. 1927. T. 185. № 26. P. 1577.
18. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 368 с. = *Chetaev N.G.* Theoretical Mechanics. Moscow: Mir Publ., 1989.
19. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 373–386.
20. *Румянцев В.В.* Общие уравнения аналитической динамики // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 899–909.
21. *Шевалье Д.П.* Динамика с эйлеровой и лагранжевой точек зрения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. Т. 2. 2000. С. 40–68.

22. *Marsden J.E., Ratiu T.S.* Introduction to Mechanics and Symmetry. Berlin, etc.: Springer, 1999. 500 p.
23. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с. = *Arnold V.I.* Mathematical Methods in Classical Mechanics. N.Y.: Springer, 1988.
24. *Pommaret J.F.* Partial Differential Equations and Group Theory. Amsterdam: Kluwer, 1994. 473 p.
25. *Naghdi P.M.* Finite deformation of elastic rods and shells // Proc. IUTAM Symp. on Finite Elasticity. Lehigh Univ. 1980. Boston; London: Martinus Nijhoff Publ., 1982. P. 47–103.
26. *Arnold V.I.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. l'Inst. J.Fourier. 1966. T. 16. № 1. P. 319–361.
27. *Cartan E.* La Théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile. Paris: Gautier-Villar, 1937. 269 p.
28. *Ostrowski J.P.* Computing reduced equations for robotic systems with constraints and symmetries // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1999. V. 15. № 1. P. 111–123.

Нант, Франция
e-mail: frederic.boyer@emn.fr

Поступила в редакцию
31.III.2005