

УДК 539.3

© 2005 г. Ж. Лербе

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА УПРУГИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. НОВЫЙ БЕСКООРДИНАТНЫЙ ПОДХОД

С помощью теории групп Ли разрабатывается механическая модель и выписываются в бескоординатном виде уравнения движения для произвольной криволинейной модели упругой системы размерности не выше трех, исходя из единственной гипотезы о непрерывном распределении твердых тел, называемых сечениями. Предлагаемый метод иллюстрируется на примерах автоматического вывода соответствующих скалярных уравнений, которыми можно описать всевозможные модели таких систем, как балки, кабели, струны и т.д.

Во многих механических системах имеются криволинейные элементы, для описания которых используются различные механические модели – балки, кабели, струны. Вывод уравнений движения таких элементов как при малых перемещениях и напряжениях, так и в общем случае – важный шаг при исследовании таких систем. Основная цель настоящей работы состоит в использовании дифференциальных вычислений на группах Ли для получения уравнений движения в общем и бескоординатном виде. Как было уже показано в других случаях (см., например [1] в случае описания движения роботов), такой бескоординатный подход имеет ряд очевидных преимуществ. В качестве примеров таких преимуществ можно упомянуть эффективное решение вопросов, связанных с шестимерностью рассматриваемых задач, с общностью вычислений вне зависимости от того, малы перемещения и напряжения или нет, с применением ограниченных разложений (например, линеаризации) или автоматическим выводом скалярных уравнений движения.

Рассуждения опираются на единственную механическую гипотезу, состоящую в том, что криволинейная система рассматривается как непрерывное распределение твердых тел, называемых сечениями объекта. Сравнение с механикой систем многих тел, в частности с механикой цепей, наглядно демонстрирует аналогию применяемого в ней и предлагаемого подходов. Различие состоит лишь в том, что в случае механики систем многих тел кинематические, кинетические и динамические величины – функции одной дискретной переменной, в то время как в рассматриваемом случае они зависят от непрерывной переменной. Предлагаемая модель – наиболее общая бескоординатная модель одномерной микроструктуры.

В разд. 1 кратко описывается математический аппарат групп Ли. В разд. 2 предлагается модель системы и в ее рамках описываются кинематические, кинетические и динамические свойства системы; здесь же выводятся уравнения движения в бескоординатной форме. Раздел 3 посвящен связям полученных уравнений с классическими моделями, такими, как струна, балка или кабель. В разд. 4 рассматриваются вопросы автоматического получения эквивалентных скалярных уравнений путем параметризации перемещений и, главным образом, поворотов; сложность этих скалярных нелинейных уравнений доказывает *a posteriori* эффективность бескоординатного подхода.

1. Математический аппарат. Пусть \mathcal{E} – трехмерное аффинное пространство с обычными свойствами евклидовой геометрии, E – ассоциированное векторное пространство. Каждому аффинному отображению $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ обычно ставится в соответствие его линейная часть A , так что

$$A(m) = A(p) + \mathbf{A}(\overrightarrow{pm}), \quad \forall m, p \in \mathcal{E}$$

Обозначим \mathbb{D} группу аффинных отображений A , такую что A – элемент специальной ортогональной группы $SO(E)$. Пусть \mathcal{D} – шестимерное векторное пространство кососимметричных векторных полей $X : \mathcal{E} \rightarrow E$, такое, что в E существует вектор ω_X со следующим хорошо известным свойством:

$$X(a) = X(b) + \omega_X \wedge \overrightarrow{ba}, \quad \forall a, b \in \mathcal{E}$$

Другими словами, линейная часть X поля X – следующий линейный оператор в E :

$$u \mapsto X(u) = \omega_X \wedge u$$

и \mathcal{D} идентифицируется с пространством винтов.

Скобка Ли определена в \mathcal{D} соотношением

$$[X, Y](a) = \omega_X \wedge Y(a) - \omega_Y \wedge X(a), \quad a \in \mathcal{E}$$

Таким образом, \mathcal{D} – алгебра Ли, изоморфная классической алгебре Ли пространства \mathbb{D} и идентифицированная с ней.

Экспоненциальное отображение $\exp: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{D}$ позволяет выразить конечное перемещение с помощью его инфинитезимального оператора, а присоединенное отображение $\text{Ad} : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D})$ описывает действие перемещений на элементы пространства \mathcal{D} . В силу двойственности каждое действие на твердое тело будет описано элементом пространства \mathcal{D} , и оператор, допускающий эту идентификацию, представляет собой классическое внутреннее произведение $[\cdot | \cdot]$ (форму Киллинга из теории групп Ли), определенную как

$$[X|Y] = (\omega_X|Y(p)) + (\omega_Y|X(p))$$

с правой частью, не зависящей от точки p в пространстве \mathcal{E} . Для уточнения деталей, касающихся операций, определенных на пространствах \mathbb{D} и \mathcal{D} , см. [2].

2. Модель системы. Кинематика. Система описывается следующим образом. Исходная конфигурация подобна распределению

$$\sigma \mapsto r(\sigma) = (A(\sigma); \mathbf{i}_1(\sigma), \mathbf{j}_1(\sigma), \mathbf{k}_1(\sigma))$$

аффинных реперов, где σ – криволинейная абсцисса вдоль кривой $\sigma \mapsto A(\sigma)$, где $A(\sigma)$, например – центр инерции сечения для данной абсциссы σ , а $\mathbf{i}_1(\sigma), \mathbf{j}_1(\sigma), \mathbf{k}_1(\sigma)$ – базис, связанный с твердым сечением для данной абсциссы σ . В качестве этого базиса можно выбрать, например, трехгранник Френе кривой $\sigma \mapsto A(\sigma)$. В последующем каждое твердое сечение и ассоциированная с ним система координат будут идентифицированы.

На каждое сечение $r(\sigma)$ в каждый момент времени t действует неизвестное перемещение $D(\sigma, t)$, такое, что

$$r(\sigma) \rightarrow r_a(\sigma, t) = D(\sigma, t) \bullet r(\sigma), \quad r_a(\sigma, t) = (a(\sigma, t); \mathbf{i}_2(\sigma, t), \mathbf{j}_2(\sigma, t), \mathbf{k}_2(\sigma, t))$$

Заметим, что предположений о перпендикулярности сечения кривой $(\sigma, t) \mapsto a(\sigma, t)$ не делается. Темная точка означает естественное действие \mathbb{D} на множестве аффинных базисов (в математических терминах имеется структура расслоенного пучка).

Кинематика системы задается полями скоростей

$$v^c : [0, l] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{D} : (\sigma, t) \mapsto v^c(\sigma, t) = \mathbf{D}(\sigma, t)^{-1} \circ \frac{\partial D(\sigma, t)}{\partial t}$$

ускорений

$$\dot{v}^c : [0, l] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{D} : (\sigma, t) \mapsto \dot{v}^c(\sigma, t) = \frac{\partial v^c(\sigma, t)}{\partial t}$$

и деформаций

$$e^c: [0, l] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{D}: (\sigma, t) \mapsto e^c(\sigma, t) = \mathbf{D}(\sigma, t)^{-1} \circ \frac{\partial D(\sigma, t)}{\partial \sigma}$$

Светлая точка означает композицию отображений.

Заметим, что поле $\sigma \mapsto e^c(\sigma, t)$ остается неизменным при суперпозиции с движением как твердого целого.

Предположим, что движение задано соотношением $D_1(t) \circ D(\sigma, t)$. Тогда

$$\begin{aligned} e_1^c(\sigma, t) &= (\mathbf{D}_1(t) \circ \mathbf{D}(\sigma, t))^{-1} \circ \frac{\partial (D_1(t) \circ D(\sigma, t))}{\partial \sigma} = \\ &= \mathbf{D}(\sigma, t)^{-1} \circ \mathbf{D}_1(t)^{-1} \circ \mathbf{D}_1(t) \circ \frac{\partial D(\sigma, t)}{\partial \sigma} = \mathbf{D}(\sigma, t)^{-1} \circ \frac{\partial D(\sigma, t)}{\partial \sigma} = e^c(\sigma, t) \end{aligned}$$

Кинетика и динамика. Согласно выбранной модели предположим, что в каждый момент времени t и в каждом сечении $r_a(\sigma, t)$ имеются: 1) распределение $(\sigma, t) \mapsto \mathcal{T}(\sigma, t)$ полей момента, описывающих внешние воздействия, 2) распределение $(\sigma, t) \mapsto \Theta(\sigma, t)$ полей момента, описывающих внутренние воздействия (воздействие “правой” по отношению к сечению σ части системы на “левую”), 3) две сосредоточенные силы на концах $\mathcal{T}_0(t), \mathcal{T}_l(t)$ (в некоторых случаях может рассматриваться семейство сосредоточенных сил $\mathcal{T}_k(t)$, приложенных в сечениях σ_k ($k = 1, \dots, n$), которое задает разрывы величины $\sigma \mapsto \Theta(\sigma, t)$, и определяет поведение на каждом элементе $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$), 4) распределение $\sigma \mapsto \rho_0 = \rho_0(\sigma)$ массовой плотности в исходной конфигурации, 5) распределение $\sigma \mapsto H_{r_a}(\sigma, t)$ операторов \mathcal{D} , описывающих инерционные воздействия (при необходимости также воспользуемся распределением $\sigma \mapsto H_r(\sigma)$ линейных операторов инерции в исходной конфигурации), причем имеет место следующее соответствие между H_r и H_{r_a} :

$$\text{Ad}(D(\sigma, t)) \circ H_r(\sigma) \circ \text{Ad}^{-1}(D(\sigma, t)) = H_{r_a}(\sigma, t)$$

Общие уравнения. Предложение 1. Уравнения системы в лагранжевом описании имеют вид (аргументы σ и t опущены)

$$\mathcal{T}^c = \rho_0 H_{r_a}(\dot{v}^c) + [v^c, \rho_0 H_r(v^c)] - [e^c, \Theta^c] - \frac{\partial \Theta^c}{\partial \sigma} \tag{2.1}$$

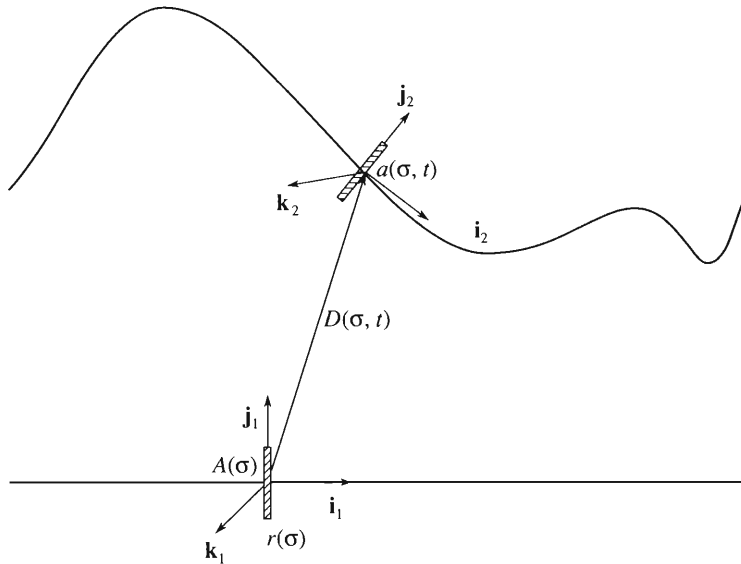
$$\mathcal{T}_0^c = \Theta^c(0), \quad \mathcal{T}_l^c = -\Theta^c(l)$$

где для каждого объекта $U = U(\sigma, t)$ системы величина $U^c = \text{Ad}(D(\sigma, t)^{-1})U$ – лагранжево выражение для функции U , т.е. функции, рассмотренной относительно исходной конфигурации.

Доказательство. Рассмотрим часть системы, расположенную между σ и $\sigma + d\sigma$. Она находится в равновесии в текущей конфигурации, если

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\sigma, t) &= \rho_0 \frac{\partial H_{r_a}(\sigma, t)(\text{Ad}(D(\sigma, t))(v^c))}{\partial t} - \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \\ \text{Ad}(D(\sigma, t))\mathcal{T}^c(\sigma, t) &= \rho_0 \frac{\partial (\text{Ad}(D(\sigma, t))H_r(\sigma)(v^c))}{\partial t} - \frac{\partial (\text{Ad}(D(\sigma, t))\Theta^c)}{\partial \sigma} = \\ &= \rho_0 \text{Ad}(D(\sigma, t))(H_r(\dot{v}^c) + [v^c, H_r(v^c)]) - \text{Ad}(D(\sigma, t)) \left([e^c, \Theta^c] + \frac{\partial \Theta^c}{\partial \sigma} \right) \end{aligned}$$

С помощью биективного отображения $\text{Ad}(D(\sigma, t))^{-1}$ приходим к соотношению (2.1).



Замечание. Такая бескоординатная запись уравнений позволяет точно идентифицировать элементы и в особенности их нелинейные упругие свойства. Они появляются в слагаемых $[v^c, \rho H_r(v^c)]$ и $[e^c, \Theta^c]$. Более того, такая формулировка представляет интерес в основном в связи с тем, что дифференциальные вычисления уже выполнены до того, как получены скалярные уравнения.

Покажем теперь, как некоторые классические модели могут быть включены в рассматриваемую модель.

3. Некоторые классические модели. Общий классический подход состоит в выборе трехгранника Френке $(\mathbf{a}(\sigma), \mathbf{t}(\sigma), \mathbf{n}(\sigma), \mathbf{b}(\sigma))$, сопутствующего кривой $\sigma \mapsto \mathbf{a}(\sigma)$. Заметим, что такой выбор связывает в общем случае три из шести степеней свободы для каждого из сечений. Воспользуемся следующими классическими обозначениями, опуская из аргументов переменную t . Напомним, что имеют место соотношения

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\sigma} = \alpha(\sigma)\mathbf{t}(\sigma), \quad \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} = \frac{\alpha(\sigma)}{\nu(\sigma)}\mathbf{n}(\sigma), \quad \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} = -\frac{\alpha(\sigma)}{\nu(\sigma)}\mathbf{t}(\sigma) + \frac{\alpha(\sigma)}{\tau(\sigma)}\mathbf{b}(\sigma), \quad \frac{d\mathbf{b}}{d\sigma} = -\frac{\alpha(\sigma)}{\tau(\sigma)}\mathbf{n}(\sigma)$$

где ν – радиус кривизны, τ – радиус кручения кривой.

С каждой системой координат $\mathcal{R} = (A; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ аффинного пространства \mathcal{E} связывается базис $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \xi, \eta, \zeta)$ в пространстве \mathcal{D} по следующему правилу: для всякого $m \in \mathcal{E}$ положим

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(m) &= \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}(m) = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}(m) = \mathbf{k} \\ \xi(m) &= \mathbf{i} \wedge A\mathbf{m}, \quad \eta(m) = \mathbf{j} \wedge A\mathbf{m}, \quad \zeta(m) = \mathbf{k} \wedge A\mathbf{m} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Воспользуемся базисом \mathcal{B}_1 , связанным с системой координат $(A(\sigma); \mathbf{i}_1(\sigma), \mathbf{j}_1(\sigma), \mathbf{k}_1(\sigma))$, для записи векторов алгебры Ли \mathcal{D} (фигура). Получим

Предложение 2. Если

$$r_a(\sigma, t) = (\mathbf{a}(\sigma, t); \mathbf{i}_2(\sigma, t), \mathbf{k}_2(\sigma, t)) = (\mathbf{a}(\sigma, t); \mathbf{t}(\sigma, t), \mathbf{n}(\sigma, t), \mathbf{b}(\sigma, t))$$

то

$$e^c = \text{col}[\alpha(\sigma) - 1, 0, 0, \alpha(\sigma)/\tau(\sigma), 0, \alpha(\sigma)/\nu(\sigma)]$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\sigma} = \alpha(\sigma)\mathbf{t}(\sigma) = \frac{\partial(D(\sigma, t)A(\sigma))}{\partial\sigma} = \frac{\partial D(\sigma, t)}{\partial\sigma}A(\sigma) + \mathbf{D}(\sigma, t)\mathbf{i}_1(\sigma)$$

Домножая это равенство на $\mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}\frac{d\mathbf{a}}{d\sigma} &= \mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}\frac{\partial D(\sigma, t)}{\partial\sigma}A(\sigma) + \mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}\mathbf{D}(\sigma, t)\mathbf{i}_1(\sigma) = \\ &= \alpha(\sigma)\mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}\mathbf{t}(\sigma) = e^c(A(\sigma)) + \mathbf{i}_1(\sigma) = \alpha(\sigma)\mathbf{i}_1(\sigma) \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{d\mathbf{t}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{\alpha(\sigma)}{v(\sigma)}\mathbf{n}(\sigma) = \frac{\partial\mathbf{D}(\sigma, t)}{\partial\sigma}\mathbf{i}_1$$

потому что \mathbf{i}_1 не зависит от σ . Домножая последнее равенство на $\mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}$, получаем

$$\mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}\frac{\alpha(\sigma)}{v(\sigma)}\mathbf{n}(\sigma) = \frac{\alpha(\sigma)}{v(\sigma)}\mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}\mathbf{n}(\sigma) = \frac{\alpha(\sigma)}{v(\sigma)}\mathbf{D}(\sigma, t)^{-1}\mathbf{D}(\sigma, t)\mathbf{j}_1 = \frac{\alpha(\sigma)}{v(\sigma)}\mathbf{j}_1 = \boldsymbol{\omega}_{e^c} \wedge \mathbf{i}_1$$

Таким же образом получаем

$$-\frac{\alpha(\sigma)}{v(\sigma)}\mathbf{i}_1 + \frac{\alpha(\sigma)}{\tau(\sigma)}\mathbf{k}_1 = \boldsymbol{\omega}_{e^c} \wedge \mathbf{j}_1, \quad -\frac{\alpha(\sigma)}{\tau(\sigma)}\mathbf{j}_1(\sigma) = \boldsymbol{\omega}_{e^c} \wedge \mathbf{k}_1$$

Оказывается, что поле перемещений $(\sigma, t) \mapsto D(\sigma, t)$ ограничено, потому что три компоненты вектора e^c равны нулю.

В силу двойственности три компоненты вектора Θ^c не могут быть получены с помощью определяющих соотношений. В самом деле, если выписать рассматриваемые уравнения с помощью теоремы о виртуальной мощности, то эти компоненты вектора Θ^c появятся как множители Лагранжа. Здесь, если выражение для Θ^c в базисе \mathcal{B}_1 имеет вид

$$\theta^c = \text{col}[C, M_1, M_2, N, T_1, T_2]$$

то в силу выбранной модели величины T_1, T_2 и M_1 – не что иное как ранее рассмотренные компоненты вектора Θ^c . Следует добавить, что такой выбор подвижности каждого из сечений $r(\sigma)$ соответствует гипотезе о том, что каждое из сечений остается во время движения перпендикулярным кривой $\sigma \mapsto a(\sigma, t)$, что представляет собой классическую гипотезу теории балок. Более того, в теории струн каждое сечение предполагается точечным. Этим определяются ограничения в кинематике, кинетике и динамике. Разовьем теперь эти положения.

Классическая теория балок. Предположим, что движения плоские: движение осуществляется в плоскости $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ и нагрузка также расположена в этой плоскости. Предполагается также, что имеет место ранее принятая гипотеза о перпендикулярности сечений.

Уравнение статики имеет вид

$$\mathcal{T}^c + [e^c, \Theta^c] + \frac{\partial\Theta^c}{\partial\sigma} = 0$$

В базисе \mathcal{B}_1 получаем

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \\ F \\ P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(\sigma) - 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha(\sigma)/\nu(\sigma) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ N \\ T \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ N \\ T \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

Обратим внимание на тот факт, что векторы из \mathcal{B}_1 – функции σ , так как $A = A(\sigma)$. Можно доказать, что если

$$u = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{k}_1 + \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\eta_1 + \lambda_3\zeta_1$$

то

$$\frac{du}{d\sigma} = x'\mathbf{i}_1 + (y' - \lambda_3)\mathbf{j}_1 + (z' + \lambda_2)\mathbf{k}_1 + \lambda_1'\xi_1 + \lambda_2'\eta_1 + \lambda_3'\zeta_1$$

Уравнения (3.2) принимают вид

$$\Gamma + \frac{dM}{d\sigma} + \alpha T = 0, \quad F + \frac{dN}{d\sigma} - \frac{\alpha}{\nu} T = 0, \quad P + \frac{dT}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\nu} N = 0$$

где все величины – функции σ .

Если балка прямолинейна, т.е. $1/\nu(\sigma) = 0$, и линия $\sigma \mapsto a(\sigma)$ нейтральна, т.е. нерастянута, то $\alpha(\sigma) = 1$, и приходим к классическим уравнениям статики прямолинейной балки.

Теория нерастяжимой, идеально гибкой струны. Поскольку речь идет о плоском равновесии идеально гибких струн, каждое сечение рассматривается как точка. Имеем

$$\Theta^c = \text{col}[0, 0, 0, N, 0, 0], \quad e^c = \text{col}[0, 0, 0, 0, 0, 1/\nu(\sigma)]$$

Уравнения (3.2) при этом принимают следующий классический вид:

$$F + \frac{dN}{d\sigma} = 0, \quad P + \frac{1}{\nu} N = 0$$

Пусть внешнее воздействие – это собственный вес. Положим

$$\mathbf{t} = \cos\beta\mathbf{i}_1 + \sin\beta\mathbf{j}_1$$

Тогда

$$-p\sin\beta + \frac{dN}{d\sigma} = 0, \quad -p\cos\beta + \frac{1}{\nu} N = 0$$

где $p = p(\sigma)$ – весовая плотность. Интегрирование этих уравнений (при постоянном p) дает классическую цепную линию.

Подобным образом можно исследовать множество других моделей. Например, в модели Тимошенко добавляется одна степень свободы к перемещениям, связанным с уже использованными в разд. 2 трехгранником Френе, обозначенным как $D_f(\sigma, t)$. При этом, например, полное перемещение задается как

$$D(\sigma, t) = D_f(\sigma, t) \circ \exp(\psi\zeta_1)$$

Можно также воспользоваться и другим представлением, но при этом следует принимать во внимание некоммутативность в нелинейном приближении.

Автоматический вывод скалярных уравнений движения рассматриваемой системы. В силу того, что имеются несколько возможных представлений перемещений, остановимся на автоматическом выводе скалярных уравнений движения рассматриваемой системы при наличии некоторой свободы выбора представления отображения $(\sigma, t) \mapsto D(\sigma, t)$ и свободы выбора исходной конфигурации $r(\sigma)$. Представим основные элементы этой программы.

1°. В общем случае положение системы определяется двумя параметрами $w = (\sigma, t)$, где σ – криволинейная абсцисса сечения, а t – время.

2°. Введем три базиса в пространстве \mathcal{D} , помня, что с каждой системой координат $\mathcal{R} = (A; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ в аффинном пространстве \mathcal{E} связан базис $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \xi, \eta, \zeta)$ пространства \mathcal{D} по правилу (3.1). Три базиса $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ связаны с тремя распределениями аффинных систем координат: фиксированной системы координат $\mathcal{R}_0 = (A_0; \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$, системы координат

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1(\sigma) = (A_1; \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1) = (D_r(\sigma)(A_0); \mathbf{D}_r(\sigma)(\mathbf{i}_0), \mathbf{D}_r(\sigma)(\mathbf{j}_0), \mathbf{D}_r(\sigma)(\mathbf{k}_0))$$

определяющей исходную конфигурацию $r(\sigma)$, и системы координат

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2(\sigma, t) = (D(\sigma, t)(A_1); \mathbf{D}(\sigma, t)(\mathbf{i}_1), \mathbf{D}(\sigma, t)(\mathbf{j}_1), \mathbf{D}(\sigma, t)(\mathbf{k}_1))$$

определяющей текущую конфигурацию в момент времени t .

3°. Базисом, выбранным для записи скалярных уравнений, будет базис \mathcal{B}_1 , зависящий от σ , но этот аргумент будет опускаться. Кроме того, чтобы представить элемент $D(\sigma, t)$, обозначим через ρ_i^i ($i = 1, 2, 3$) три вектора, выбранные из семейства (ξ_1, η_1, ζ_1) , и запишем

$$D(\sigma, t) = \exp(u(\sigma, t)) \circ \exp(\psi_1 \rho_1^1) \circ (\psi_2 \rho_1^2) \circ \exp(\psi_3 \rho_1^3)$$

где $u(\sigma, t) = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{k}_1$ – постоянное векторное поле, такое, что $\exp(u(\sigma, t))$ – трансляционная часть $D(\sigma, t)$, а $\exp(\psi_i \rho_1^i)$ описывает поворот на угол ψ_i вокруг оси ρ_1^i ($i = 1, 2, 3$). Выбор семейства ρ_1^i ($i = 1, 2, 3$) осуществляется произвольным образом, но должен допускать описание вращения. Скалярные неизвестные задачи $(x, y, z, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ – функции t и σ .

4°. Элементы группы \mathbb{D} представлены только своим присоединенным представлением. Так как это представление – морфизм групп, то достаточно выразить $\text{Ad}(\exp X)$ только для $X \in \mathcal{B}_1$ и задать его матрицу в \mathcal{B}_1 .

Если $u = \text{col}[a, b, c, 0, 0, 0]$ – постоянное векторное поле в \mathcal{B}_1 , то

$$\text{Ad}(\exp u) = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{I} \ \Lambda_1 \\ \mathbf{O} \ \mathbf{I} \end{array} \right\|, \quad \Lambda_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{array} \right\|$$

где \mathbf{I} – единичная, \mathbf{O} – нулевая (3×3) -матрицы.

Если $u = \xi_1 = \text{col}[0, 0, 0, 1, 0, 0]$, то

$$\text{Ad}(\exp \alpha u) = \begin{vmatrix} \Lambda_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Lambda_2 \end{vmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Если $u = \eta_1 = \text{col}[0, 0, 0, 0, 1, 0]$, то

$$\text{Ad}(\exp \alpha u) = \begin{vmatrix} \Lambda_3 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Lambda_3 \end{vmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Если $u = \zeta_1 = \text{col}[0, 0, 0, 0, 0, 1]$, то

$$\text{Ad}(\exp \alpha u) = \begin{vmatrix} \Lambda_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Lambda_4 \end{vmatrix}, \quad \Lambda_4 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5°. Для скобки Ли матрица скобок имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2 & \mathbf{O} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{L}_1 = \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & -\eta_1 \\ -\zeta_1 & 0 & \xi_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{k}_1 & -\mathbf{j}_1 \\ -\mathbf{k}_1 & 0 & \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 & -\mathbf{i}_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Оставшиеся компоненты определяются из билинейности.

6°. Относительно дифференцирований отметим, что если $v(t, \sigma) = v_i(t, \sigma)$ ($i = 1, \dots, 6$) – вектор из \mathcal{D} , заданный в базисе \mathcal{B}_1 , то имеем

$$\frac{\partial v(t, \sigma)}{\partial t} = \frac{\partial v_i(t, \sigma)}{\partial t}, \quad \frac{\partial v(t, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial v_i(t, \sigma)}{\partial \sigma} + [\omega, v], \quad i = 1, \dots, 6$$

где вектор ω принадлежит данным рассматриваемой задачи и является функцией на $D_r(\sigma)$, определяя исходную конфигурацию системы.

7°. Пусть $w = t$ или $w = \sigma$. Последовательно положим ($i = 1, 2, 3$)

$$\mathbf{A}_0 = \text{Ad}(\exp u), \quad \mathbf{A}_i = \text{Ad}(\exp(u)) \circ \dots \circ \text{Ad}(\exp(\psi_i \rho_1^i))$$

$$\omega_0 = \frac{\partial u}{\partial w}, \quad \omega_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial w} \rho_1^i + \text{Ad}(\exp(\psi_i \rho_1^i) - 1) \omega_w$$

Пусть

$$\omega^c = \text{Ad}(D)^{-1} \left(\sum_{i=0}^3 \mathbf{A}_i \omega_i \right)$$

Тогда, если $w = t$, то $\omega_t = 0$ и $\omega^c = V^c$, а если $w = \sigma$, то $\omega_\sigma = \omega$ и $\omega^c = e^c$.

8°. Матрица \mathbf{H}_r оператора инерции H_r в базисе \mathcal{B}_1 зависит от данных задач. Например, если начало системы координат \mathcal{R}_1 совпадает с центром масс соответствующего сечения и если \mathbf{J} – матрица центрального тензора инерции в базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$, то

$$\mathbf{H}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{J} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$$

9°. Координаты θ_i вектора Θ^c в базисе \mathcal{B}_1 задают динамические переменные системы.

В качестве примера приведем выражение для одного из полученных шести скалярных уравнений (выбрана проекция на ось η_1 , штрихом обозначена частная производная по σ , точкой – по t)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_4^c = & (\theta_3 c_2 s_3 - \theta_2 c_2 c_3) z' + \\ & + (\theta_3 (c_1 c_3 + s_1 s_2) + \theta_2 (c_1 s_3 - c_3 s_1 s_2)) y' + \\ & + (\theta_3 (c_1 s_2 - c_3 s_1)) - \theta_2 (c_1 c_3 s_2 + s_1 s_3) x' + \\ & + \rho I_{11} (\ddot{\psi}_3 - \dot{\psi}_2^2 c_2 - \dot{\psi}_1 s_2) + \rho (I_{22} - I_{33}) [\dot{\psi}_2^2 c_2 (s_3^2 - c_3^2) + (\dot{\psi}_2^2 - \dot{\psi}_1^2 c_2^2 c_3 s_3)] - \\ & - \theta_2 (c_1 s_2 + s_1 s_3) + \theta_3 (c_1 s_2 - c_3 s_1) + \theta_5 (\psi_2' - c_2 \psi_1') + \theta_6 (\psi_2' + c_2 \psi_1') + \theta_4' \end{aligned}$$

где I_{ij} – компоненты тензора инерции сечения и для краткости записи введены обозначения

$$c_i = \cos \psi_i, \quad s_i = \sin \psi_i; \quad i = 1, 2, 3$$

Сложный вид этого уравнения говорит о том, что его было бы трудно получить без использования описанного выше бескоординатного подхода и без указания программе вывести эти уравнения автоматически.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lerbet J.* Analytic geometry and singularities of mechanism // ZAMM. 1998. V. 78. № 10. P. 687–694.
2. *Chevallier D.P.* Lie algebras, modules, dual quaternions and algebraic methods in kinematics // Mechanism Machine Theory. 1991. V. 26. № 6. P. 613–627.

Марн-ла-Валле, Франция
e-mail: lerbet@univ-tours.fr

Поступила в редакцию
25.II.2003