УДК 531.36:534.12

© 2005 г. И. А. Волков, И. А. Кушмар

РЕШЕНИЕ И КОНТИНУАЛИЗАЦИЯ ВОЛНОВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТРУННОЙ СЕТКИ

Рассматривается задача о распространении возмущения по струнной сетке, образованной двумя системами параллельных струн с равными характеристическими импедансами. С помощью установленных рекуррентных соотношений для ортогональных многочленов Кравчука и Чебышева–Эрмита получено точное решение задачи и на основе предельных представлений определен ее континуальный аналог. Получены уравнения в частных производных в предельном смысле эквивалентные исходным уравнениям в дискретных переменных. Определена структура механической системы – континуального аналога струнной сетки. Построены аналоги функций Грина в дискретном и непрерывном вариантах. Приведено сопоставление с соответствующими результатами на физическом уровне строгости. Для неограниченной однородной сетки, образованной двумя семействами струн с единым временем прохождения возмущения между узлами, получена функция влияния импульса, приложенного к одному из узлов. С точностью до обозначения аргументов она совпадает с квадратом нормированных многочленов Кравчука.

1. Постановка задачи и ее решение переходом к дискретным переменным. Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях струнной сетки, занимающей полуплоскость и образованной двумя системами параллельных равноотстоящих струн, имеющих одинаковые динамические параметры – плотность ρ_i, натяжение T_i, скорость распространения возмущения $\upsilon_i = (T_i/\rho_i)^{1/2}$ в пределах каждой системы ($i = 1, 2$) и одинаковый для струн обеих систем ($Z_1 = Z_2$) характеристический импеданс $Z_i = (\rho_i T_i)^{1/2}$.

Выберем ось x совпадающей с одной из струн горизонтальной системы ($i = 1$), а ось y – с крайней струной второй ($i = 2$) системы. От начала координат условимся отсчитывать также номера m и n струн первой и второй систем соответственно. Тогда для внутренних точек отрезков струн между узлами имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon_1^2}\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = 0, \quad nl_1 < x < (n+1)l_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ &\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - \frac{1}{\upsilon_2^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} = 0, \quad ml_2 < y < (m+1)l_2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \tag{1.1}$$

где u_m и w_n – смещение, t – время, l_i – длина отрезков струн между узлами.

Постановка задачи должна быть дополнена условиями в узлах – равенства смещения обеих струн и динамического равновесия

$$u_m(nl_1, t) = w_n(ml_2, t) = U_n(t), \quad T_1 \frac{\partial u_m}{\partial x}\bigg|_{x = nl_1 - 0}^{x = nl_1 + 0} + T_2 \frac{\partial w_n}{\partial y}\bigg|_{y = ml_2 - 0}^{y = ml_2 + 0} = 0 \tag{1.2}$$

а также начальными и граничными условиями

$$u_m(x,0) = \frac{\partial u_m}{\partial t}(x,0) = 0, \quad w_n(y,0) = \frac{\partial w_n}{\partial t}(y,0) = 0$$
$$u_m(0,t) = w_0(y,t) = U_0(t) = 1 \tag{1.3}$$

Очевидно, что смещения в узловых точках $U_n(t)$ не зависят от номера m, а их величины в любых трех соседних узлах струн горизонтальной системы оказываются связанными рекуррентным соотношением, которое может быть записано в единообразном виде

$$U_n(t) = \frac{1}{2}[U_{n-1}(t-\tau_1) + U_{n+1}(t-\tau_1)] +$$
$$+\frac{1}{2}[U_{n-1}(t-\tau_1-\tau_2) + U_{n+1}(t-\tau_1-\tau_2)] - U_n(t-2\tau_1-\tau_2) \quad \left(\tau_i = \frac{l_i}{\upsilon_i}\right) \tag{1.4}$$

если условиться считать функции смещения при отрицательном значении аргумента равными нулю. Данное соотношение можно получить, например, используя при решении задачи (1.1)–(1.3) интегральное преобразование Лапласа и возвращаясь к оригиналам с помощью теоремы запаздывания.

Если ввести целочисленный аргумент $N = [t/\tau_1]$, номер узла n рассматривать в качестве другого дискретного аргумента, а величину $s = \tau_2/\tau_1$ также считать целым числом, то уравнение (1.4) может быть представлено в виде

$$U(n,N) - \frac{1}{2}[U(n-1,N-1) + U(n+1,N-1)] =$$
$$= \frac{1}{2}[U(n-1,N-s-1) + U(n+1,N-s-1)] - U(n,N-s-2) \tag{1.5}$$

Таким образом, исходная задача (1.1)–(1.3) сводится к решению уравнения (1.5) в дискретных переменных с условиями

$$U(n, N<0) = U(n>0,0) = 0, \quad U(0, N \geq 0) = 1 \tag{1.6}$$

Определим искомое решение задачи (1.5), (1.6) по периодам

$$U(n,N) = U_r(n,N) \text{ при } r(s+1)-1 \leq N \leq (r+1)(s+1)-1, \quad r = 0, 1, 2\ldots \tag{1.7}$$

Тогда для функций U_r получаем уравнение

$$U_r(n,N) - \frac{1}{2}[U_r(n-1,N-1) + U_r(n+1,N-1)] =$$
$$= \frac{1}{2}[U_{r-1}(n-1,N-s-1) + U_{r-1}(n+1,N-s-1)] - U_{r-1}(n,N-s-2) \tag{1.8}$$

с условиями

$$U_{-1}(n,N) = 0, \quad U_0(n>0,0) = 0, \quad U_r(0,N) = 1$$
$$U_r[n, r(s+1)-1] = U_{r-1}[n, r(s+1)-1], \quad r > 0 \tag{1.9}$$

последнее из которых – условие сращивания решений, относящихся к смежным периодам.

Если ввести функции $W_r(n, N)$, являющиеся решением той же задачи (1.8), (1.9), но для полубесконечных интервалов изменения аргумента N

$$N \geq r(s+1)-1, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

то, очевидно, функции $W_r(n, N)$ будут совпадать с $U_r(n, N)$ и $U(n, N)$ в конечных промежутках (1.7), а искомое решение – представляться через разности этих функций $D_r(n, N) = W_r(n, N) - W_{r-1}(n, N)$, $r > 0$ формулой

$$U(n, N) = W_0(n, N) + \sum_{r=1}^{[N/(s+1)]} D_r(n, N) \tag{1.10}$$

где квадратными скобками обозначена целая часть заключенного в них числа.

Задача для определения первого члена ряда (1.10) имеет вид

$$\begin{gathered} W_0(n, N) - \frac{1}{2}[W_0(n-1, N-1) + W_0(n+1, N-1)] = 0, \\ W_0(n > 0, 0) = 0, \quad W_0(0, N) = 1 \end{gathered} \tag{1.11}$$

Поскольку уравнение в дискретных переменных связывает значения искомой функции в точках с четной и отдельно с нечетной суммой $n + N$ аргументов, а краевые и начальные условия для них совпадают, решение должно состоять из двух одинаковых частей со сдвинутыми одно относительно другого на единицу значениями N. Очевидно, и члены ряда (1.10) представляются суммой двух таких же слагаемых

$$W_0(n, N) = R_0(n, N) + R_0(n, N-1), \quad D_r(n, N) = R_r(n, N) + R_r(n, N-1)$$

определяемых соотношениями

$$R_r(n, N) - \frac{1}{2}[R_r(n-1, N-1) + R_r(n+1, N-1)] =$$

$$= \frac{1}{2}[R_{r-1}(n-1, N-s-1) + R_{r-1}(n+1, N-s-1)] - R_{r-1}(n, N-s-2)$$

$$R_r[n, r(s+1)-1] = 0, \quad R_r(0, N) = 0$$

Если перейти к новой переменной $N_r = N - rs$, то для функции $V_r(n, N_r) = R_r(n, N)$ получим

$$\begin{gathered} V_r(n, N_r) - \frac{1}{2}[V_r(n-1, N_r-1) + V_r(n+1, N_r-1)] = \\ = \frac{1}{2}[V_{r-1}(n-1, N_r-1) + V_{r-1}(n+1, N_r-1)] - V_{r-1}(n, N_r-2) \\ V_r(n, r-1) = 0 \quad V_r(0, N_r) = 0 \end{gathered} \tag{1.12}$$

Поскольку данные соотношения совпадают с установленными ранее[1] свойствами нормированных многочленов Кравчука $K(r, s, N)$ при $p = q = 1/2$, $s = (n + N_r)/2$ (см. также раздел 4), то

$$V_r(n, N_r) = \left(\frac{N_r - r + 1}{r}\right)^{1/2} K\left(r-1, \frac{n+N_r}{2}, N_r\right) K\left(r, \frac{n+N_r}{2}, N_r\right), \quad r > 0$$

[1] *Волков И.А.* Моделирование процессов пьезо- и теплопроводности в бинарных средах во взаимосвязи с задачами теории колебаний. Дис. … д-ра физ.-мат. н., 01.02.05, 01.02.04, М., 1990, 137 с.

Решение задачи (1.11) удобно искать в виде

$$W_0(n, N) = \sum_{k=0}^{N} F(n, k)$$

где функция $F(n, N)$ является решением того же уравнения (1.11) с условиями

$$F(n, 0) = 0, \quad F(0, N) = \begin{cases} 1 & \text{при } N = 0 \\ 0 & \text{при } N > 0 \end{cases}$$

и, в свою очередь, представима при $n \geq 0, N \geq 1$ через дискретный аналог функции Грина

$$F(n, N) = \frac{1}{2}G_0(n-1, N-1) - \frac{1}{2}G_0(n+1, N-1), \quad G_0(n, N) = \left(\frac{1}{2}\right)^N C_N^{(n+N)/2}$$

Справедливость данного равенства следует из его очевидного выполнения в частных случаях $n \geq 0, N = 1$ и $n = 0, N \geq 1$.

После упрощений находим

$$F(n, N) = \frac{n}{N} C_N^{(n+N)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Таким образом, решение задачи (1.5), (1.6) имеет вид

$$U(n, N) = W_0(n, N) + \sum_{r=1}^{[N/s]} [V_r(n, N-rs) + V_r(n, N-rs-1)]$$

$$W_0(n, N) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ \sum\limits_{r=n}^{N} \frac{n}{r} C_r^{(n+r)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^r & \text{при } n > 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

$$V_r(n, N) = ((N-r+1)/r)^{1/2} K(r-1, (n+N)/2, N) K(r, (n+N)/2, N)$$

Под величинами $C_k^{(n+r)/2}$ и $K(r, (n+N)/2, N)$ понимаются биноминальные коэффициенты и нормированные многочлены Кравчука в области их стандартного определения и нули – в остальных случаях.

Тем же способом может быть построено другое решение уравнения (1.5) – аналог функций Грина

$$G_2(n, n_0, N) = G_1(n, n_0, N) + G_1(n, n_0 - 1, N)$$

$$G_1(n, n_0, N) = B_0^2(n-n_0, N) - \sum_{r=1}^{[N/s]} [B_{r-1}^2(n-n_0, N-rs-1) - B_r^2(n-n_0, N-rs)] \tag{1.14}$$

$$B_r^2(n, N) = K^2(r, (n+N)/2, N)$$

отвечающее условиям

$$\sum_{(n)} G_2(n, n_0, N) = 2, \quad G_2(n, n_0, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = n_0, n_0 - 1 \\ 0 & \text{при } n \neq n_0, n_0 - 1 \end{cases}$$

2. Континуальный аналог задачи в дискретных переменных. Известно [1], что между нормированными многочленами Кравчука $K(r, s, N)$ и Чебышева–Эрмита $\Psi_r(z)$ при фиксированных r и z существует предельная связь

$$\lim_{N \to \infty} (2pqN)^{1/4} K(r, s, N) = \Psi_r(z), \quad z = \frac{s - pN}{\sqrt{2pqN}} \tag{2.1}$$

Исходя из нее и интегральной теоремы Муавра–Лапласа, можно найти предельные представления приведенных решений (1.13) и (1.14). Первое из них, например, принимает вид

$$u(\xi, \theta) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\theta}}\right) + \sum_{r=1}^{[\theta/\tau]} \sqrt{\frac{2}{r}} \Psi_{r-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2(\theta - r\tau)}}\right) \Psi_r\left(\frac{\xi}{\sqrt{2(\theta - r\tau)}}\right) \tag{2.2}$$

где

$$\xi = \frac{x}{l_1}, \quad \theta = \frac{\upsilon_1 t}{l_1}, \quad \tau = \frac{\upsilon_1 l_2}{\upsilon_2 l_1} \tag{2.3}$$

Покажем, что выражение (2.2) является решением дифференциального уравнения – континуального аналога уравнения (1.5). С этой целью докажем вначале, что функции

$$F_r(z) = \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2} \Psi_{r-1}(z) \Psi_r(z), \quad r > 0 \tag{2.4}$$

удовлетворяют соотношению

$$\frac{d^2}{dz^2}[F_r(z) + F_{r-1}(z)] + 2z\frac{d}{dz}[F_r(z) - F_{r-1}(z)] = 0 \tag{2.5}$$

Будем исходить из известного [2] уравнения

$$\Psi''_r(z) + (2r + 1 - z^2)\Psi_r(z) = 0 \tag{2.6}$$

и равенств

$$\begin{gathered} \left(\frac{r+1}{2}\right)^{1/2} \Psi_{r+1}(z) + \left(\frac{r}{2}\right)^{1/2} \Psi_{r-1}(z) = z\Psi_r(z), \\ \left(\frac{r+1}{2}\right)^{1/2} \Psi_{r+1}(z) - \left(\frac{r}{2}\right)^{1/2} \Psi_{r-1}(z) = -\Psi'_r(z) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Подставляя выражение (2.4) в уравнение (2.5), после простых преобразований и упрощений с использованием формул (2.7) получаем равенство

$$\Psi_r[\Psi''_r + (2r + 1 - z^2)\Psi_r]' + 3\Psi'_r[\Psi''_r + (2r + 1 - z^2)\Psi_r] = 0 \tag{2.8}$$

тождественное выполнение которого в силу соотношения (2.6) становится очевидным. Если дополнительно принять

$$F_0(z) = \operatorname{erfc}(z) \tag{2.9}$$

то непосредственной проверкой можно убедиться, что $F_0(z)$ и $F_1(z)$ связаны тем же соотношением (2.5).

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[u(\xi,\theta)+u(\xi,\theta-\tau)] = \frac{\partial}{\partial\theta}[u(\xi,\theta)-u(\xi,\theta-\tau)]\\ u(\xi,\theta\le 0) = 0,\quad u(0,\theta\ge 0) = 1\end{gathered}\tag{2.10}$$

По аналогии с задачей (1.5), (1.6) определим искомую функцию по периодам

$$u(\xi,\theta) = u_r(\xi,\theta) \text{ при } r\tau\le\theta<(r+1)\tau,\quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

причем функции $u_r(\xi, \theta)$ отвечают соотношениям

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[u_r(\xi,\theta)+u_{r-1}(\xi,\theta-\tau)] = \frac{\partial}{\partial\theta}[u_r(\xi,\theta)-u_{r-1}(\xi,\theta-\tau)]\\ u_{-1}(\xi,\theta) = 0,\quad u_0(\xi,0) = 0,\quad \xi\ne 0;\quad u_r(\xi,r\tau) = u_{r-1}(\xi,r\tau),\\ u_r(0,\theta) = 1,\quad r = 0, 1, 2, \ldots\end{gathered}\tag{2.11}$$

Введем функции $\omega_r(\xi, \theta)$, являющиеся решением этой же задачи (2.11), но в полуограниченных интервалах изменения аргумента θ

$$\theta\ge r\tau,\quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда искомое решение будет представляться через разности этих функций

$$u(\xi,\theta) = \omega_0(\xi,\theta)+\sum_{r=1}^{[\theta/\tau]}\delta_r(\xi,\theta);\quad \delta_r(\xi,\theta) = \omega_r(\xi,\theta)-\omega_{r-1}(\xi,\theta),\quad r>0\tag{2.12}$$

Первое слагаемое в равенстве (2.12) – известное автомодельное решение уравнения теплопроводности

$$\omega_0(\xi,\theta) = \delta_0(\xi,\theta) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\theta}}\right)$$

а функции, стоящие под знаком суммы, удовлетворяют соотношениям, которые после замены переменных

$$\theta = \theta_r+r\tau,\quad \delta_r(\xi,\theta) = f_r(\xi,\theta_r)$$

можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[f_r(\xi,\theta_r)+f_{r-1}(\xi,\theta_r)] = \frac{\partial}{\partial\theta_r}[f_r(\xi,\theta_r)-f_{r-1}(\xi,\theta_r)]\tag{2.13}$$

$$f_r(\xi,\theta_r) = 0,\quad f_r(0,\theta_r) = 0,\quad r = 1, 2, 3, \ldots\tag{2.14}$$

Задаче (2.13), (2.14) удовлетворяют автомодельные функции

$$f_r(\xi,\theta_e) = \left(\frac{2}{r}\right)^{1/2}\Psi_{r-1}(\xi(2\theta_r)^{-1/2})\Psi_r(\xi(2\theta_r)^{-1/2}) = F_r(\xi(2\theta_r)^{-1/2})\tag{2.15}$$

совпадающие с функциями (2.4) с точностью до обозначений. Действительно, их непосредственная подстановка в уравнение (2.13) приводит его к виду (2.5), а выполнение условий (2.14) следует из свойств многочленов Чебышева–Эрмита

$$\Psi_r(\infty) = 0,\quad \Psi_{2r+1}(0) = 0,\quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Собирая результаты, окончательно получим решение задачи (2.10) в виде, совпадающем с выражением (2.2), откуда стандартным способом можно найти и функцию Грина

$$G(\xi, \xi_0, \theta) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_0}u(\xi - \xi_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\exp\left[\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\theta}\right] -$$
$$- \sum_{r=1}^{[\theta/\tau]} \frac{1}{\sqrt{2(\theta - r\tau)}}\left\{\Psi_{r-1}^2\left[\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{2(\theta - r\tau)}}\right] - \Psi_r^2\left[\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{2(\theta - r\tau)}}\right]\right\} \quad (2.16)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \xi_0, \theta)d\xi = 1$$

При $\theta < \tau$ правая часть равенства (2.16) вырождается в функцию источника для уравнения теплопроводности. Второе равенство справедливо в силу ортонормированности функций Чебышева–Эрмита.

3. О структуре механической системы, соответствующей континуальному уравнению. Покажем, что уравнение вида (2.10) может интерпретироваться как уравнение поперечных колебаний струнно-мембранной системы с нулевыми значениями некоторых динамических параметров.

Запишем условие динамического равновесия безынерционной ($\rho_1 = 0$) струны, соединенной с мембраной,

$$T_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + T_2'\frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=-0}^{y=+0} = 0 \quad (3.1)$$

где штрихом отмечена сила натяжения мембраны, приходящаяся на единицу длины струны, а также уравнение колебаний мембраны, не обладающей упругими свойствами в продольном направлении (вдоль оси x),

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \frac{1}{\upsilon_2^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{T_2'}{\rho_2'}} \quad (3.2)$$

и условие согласования смещений мембраны и струны

$$u_2(y = 0, t; x) = u_1(x, t) \quad (3.3)$$

Для не ограниченной по оси y, не возмущенной в начальный момент мембраны

$$u_2(y, 0; x) = \frac{\partial u_2}{\partial y}(y, 0; x) = 0 \quad (3.4)$$

связанной с одиночной струной, функция смещения может быть представлена как решение задачи (3.2)–(3.4), а его подстановка в (3.1) приводит к уравнению теплопроводности.

Если же мембрана имеет форму полосы шириной l_2, связанной с центрально-расположенной струной, то при краевых условиях

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=\pm l_2/2} = 0 \quad (3.5)$$

процедура исключения неизвестной u_2 из системы (3.1)–(3.5) приводит, как можно убедиться, к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[u_1(x, t) + u_1\left(x, t - \frac{l_2}{\upsilon_2}\right)\right] = \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[u_1(x, t) - u_1\left(x, t - \frac{l_2}{\upsilon_2}\right)\right], \quad a^2 = \frac{T_1}{2\sqrt{\rho_2' T_2'}} \quad (3.6)$$

совпадающему с континуальным уравнением (2.10) с учетом принятых обозначений (2.3), равенства импедансов всех образующих сетку струн и дополнительном условии

$$\rho_2' = \rho_2/l_1; \quad T_2' = T_2/l_1 \tag{3.7}$$

согласования динамических параметров мембраны и вертикальных струн в струнной сетке.

При сопоставлении структур исходной струнной сетки со струнно-мембранной системой как ее континуального аналога условие (3.7) может показаться очевидным. Не обладающую вдоль оси x упругостью мембрану естественно рассматривать как непрерывно распределенные ("размазанные") по оси x отрезки вертикальных струн. Именно таков широко распространенный способ континуализации на физическом уровне строгости – подмена дискретного элемента непрерывно распределенным. Однако имеется и существенная разница между результатами, полученными при точном и приближенном подходах. В первом случае в континуальной системе струны безынерционны, во втором – они имеют плотность струн исходной системы. При этом в уравнении (3.1) должен появиться дополнительный член, усложняющий итоговое уравнение (3.6), утрачивают силу простые по форме решения (2.2) и (2.18), а поиск новых решений (более сложных и менее строгих) становится проблематичным.

Отметим, что ортогональность двух систем струн, образующих сетку, не была использована где-либо в решении задач, так что полученные результаты в равной мере справедливы при любом отличном от нуля угле их пересечения (в косоугольных координатах x, y). Кроме того, возможно и иное расположение границы. Помимо принятого ее совпадения с одной из струн вертикальной системы ($x = 0$) практически те же результаты можно получить и при ее диагональном расположении относительно ячеек сетки.

4. Приложение. Рекуррентное соотношение для квадратов нормированных многочленов Кравчука. Классические ортогональные многочлены (дискретной переменной) Кравчука определяются [1] производящей функцией:

$$\sum_{r=0}^{N} k_r(s, N)z^r = (1+qz)^s(1-pz)^{N-s}, \quad N \ge s \ge 0, \quad p > 0, \quad q = 1-p > 0 \tag{4.1}$$

Введем в рассмотрение нормированные многочлены Кравчука, которые в дальнейшем условимся называть функциями Кравчука (ФК)

$$K(r, s, N) = (C_N^s/C_N^r)^{1/2} p^{(s-r)/2} q^{(N-s-r)/2} k_r(s, N) \tag{4.2}$$

где величины C_N^s и C_N^r – биномиальные коэффициенты.

Покажем, что квадраты этих функций удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} K^2(r, s, N+1) - qK^2(r, s, N) - pK^2(r, s-1, N) &= pK^2(r-1, s, N) + \\ + qK^2(r-1, s-1, N) - K^2(r-1, s-1, N-1) & \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для доказательства воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} [p(s+1)]^{1/2}K(r, s+1, N+1) + [q(N-s+1)]^{1/2}K(r, s, N+1) &= \\ = (N-r+1)^{1/2}K(r, s, N) & \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$q[(s+1)]^{1/2}K(r, s+1, N+1) - [p(N-s+1)]^{1/2}K(r, s, N+1) = r^{1/2}K(r-1, s, N) \tag{4.5}$$

$$(ps)^{1/2}K(r, s-1, N-1) + [q(N-s)]^{1/2}K(r, s, N-1) = (N-r)^{1/2}K(r, s, N) \tag{4.6}$$

$$(qs)^{1/2}K(r, s-1, N-1) - [p(N-s)]^{1/2}K(r, s, N-1) = (r+1)^{1/2}K(r+1, s, N) \tag{4.7}$$

$$[pq(r+1)(N-r)]^{1/2}K(r+1, s, N) + [pN + (q-p)r - s]K(r, s, N) +$$
$$+ [pqr(N-r+1)]^{1/2}K(r-1, s, N) = 0 \tag{4.8}$$

первые два из которых устанавливаются непосредственно из соотношений (4.1) и (4.2), два последующие – с помощью выражения (4.2) и формулы, получающейся при дифференцировании производящей функции по z. Равенство (4.8) соответствует связи между тремя многочленами Кравчука с последовательными индексами.

Перемножив правые и левые части равенств (4.4) и (4.5), найдем

$$[pqr(N-r+1)]^{1/2}K(r-1, s, N)K(r, s, N) =$$
$$= pq(s+1)K^2(r, s+1, N+1) - pq(N-s+1)K^2(r, s, N+1) +$$
$$+ (q-p)[pq(s+1)(N-s+1)]^{1/2}K(r, s, N+1)K(r, s+1, N+1) \tag{4.9}$$

Последний член в данном соотношении можно выразить через квадраты ФК двумя способами – непосредственно из соотношения, получающегося при возведении в квадрат обеих частей равенства (4.4):

$$2[pq(s+1)(N-s+1)]^{1/2}K(r, s, N+1)K(r, s+1, N+1) = (N-r+1)K^2(r, s, N) -$$
$$- q(N-s+1)K^2(r, s, N-1) - p(s+1)K^2(r, s+1, N+1) \tag{4.10}$$

и после вычитания аналогичным образом преобразованных равенств (4.4) и (4.5)

$$2[pq(s+1)(N-s+1)]^{1/2}K(r, s, N+1)K(r, s+1, N+1) = q(s+1)K^2(r, s+1, N+1) +$$
$$+ p(N-s+1)K^2(r, s, N+1) - rK^2(r-1, s, N) \tag{4.11}$$

Подстановка выражений (4.10) и (4.11) в соотношение (4.9) приводит к формулам

$$[pqr(N-r+1)]^{1/2}K(r-1, s, N)K(r, s, N) = \frac{1}{2}p(s+1)K^2(r, s+1, N+1) -$$
$$- \frac{1}{2}q(N-s+1)K^2(r, s, N-1) + \frac{1}{2}(q-p)(N-r+1)K^2(r, s, N) \tag{4.12}$$

$$[pq(r+1)(N-r)]^{1/2}K(r, s, N)K(r+1, s, N) = \frac{1}{2}q(s+1)K^2(r+1, s+1, N+1) -$$
$$- \frac{1}{2}p(N-s+1)K^2(r+1, s, N+1) - \frac{1}{2}(q-p)(r+1)K^2(r+1, s, N) \tag{4.13}$$

И если в равенство (4.8), почленно умноженное на $K(r, s, N)$, подставить выражения (4.12) и (4.13) для его крайних членов, то придем к соотношению

$$(N-2s-1)K^2(r, s, N-1) + p[(s+1)K^2(r, s+1, N) - (N-s)K^2(r+1, s, N)] -$$
$$- q[(N-s)K^2(r, s, N) - (s+1)K^2(r+1, s+1, N)] = 0 \tag{4.14}$$

содержащему только квадраты ФК.

Совершенно аналогично тому, как соотношение (4.14) было получено из равенств (4.4), (4.5) и (4.8), из (4.6) – (4.8) можно найти

$$(N-2s-1)K^2(r+1, s+1, N+1) + p[(s+1)K^2(r+1, s, N) - (N-s)K^2(r, s+1, N)] -$$
$$- q[(N-s)K^2(r+1, s+1, N) - (s+1)K^2(r, s, N)] = 0 \qquad (4.15)$$

а сложение выражений (4.14) и (4.15) после сокращения на общий множитель $(N-2s-1)$ приводит к рекуррентному соотношению искомого вида (4.3).

Аналогичным образом можно доказать, что соотношению того же вида удовлетворяют и функции

$$F(r, s, N) = 2\left(pq\frac{N-r+1}{r}\right)^{1/2} K(r-1, s, N)K(r, s, N), \quad r > 0 \qquad (4.16)$$

В качестве примера использования доказанного соотношения (4.3) найдем функцию влияния импульса, приложенного к одному из узлов неограниченной однородной сетки, образованной двумя семействами струн с единым временем прохождения возмущения между узлами $\tau = l_1/v_1 = l_2/v_2$.

В принятых условиях задача сводится к решению уравнения для смещений в узлах

$$U(n, m, N+1) + U(n, m, N-1) = \alpha_1[U(n+1, m, N) + U(n-1, m, N)] +$$
$$+ \alpha_2[U(n, m+1, N) + U(n, m-1, N)] \qquad (4.17)$$

с условиями

$$U(n, m, N<0) = 0, \quad U(0, 0, 0) = U(0, 0, 1)$$

где

$$n = [x/l_1], \quad m = [y/l_2], \quad N = [t/\tau], \quad \alpha_i = Z_i/(Z_1+Z_2), \quad i = 1, 2$$

Здесь n, m и N – безразмерные целочисленные координаты (номера узлов) и время, за начало отсчета которых ($n = m = N = 0$) принимается точка и момент приложения импульса, а коэффициенты α_i определены соотношением импедансов Z струн обеих систем.

Уравнение (4.17) совпадает с рекуррентным соотношением (4.3) для квадратов ФК с точностью до обозначений

$$r = (N-m-n)/2, \quad s = (N-m+n)/2, \quad p = \alpha_1, \quad q = \alpha_2$$

и если без ограничения общности задачи считать начальное смещение в точке приложения импульса единичным: $U(0, 0, 0) = K^2(0, 0, 0) = 1$, то для функции влияния импульса получаем простое аналитическое выражение

$$U(m, n, N) = K^2\left(\frac{N-m-n}{2}, \frac{N-m+n}{2}, N\right) + K^2\left(\frac{N-m-n-1}{2}, \frac{N-m+n-1}{2}, N-1\right)$$

где одно из слагаемых (с полуцелыми значениями аргументов ФК) заведомо равно нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Szego G.* Orthogonal polynomials. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1959 = *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962. 500 с.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

Санкт-Петербург
e-mail: ins@vnigri.spb.su

Поступила в редакцию
14.VII.2003