УДК 531.01 + 531.552

© 2005 г. М. В. Шамолин

СОПОСТАВЛЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ЯКОБИ СЛУЧАЕВ ПЛОСКОГО И ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СРЕДЕ ПРИ СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ

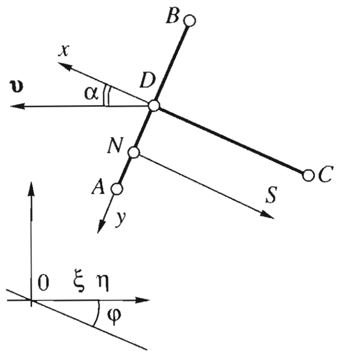
Показана полная интегрируемость плоской задачи о движении твердого тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует один первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Предполагается, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины. Плоская задача обобщена на пространственный (трехмерный) случай; при этом у системы динамических уравнений существует полный набор первых интегралов: один – аналитический, один – мероморфный и один – трансцендентный. Здесь предполагается, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Также предпринимается попытка построить обобщение “маломерных” случаев на динамику так называемого четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой, которое сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела шестимерен, а скорость центра масс четырехмерна.

1. Основные гипотезы и постановка задачи. Согласно гипотезе квазистационарности [1, 2], при взаимодействии тела со средой в условиях струйного обтекания обобщенные силы зависят лишь от обобщенных координат и обобщенных скоростей. Ниже выделяется такой класс задач, при котором обобщенные силы зависят лишь от обобщенных скоростей.

Предположим, что однородное твердое тело массы m способно совершать плоскопараллельное движение в среде, покоящейся на бесконечности, и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой конечную плоскую область (пластину) P, находящуюся в условиях струйного обтекания средой [1, 2] и перпендикулярную плоскости движения $O\xi\eta$, содержащую центр масс C тела. Область P пересекает плоскость $O\xi\eta$ по отрезку AB длины Δ (фиг. 1). Остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного поверхностью жидкости, срывающейся с края пластины, и не испытывает действия среды. Сходные условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду [3, 4]. Таким образом, предполагается, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

В силу свойств струйного обтекания воздействие среды на пластину сводится к силе $\mathbf{S}$, линия действия которой ортогональна области P, т.е. $\mathbf{S}$ не меняет своего направления относительно тела.

Свяжем с телом правую систему координат $Dxyz$, ось z которой движется параллельно самой себе, и будем считать для простоты Dzx плоскостью геометрической симметрии тела.



Фиг. 1

Рассмотрим режим прямолинейного поступательного торможения. Такой режим возможен при выполнении двух условий: 1) скорость тела ортогональна отрезку AB, 2) перпендикуляр, опущенный из центра тяжести C тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы $\mathbf{S}$.

При возмущении этого режима вектор скорости точки D, вообще говоря, отклоняется от прямой Dx на угол атаки α. При этом точка N приложения силы $\mathbf{S}$ смещается вдоль пластины AB на величину y_N. Положение тела на плоскости будет определяться обобщенными координатами $D = (\xi, \eta)$ и углом φ между прямой CD и осью ξ.

Теперь можно записать уравнения движения центра масс тела в проекции на оси ξ и η и уравнение изменения кинетического момента относительно оси Кёнига.

Вводя вместо скоростей $\xi^{\cdot}$, $\eta^{\cdot}$ квазискорости $|\upsilon| = \upsilon$, α и угловую скорость Ω по формулам

$$\xi^{\cdot} = \upsilon\cos(\alpha+\varphi), \quad \eta^{\cdot} = \upsilon\sin(\alpha+\varphi), \quad \varphi^{\cdot} = \Omega \tag{1.1}$$

и предполагая, что

$$S = s_1\upsilon^2, \quad s_1 = s_1(\alpha, \omega) \geq 0, \quad y_N = y_N(\alpha, \omega), \quad \omega = \Omega\Delta/\upsilon$$

уравнения движения центра масс в проекциях на оси Dx , Dy и уравнение изменения кинетического момента запишем в виде (ср. с уравнениями, предложенными ранее [5])

$$\begin{gathered}\upsilon^{\cdot}\cos\alpha - \alpha^{\cdot}\upsilon\sin\alpha - \Omega\upsilon\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = -s_1(\alpha, \omega)\upsilon^2 m^{-1}\operatorname{sign}\cos\alpha \\ \upsilon^{\cdot}\sin\alpha + \alpha^{\cdot}\upsilon\cos\alpha + \Omega\upsilon\cos\alpha - \sigma\Omega^{\cdot} = 0 \\ I\Omega^{\cdot} = y_N(\alpha, \omega)s_1(\alpha, \omega)\upsilon^2\operatorname{sign}\cos\alpha\end{gathered} \tag{1.2}$$

($\sigma = CD$, I – центральный момент инерции).

Полученная система и рассматривается в качестве независимой системы третьего порядка, а для получения траекторий твердого тела на плоскости необходимо дополнить эту систему кинематическими соотношениями (1.1).

2. Классы динамических функций. Для каждого конкретного тела трудно получить явный вид пары функций (y_N, s_1). Поэтому достаточно расширить классы функций $\{y_N\}$ и $\{s_1\}$, так чтобы они заведомо включали пары "реальных" функций. Для этого нужно продолжать функции y_N и s_1 на конечные углы атаки, т.е. "расширять" области определения этой пары динамических функций на интервал (0. $\pi/2$). Но фактически рассматривать их нужно на всей числовой, как это делалось Чаплыгиным [6], который для бесконечной полосы получил указанные функции аналитически.

Рассматривается случай, когда пара динамических функций (y_N, s_1) зависит лишь от угла атаки (т.е. $y_N = y_N(\alpha)$, $s_1 = s_1(\alpha)$), при этом для ее качественного описания используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания [7][1]. Введем знакопеременную вспомогательную функцию $s(\alpha) = s_1(\alpha)\,\mathrm{sign}\cos\alpha$, которая учитывает знак проекции силы сопротивления на ось Dx. Вводимые классы функций достаточно широки и состоят из достаточно гладких, 2π-периодических функций следующего вида: $y_N(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная функция, удовлетворяющие условиям: $y_N(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $y'_N(0) > 0$, $y'_N(\pi) < 0$ (класс функций $\{y_N\} = Y$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in$ $\in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\} = \Sigma$). Обе функции меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. В частности, следующие аналитические функции (в точности соответствующие случаю Чаплыгина [6]) служат типичными представителями описанных выше классов:

$$y_{N0}(\alpha) = A\sin\alpha \in Y, \quad s_0(\alpha) = B\cos\alpha \in \Sigma; \quad A, B > 0 \tag{2.1}$$

3. Движение при наличии следящей силы и системы с переменной диссипацией "с нулевым средним". Выделим далее класс задач о движении тела в среде, когда на тело наряду с силой воздействия среды приложена некая следящая сила (сила тяги) **T** по прямой CD. Одна из таких задач уже решалась [8] при условии постоянной тяги.

Предположим, что во все моменты времени выполнено равенство

$$v = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

Это возможно, если

$$|\mathbf{T}| = T = m\sigma\Omega^2 + v^2[s(\alpha) - m\sigma I^{-1}F(\alpha)\mathrm{tg}\,\alpha]$$

Тогда система (1.2) при некоторых условиях [5] приводится к системе

$$\begin{gathered}\alpha^{\cdot} = -\Omega + A_1F(\alpha)/\cos\alpha, \quad \Omega^{\cdot} = A_2F(\alpha); \quad A_1 = \sigma v/I, \quad A_2 = v^2/I, \\ F(\alpha) = y_N(\alpha)s(\alpha)\end{gathered} \tag{3.2}$$

эквивалентной уравнению нелинейного осциллятора

$$\alpha^{\cdot\cdot} - A_1\alpha^{\cdot}F(\alpha)/\cos\alpha + A_2F(\alpha) = 0 \tag{3.3}$$

Видно, что движение системы происходит под действием двух сил: консервативной $A_2F(\alpha)$ и линейной по скорости $\alpha^{\cdot}$ с переменным коэффициентом $d(F(\alpha)/\cos\alpha)/d\alpha$, который меняет знак при переходе из одной полосы фазового цилиндра в другую. Имеем, таким образом, систему с так называемой переменной (в смысле знака) диссипацией. Очевидно, что в данном случае в среднем за период 2π по углу атаки диссипация обращается в нуль. Поэтому будем говорить, что система (3.2) (или уравнение (3.3)) является системой (или уравнением) с переменной диссипацией с нулевым средним.

4. Об интегрируемости систем в трансцендентных функциях. Приведем утверждение, связывающее поведение траекторий возле асимптотических предельных множеств и интегрируемость системы. Асимптотическими предельными множествами будем называть отталкивающие и притягивающие предельные множества.

---

[1] См. также: *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием. Отчет Ин-та механики МГУ. 1990. № 3969. 80 с.

Рассмотрим систему уравнений в фазовом пространстве R^n.

Теорема 1. Если система обладает асимптотическими предельными множествами, то она не имеет полного набора непрерывных первых интегралов во всем фазовом пространстве.

Данная теорема хотя и доказывается достаточно просто, имеет важный топологический смысл, касающийся непрерывности первых интегралов возле предельных множеств.

Следствие. С точки зрения теории функций, первые интегралы могут иметь в данных асимптотических предельных множествах существенно особые точки.

Система (3.2) имеет положения равновесия $(\pi k, 0)$ $(k \in Z)$, которые при $k = 2n$ $(n \in Z)$ являются отталкивающими, а при $k = 2n + 1$ – притягивающими.

Предложение. Система (3.2) обладает трансцендентным первым интегралом [5, 8].

Искомый первый интеграл в случае (2.1) имеет следующий вид (в зависимости от знака $\Delta = A_1^2 - 4A_2$ возможны три случая):

$$\Delta < 0:\ [\Omega^2 + A_1\Omega\sin\alpha + A_2\sin^2\alpha]\sin\left\{\frac{2A_1}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{2\Omega + A_1\sin\alpha}{\sqrt{-\Delta}}\right\} = \text{const}$$

$$\Delta > 0:\ \chi_+\chi_+ = \text{const}\left(\chi_\pm = \left|2\Omega + A_1 \pm \sqrt{\Delta}\sin\alpha\right|^{\sqrt{\Delta}\mp A_1}\right)$$

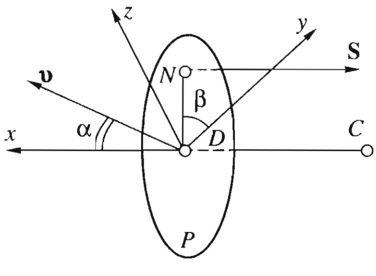
$$\Delta = 0:\ \left|2\Omega + A_1\sin\alpha\right|\exp\left(-\frac{A_1\sin\alpha}{2\Omega + A_1\sin\alpha}\right) = \text{const}$$

Следствие. При $A_1 = 0$ трансцендентный (в смысле теории функций комплексного переменного) первый интеграл превращается в аналитический первый интеграл для стандартного уравнения математического маятника.

5. Постановка трехмерной задачи о движении тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности. Рассматриваемая в дальнейшем динамическая модель взаимодействия твердого тела с сопротивляющейся средой при струйном обтекании [1, 2] в условиях квазистационарности не только позволяет успешно обобщить результаты соответствующих задач о плоскопараллельном движении тела, взаимодействующего со средой [3–8], и получить их пространственные аналоги, но и обнаружить новые интегрируемые по Якоби случаи. При этом иногда интегралы выражаются через элементарные функции. В дальнейшем показывается интегрируемость задачи о пространственном (трехмерном) движении тела при наличии сервосвязи вида (3.1).

Предположим, что однородное осесимметричное твердое тело массы m совершает пространственное движение в среде и что некоторая часть поверхности тела представляет собой плоский диск, находящийся в условиях струйного обтекания средой. Остальная часть поверхности тела со средой не взаимодействует. Как и в случае плоскопараллельного движения, сила $\mathbf{S}$ воздействия среды на тело ортогональна к плоскости диска. Все аналогичные предположения модельного характера в данном случае действительны и переносятся из плоской динамики (фиг. 2). Таким образом, предполагается, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Далее отметим изменения в постановке, которые характерны для пространственного случая. Если связать с телом систему координат $Dxyz$ так, чтобы ось Dx была направлена по оси геометрической симметрии тела, а оси Dy и Dz лежали в плоскости диска, то положение тела в пространстве будет определяться тремя декартовыми координатами ξ, η, ζ точки D и тремя углами θ, ψ, φ. В динамическом пространстве в ка-



Фиг. 2

честве квазискоростей теперь имеем величины (υ, α, β) – сферические координаты вектора $\mathbf{v}$ скорости точки D (α – угол атаки, α угол β измеряется в плоскости диска), а также (Ω_x, Ω_y, Ω_z) – проекции угловой скорости на связанные оси $Dxyz$.

Система динамических уравнений в шестимерном динамическом пространстве имеет вид

$$\upsilon^{\cdot}\cos\alpha - \alpha^{\cdot}\upsilon\sin\alpha + \Omega_y\upsilon\sin\alpha\sin\beta - \Omega_z\upsilon\sin\alpha\cos\beta + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) = -s(\alpha)m^{-1}\upsilon^2$$

$$\upsilon^{\cdot}\sin\alpha\cos\beta + \alpha^{\cdot}\upsilon\cos\alpha\cos\beta - \beta^{\cdot}\upsilon\sin\alpha\sin\beta +$$

$$+ \Omega_z\upsilon\cos\alpha - \Omega_x\upsilon\sin\alpha\sin\beta - \sigma\Omega_x\Omega_y - \sigma\Omega_z^{\cdot} = 0$$

$$\upsilon^{\cdot}\sin\alpha\sin\beta + \alpha^{\cdot}\upsilon\cos\alpha\sin\beta + \beta^{\cdot}\upsilon\sin\alpha\cos\beta + \tag{5.1}$$

$$+ \Omega_x\upsilon\sin\alpha\cos\beta - \Omega_y\upsilon\cos\alpha - \sigma\Omega_x\Omega_z + \sigma\Omega_y^{\cdot} = 0$$

$$I_1\Omega_x^{\cdot} + (I_3 - I_2)\Omega_y\Omega_z = 0, \quad I_2\Omega_y^{\cdot} + (I_1 - I_3)\Omega_x\Omega_z = -z_N s(\alpha)\upsilon^2,$$

$$I_3\Omega_z^{\cdot} + (I_2 - I_1)\Omega_x\Omega_y = y_N s(\alpha)\upsilon^2$$

Наряду с функцией $s(\alpha)$ в эту систему входят функции y_N, z_N ((0, y_N, z_N) – координаты точки N в системе $Dxyz$), определяемые динамической функцией R следующим образом:

$$y_N(\alpha, \beta) = R(\alpha)\cos\beta, \quad z_N(\alpha, \beta) = R(\alpha)\sin\beta$$

Построим пространственный вариант движения тела в случае (3.1) и изучим его при условии $R \in Y$, $s \in \Sigma$.

В общей динамической системе двенадцатого порядка в силу цикличности указанных координат происходит отщепление независимой подсистемы (5.1) в шестимерном динамическом фазовом пространстве квазискоростей $T^2\{\alpha, \beta\} \times R_+^1\{\upsilon\} \times R^3\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$.

Момент силы сопротивления по-прежнему представляется в квадратичном по скорости виде: $M = F(\alpha)\upsilon^2$, где появляется функция $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$ (см. (3.2)), для качественного описания которой используем имеющуюся экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания.

6. Динамически симметричное свободное твердое тело с сервосвязью. Уравнения движения динамически симметричного свободного твердого тела ($I_2 = I_3$; I_1, I_2, I_3 – главные моменты инерции) в осях $Dxyz$ при наличии сервосвязи вида (3.1) [5] (плоский вариант данной задачи см. выше) допускают первый интеграл $\Omega_x = \Omega_{x0}$ и имеют следующий вид (для простоты пусть $\Omega_{x0} = 0$):

$$\alpha^{\cdot} = -z_- + I_2^{-1}F(\alpha)\sigma\upsilon/\cos\alpha, \quad z_-^{\cdot} = I_2^{-1}F(\alpha)\upsilon^2 - z_+^2\operatorname{ctg}\alpha, \quad z_+^{\cdot} = z_+z_-\operatorname{ctg}\alpha \tag{6.1}$$

$$\beta^{\cdot} = z_+\operatorname{ctg}\alpha \tag{6.2}$$

Здесь $\sigma = CD$, C – центр масс, $z_\pm = \Omega_y\cos\beta \pm \Omega_z\sin\beta$.

Утверждение. Динамическая система (6.1), (6.2) топологически эквивалентна системе (6.1), (6.2) при условии (2.1), т.е. когда

$$F = F_0(\alpha) = F^0\sin\alpha\cos\alpha, \quad F^0 > 0 \tag{6.3}$$

При выполнении условия (6.3) уравнение (6.2) сохраняет свою форму, а система (6.1) принимает вид

$$\alpha^{\cdot} = -z_- + \sigma n_0^2\upsilon\sin\alpha, \quad z_-^{\cdot} = n_0^2\upsilon^2\sin\alpha\cos\alpha - z_+^2\operatorname{ctg}\alpha, \quad z_+^{\cdot} = z_+z_-\operatorname{ctg}\alpha \quad (n_0^2 = F^0I_2^{-1}) \tag{6.4}$$

Оценим возможности полного интегрирования системы (6.4), (6.2). В дальнейшем приведем первые интегралы системы, выражающиеся через элементарные функции.

Теорема 2. Система (6.4) обладает полным набором трансцендентных первых интегралов. Система (6.4), (6.2) также вполне интегрируема по Якоби, ее два первых интеграла являются первыми интегралами системы (6.4).

Мероморфный интеграл системы (6.4) имеет вид

$$(z_+^2 + z_-^2 - \sigma n_0^2\upsilon z_-\tau + n_0^2\upsilon^2\tau^2)/z_+\tau = C_1, \quad \tau = \sin\alpha \tag{6.5}$$

Поскольку система (6.4) обладает переменной диссипацией и является аналитической, для нее удается в явном виде найти два других дополнительных интеграла. В силу равенства (6.5) выполнено тождество

$$u_+ = (C_1 + G)/2; \quad G = \sqrt{C_1^2 - 4[u_-^2 - \sigma n_0^2\upsilon u_- + n_0^2\upsilon^2]}, \quad u_\pm = z_\pm\tau \tag{6.6}$$

Тогда в силу равенств (6.4), (6.6) квадратура для поиска искомого интеграла, связывающего величины u_- и τ, принимает вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau} = \frac{\sigma n_0^2\upsilon}{2}D_1 - D_2, \quad D_1 = \pm\int\frac{dy}{(y + C_1)\sqrt{C_1^2 - y^2 + 4a}}, \quad D_2 = -2\int\frac{dx}{y^2 \mp G}$$
$$y^2 = C_1^2 - 4(x - a), \quad x = (u_- - \sigma n_0^2/2)^2, \quad a = n_0^2\upsilon^2\Delta_2/4, \quad \Delta_2 = \sigma^2n_0^2 - 4 \tag{6.7}$$

Пусть для определенности $C_1^2 + 4a \ge 0$. Тогда

$$D_1 = \pm\frac{1}{2n_0\upsilon\sqrt{-a}}\arcsin\frac{C_1y + C_1^2 + 2n_0\upsilon\sqrt{a}}{(y + C_1)\sqrt{C_1^2 + 2n_0\upsilon\sqrt{a}}} + C_2, \text{ если } \Delta_2 < 0$$

$$D_1 = \mp(C_1y + C_1^2)^{-1}\sqrt{C_1^2 - y^2} + C_2, \text{ если } \Delta_2 = 0$$

$$D_1 = \mp(\zeta_+ + \zeta_-) + C_2\left(\zeta_+ = \frac{1}{4n_0\upsilon\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2\sqrt{a} \pm G_1}{y + C_1} + \frac{C_1}{2\sqrt{a}}\right|\right), \text{ если } \Delta_2 > 0$$

Возвращаясь к старым переменным, можно показать, что дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу, соответствующему случаю плоскопараллельного движения тела (ср. с рассмотренным ранее случаем [5])):

$$\ln|\sin\alpha| + G_2(z_-\sin\alpha, z_+\sin\alpha, \sin\alpha) = C_2$$

Дополнительный интеграл системы, найденный выше, являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных, составляет вместе с интегралом (6.5) полный набор первых интегралов системы (6.4). Для полной же системы (6.4), (6.2) при $\Omega_{x0} = 0$ необходим еще один первый интеграл.

Для поиска дополнительного интеграла системы (6.4), (6.2) заметим, что поскольку $dz_+/d\beta = z_-$, то $du_+/d\beta + [-u_- + \sigma n_0^2 \upsilon] = u_-$. Поэтому

$$du_+/d\beta = \pm\sqrt{\sigma^2 n_0^4 \upsilon^2 - 4[u_+^2 - C_1 u_+ + n_0^2 \upsilon^2]}$$

и, следовательно, выполнено равенство

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = G_3^{-1}(u_- - \sigma n_0^2/2)^2 u_+^2$$

где

$$G_3 = [u_+^2 - \sigma n_0^2 \upsilon u_+]^2 + 2[u_+^2 - \sigma n_0^2 \upsilon u_+][u_-^2 + n_0^2 \upsilon^2] + [u_-^2 + n_0^2 \upsilon^2]^2 + \sigma^2 n_0^4 \upsilon^2 u_-^2$$

7. Переход к четырехмерному случаю. Часто структура динамических уравнений движения сохраняется при переносе динамических свойств на случаи большей размерности. Например, в настоящее время развивается теория движения четырехмерного (или даже n-мерного) твердого тела [9–11]; удалось показать гамильтоновость уравнений движения многомерного твердого тела в некоторых случаях. Интересно изучить движение так называемого четырехмерного твердого тела, взаимодействующего "с сопротивляющейся средой" по законам "струйного обтекания". В последнем случае предполагается что все взаимодействие (четырехмерного) твердого тела со средой сосредоточено на части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела шестимерен, а скорость центра масс четырехмерна.

Замечание. Ранее (в основном геометрами) рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда момент внешних сил равен нулю. Автором развивается новое направление по исследованию уравнений движения твердого тела на множестве $\mathrm{so}(4) \times R^4$ при отличном от нуля моменте внешних сил.

Методика интегрирования рассматриваемых динамических систем почти всегда может быть распространена и на пространство $\mathrm{so}(n) \times R^n$ динамических уравнений произвольного динамически симметричного n-мерного твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1976. 495 с.
2. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
3. *Ерошин В.А.* Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 20–30.
4. *Самсонов В.А., Шамолин М.В., Ерошин В.А., Макаршин В.М.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Науч. отчет Ин-та механики МГУ. 1995. № 4396. 41 с.

5. *Самсонов В.А., Шамолин М.В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 3. С. 51–54.
6. *Чаплыгин С.А.* Приближенная метода решения задач о газовых струях // Полное собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 2. С. 80–90.
7. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
8. *Ерошин В., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. научн.-метод. статей по теорет. механике. М.: Наука, 1987. Вып. 18. С. 75–78.
9. *Богоявленский О.И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1105–1109.
10. *Богоявленский О.И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1364–1367.
11. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 29. С. 3–80.

Москва
e-mail: shamolin@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
1.II.2005