

УДК 539.3: 545.1

© 2005 г. И. Д. Кочетков, Н. Н. Рогачева

## КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКТИВНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Получено аналитическое решение следующей контактной задачи: расположенный на поверхности упругого полупространства активный пьезоэлектрический элемент (ПЭ) совершает колебания под действием электрической нагрузки, возбуждая поверхностные и объемные волны. Изучается поведение этих волн во всех точках упругого тела, а также напряженно-деформированное состояние ПЭ. В качестве примера дается численный расчет перемещений акустических волн упругого полупространства из стали, возбуждаемых ПЭ из пьезокерамики PZT-5, а также расчет напряженно-деформированного состояния ПЭ. Показано, что амплитуды поверхностных и объемных волн существенно зависят от частоты колебаний. Изучается затухание акустических волн при удалении от источника колебаний как в глубь тела, так и по его поверхности.

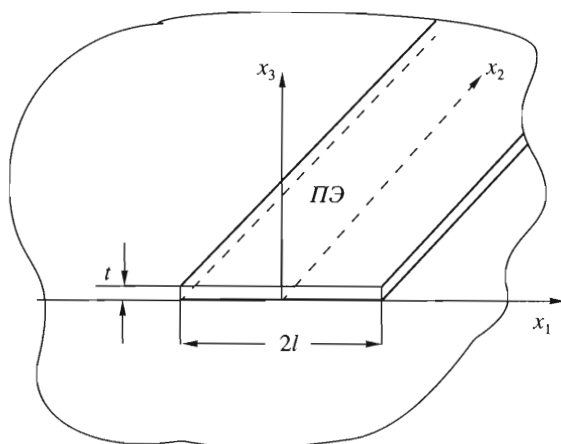
В изотропной упругой среде, имеющей границу, могут распространяться помимо продольных и поперечных (сдвиговых) волн поверхностные волны [1–5]. Смещение поверхностной волны, удовлетворяющее условию отсутствия механических напряжений на свободной поверхности тела, содержит как продольную, так и поперечную составляющие. Поверхностные волны распространяются по поверхности без затухания. В глубь тела они проникают на незначительную глубину вследствие быстрого затухания.

В большинстве работ, посвященных акустическим волнам (см., например, [6–8]), так же как у Релея, строится решение однородной задачи. В результате находятся только скорости и длины волн, а также волновые числа, а амплитудные значения искомых величин не определяются. Определение амплитудных значений – сложная задача даже в простом случае, например, когда на поверхности упругого полупространства действует сосредоточенная сила [2, 9].

**1. Постановка задачи.** Решается следующая контактная задача: на поверхности упругого полупространства расположен пьезоэлектрический элемент (ПЭ) в виде тонкой бесконечной полосы, который совершает колебания под действием электрической нагрузки, возбуждая поверхностные и объемные волны в упругом теле.

Чтобы упростить сложную контактную задачу, принимаются некоторые очевидные предположения относительно электроупругого состояния ПЭ.

Полная задача с учетом сделанных предположений может быть расчленена на задачу для ПЭ и сумму вспомогательных задач для упругого полупространства. Решение упрощенной системы уравнений для ПЭ отыскивается в виде рядов Фурье. Для решения вспомогательных задач для упругого полупространства используется интегральное преобразование Фурье. Затем полученные интегралы приводятся к удобному для вычислений виду методом функций комплексного переменного. Полное решение для упругого полупространства записывается как сумма решений вспомогательных задач. Решения задач для ПЭ и упругого полупространства содержат известные постоянные, которые обеспечивают удовлетворение условиям контакта.



Фиг. 1

Следует отметить, что полученное решение позволяет определить все искомые величины контактной задачи, включая их амплитудные значения.

**2. Задача для пьезоэлектрического элемента.** На фиг. 1 изображены ПЭ и упругое полупространство в декартовой системе координат. Предполагается, что ПЭ, выполненный из поляризованной в толщинном направлении пьезокерамики, имеет ширину  $2l$ , толщину  $t$  и бесконечен в направлении  $x_2$ . ПЭ совершает гармонические колебания под действием электрической нагрузки, приложенной к электродам, покрывающим лицевые поверхности пьезоэлектрической полосы  $x_3 = 0$  и  $x_3 = t$ . Электрическая нагрузка изменяется по гармоническому закону с круговой частотой колебаний  $\omega$ , поэтому все уравнения могут быть записаны относительно амплитудных значений искомых величин. Решение контактной задачи не зависит от координаты  $x_2$ , так как ПЭ бесконечен в направлении  $x_2$ .

Система уравнений, описывающая ПЭ относительно амплитудных величин, включает в себя [10, 11] (ниже выписаны только те уравнения, которые будут использоваться для решения сформулированной контактной задачи)

уравнения равновесия

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i3,3} + \rho_p \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 3 \tag{2.1}$$

уравнения состояния

$$\sigma_{kk} = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_p^2)} (e_k + \nu_p e_n) - \left\{ \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1 - \nu_p)} \sigma_{33} \right\} - \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu_p)} E_3, \quad \nu_p = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E} \tag{2.2}$$

$$D_3 = \epsilon_{33}^E E_3 + d_{31} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \{d_{33} \sigma_{33}\} \tag{2.3}$$

соотношения, связывающие деформации с перемещениями,

$$e_k = u_{k,k}, \quad e_2 = u_{2,2} = 0 \tag{2.4}$$

Компонента  $E_3$  вектора напряженности электрического поля связана с электрическим потенциалом  $\phi$  формулой

$$E_3 = -\phi_{,3} \tag{2.5}$$

Здесь  $k \neq n, k = 1, 2$ .

На электродах ПЭ задан электрический потенциал

$$\phi|_{x_3=0} = -V, \quad \phi|_{x_3=t} = +V \quad (2.6)$$

В уравнениях (2.1)–(2.5)  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$  – напряжения,  $D_3$  – компонента вектора электрической индукции в направлении  $x_3$ ,  $s_{11}^E$ ,  $s_{12}^E$ ,  $s_{13}^E$  – упругие податливости при нулевом электрическом поле,  $d_{31}$  и  $d_{33}$  – пьезоэлектрические постоянные,  $\epsilon_{33}^T$  – диэлектрическая проницаемость при нулевых напряжениях.

Решается класс задач, в которых

- 1) ПЭ тонкий (толщина элемента  $t$  значительно меньше, чем его ширина  $2l$  ( $t \ll 2l$ )),
- 2) длина волн в упругом теле одного порядка или больше, чем ширина ПЭ (это означает, что изменяемость напряженно-деформированного состояния ПЭ по координате  $x_1$  мала).

Для рассматриваемого случая задача может быть упрощена в результате принятия следующих гипотез.

1°. Напряжения  $\sigma_{33}$  значительно меньше, чем напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , поэтому можно пренебречь  $\sigma_{33}$  по сравнению с  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  в уравнениях (2.2)–(2.3).

2°. Перемещения  $u_1$  и  $u_3$  постоянны по толщине (перемещения изменяются так медленно по координате  $x_3$ , что можно считать, что они не зависят от  $x_3$ ).

3°.  $E_3$  не зависит от  $x_3$ .

Если гипотезы не выполняются, данный способ решения задачи непригоден. Например, если длина акустических волн такого же порядка или меньше толщины ПЭ, то не выполняется первая гипотеза. Если поверхность упругого полупространства полностью покрыта пьезоэлектрическим слоем, который является неограниченным ПЭ, то в этом частном случае напряжения  $\sigma_{33}$  не малы по сравнению с  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и нетрудно получить простое аналитическое решение задачи, качественно отличающееся от исследуемого здесь.

Принятые гипотезы не новы. Первая и вторая гипотезы повсеместно используются, начиная с Кирхгофа, для любого тонкого слоя, имеющего малую изменяемость по координатам  $x_1$ ,  $x_2$ . Все принятые гипотезы обычно используются для тонкостенных ПЭ и сенсоров. Справедливость гипотез подтверждена многочисленными экспериментами [11, 12]. Кроме того, принятые гипотезы подтверждаются асимптотическим анализом [13].

Используя первую и вторую гипотезы, в уравнениях (2.2)–(2.3) следует пренебречь слагаемыми, заключенными в фигурные скобки.

Из третьей гипотезы и уравнения (2.5) следует, что электрический потенциал – линейная функция толщинной координаты  $x_3$ , а  $E_3$  при учете условия (2.6) выражается через  $V$  таким образом:

$$E_3 = -2V/t \quad (2.7)$$

Так как  $u_1$ ,  $e_1$ ,  $E_3$  не зависят от переменной  $x_3$ , из уравнений (2.2)–(2.4) видно, что  $\sigma_{11}$ ,  $D_3$  также не зависят от  $x_3$  и являются функциями только  $x_1$ .

Интегрирование уравнений (2.1) по  $x_3$  и удовлетворение условиям отсутствия напряжений на поверхности  $x_3 = t$

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (2.8)$$

приводит к следующим формулам для напряжений  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{33}$ :

$$\sigma_{13} = (\sigma_{11,1} + \rho_p \omega^2 u_1)(t - x_3) \quad (2.9)$$

$$\sigma_{33} = (\sigma_{11,11} + \rho_p \omega^2 u_{1,1})((t^2 + x_3^2)/2 - tx_3) + (t - x_3)\rho_p \omega^2 u_3 \quad (2.10)$$

Чтобы решать задачу в рядах Фурье, электрическую нагрузку  $E_3$  следует продолжить как периодическую функцию  $x_1$  на интервале  $[-L, +L]$  ( $L > 2l$ )

$$F(x_1) = \begin{cases} E_3, & |x_1| \leq l \\ f(x_1), & l \leq |x_1| \leq L-l; \int_{-L}^{+L} F(x_1)dx = 0 \\ -E_3, & L-l \leq |x_1| \leq L \end{cases} \quad (2.11)$$

Функция  $f(x_1)$  выбирается так, чтобы функция  $F(x_1)$  была непрерывна на отрезке  $[-L, +L]$ .

Отметим, что функция может быть продолжена любым способом, который обеспечит быструю сходимость решения.

Затем продолженную функцию  $E_3$  следует разложить в ряд Фурье (всюду далее суммирование по  $n$  ведется от  $n = 1$  до  $N$ )

$$E_3 = \sum_n \phi_n \cos a_n x_1, \quad \phi_n = \int_{-L}^{+L} F(x_1) \cos a_n x_1 dx_1, \quad a_n = \frac{n\pi}{L} \quad (2.12)$$

Все искомые величины для ПЭ будут отыскиваться в виде тригонометрических рядов

$$u_1 = \sum_n u_{1n} \sin a_n x_1, \quad u_3 = \sum_n u_{3n} \cos a_n x_1 \quad (2.13)$$

$$\sigma_{11} = \sum_n \sigma_{11n} \cos a_n x_1, \quad \sigma_{13} = \sum_n \sigma_{13n} \sin a_n x_1, \quad \sigma_{33} = \sum_n \sigma_{33n} \cos a_n x_1$$

**3. Задача для упругого полупространства.** Полная система уравнений, описывающих упругое полупространство  $x_3 \leq 0$ , включает уравнения равновесия (2.1), формулы, связывающие деформации с перемещениями, и закон Гука.

Для решения задачи используется способ, предложенный Лэмбом для случая сосредоточенных сил, приложенных в точке поверхности упругого тела [2, 9].

Следуя Лэмбу, уравнения равновесия запишем в перемещениях (всюду далее  $i = 1, 3$ )

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu \nabla^2 u_i + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (3.1)$$

где

$$\theta = u_{1,1} + u_{3,3}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.2)$$

( $\theta$  – относительная объемная деформация,  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе).

Закон Гука записывается в виде

$$\sigma_{ii} = \lambda(e_1 + e_3) + 2\mu e_i, \quad \sigma_{31} = \mu e_{31}, \quad e_i = u_{i,i}, \quad e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} \quad (3.3)$$

Функции  $\phi$  и  $\psi$ , связанные с перемещениями, вводятся обычным путем

$$u_1 = \phi_{,1} + \psi_{,3}, \quad u_3 = \phi_{,3} - \psi_{,1} \quad (3.4)$$

Уравнения равновесия и формулы для напряжений, выраженные через функции  $\phi$  и  $\psi$ , могут быть записаны таким образом:

$$(\nabla^2 + h^2)\phi = 0, \quad (\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \quad (3.5)$$

$$\sigma_{11} = \mu(-k^2\varphi - 2\varphi_{,33} + 2\psi_{,13}) \quad (3.6)$$

$$\sigma_{33} = \mu(-k^2\varphi - 2\varphi_{,11} - 2\psi_{,13}), \quad \sigma_{31} = \mu(-k^2\psi - 2\psi_{,11} + 2\varphi_{,13}) \quad (3.7)$$

$$h^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2}, \quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$c_L$  и  $c_T$  – скорости,  $h$  и  $k$  – волновые числа продольных и поперечных волн соответственно.

Для решения задачи используется интегральное преобразование Фурье по переменной  $x_1$

$$\varphi^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi e^{-i\xi x_1} dx_1, \quad \psi^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi e^{-i\xi x_1} dx_1 \quad (3.8)$$

Так как ось  $x_3$  направлена из упругого полупространства (фиг. 1), решение в упругом полупространстве должно убывать с уменьшением  $x_3$ , поэтому решение берется в виде

$$\varphi^* = A e^{\alpha x_3}, \quad \psi^* = B e^{\beta x_3} \quad (3.9)$$

где  $\alpha, \beta$  – положительные действительные величины, что обеспечивает затухание напряженно-деформированного состояния упругого тела при удалении от источника колебаний в глубь тела.

Чтобы найти величины  $\alpha, \beta$ , следует выполнить интегральное преобразование (3.8) в уравнениях (3.5) и подставить в них выражения (3.9)

$$\alpha = (\xi^2 - h^2)^{1/2}, \quad \beta = (\xi^2 - k^2)^{1/2} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.4), (3.7) в результате применения преобразования Фурье примут вид

$$u_1^* = i\xi A e^{\alpha x_3} + \beta B e^{\beta x_3}, \quad u_3^* = \alpha A e^{\alpha x_3} - i\xi B e^{\beta x_3} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{33}^* = \mu((2\xi^2 - k^2)A e^{\alpha x_3} - 2i\xi\beta B e^{\beta x_3}), \quad \sigma_{13}^* = \mu((2\xi^2 - k^2)B e^{\beta x_3} - 2i\xi\alpha A e^{\alpha x_3}) \quad (3.12)$$

Произвольные постоянные  $A$  и  $B$  находятся из условий контакта ПЭ и упругого полупространства на плоскости  $x_3 = 0$ .

В разд. 2 электрическая нагрузка  $E_3$  продолжена как периодическая функция переменной  $x_1$  в интервале  $(-\infty, +\infty)$  (2.11) и разложена в ряд Фурье (2.12). Остальные искомые величины ПЭ также записываются в виде рядов Фурье. Задача для упругого полупространства решается с помощью интегрального преобразования Фурье. При интегральном преобразовании напряжений  $\sigma_{33}$  и  $\sigma_{31}$  учитывается равенство этих напряжений, соответствующим напряжениям ПЭ (2.13) в области контакта, и их равенство нулю на остальной поверхности упругого тела. Аналогичный способ используется в гидроакустике при решении задачи о колебаниях шарнирно опертой цилиндрической оболочки конечной длины, погруженной в бесконечную жидкость [14].

Для того чтобы решить контактную задачу, предварительно решаются две вспомогательные задачи. В первой вспомогательной задаче на поверхность упругого полупространства в области контакта с ПЭ действует только нормальная поверхностная нагрузка  $\sigma_{33} = \cos a_n x_1$ , во второй задаче в области контакта действует только тангенциальная нагрузка  $\sigma_{31} = \sin a_n x_1$ .

Первая вспомогательная задача для упругого полупространства. Предполагается, что в области контакта на поверхности упругого полупространства заданы нормальные напряжения, остальная часть поверхности свободна от напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{33}|_{x_3=0} &= X_3, \quad \sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad X_3 = \cos px_1, \quad p = a_n = n\pi/l, \quad |x_1| \leq l \\ \sigma_{33}|_{x_3=0} &= 0, \quad \sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad |x_1| > l \end{aligned} \quad (3.13)$$

Условия (3.13) в результате преобразования Фурье

$$\sigma_{33}^*|_{x_3=0} = X_3^*, \quad \sigma_{13}^*|_{x_3=0} = 0, \quad X_3^* = -\frac{i}{2\pi}(\Omega^-(\xi) + \Omega^-(-\xi)) \quad (3.14)$$

где

$$\Omega^\pm(\xi) = \exp(i(p + \xi)l/(p + \xi)) \pm \exp(-i(p - \xi)l/(p - \xi)) \quad (3.15)$$

при учете формул (3.12) перепишутся в виде

$$(2\xi^2 - k^2)A - 2i\xi\beta B = \frac{X_3^*}{\mu}, \quad 2i\xi\alpha A + (2\xi^2 - k^2)B = 0 \quad (3.16)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются как решение системы (3.16), после чего перемещения находятся в результате применения обратного преобразования Фурье к выражениям (3.11)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{i}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} [(2\xi^2 - k^2)e^{\alpha x_3} - 2\alpha\beta e^{\beta x_3}] \frac{\xi X_3^*}{F(\xi)} e^{i\xi x_1} d\xi \\ u_3 &= \frac{i}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} [(2\xi^2 - k^2)e^{\alpha x_3} - 2\xi^2 e^{\beta x_3}] \frac{\alpha X_3^*}{F(\xi)} e^{i\xi x_1} d\xi \end{aligned} \quad (3.17)$$

Величины  $\alpha$  и  $\beta$  определяются формулами (3.10),  $F(\xi)$  – функция Релея

$$F(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 - 4\xi^2\alpha\beta \quad (3.18)$$

Интегралы (3.17) отличаются от известного решения для случая сосредоточенной силы, приложенной в точке поверхности упругого полупространства [9], множителем  $X_3^*$  в подынтегральном выражении. Кроме того, в формулах (3.17) учтена зависимость от координаты  $x_3$  (в [9] были получены формулы для перемещений на поверхности упругого тела). Так же как в [9], преобразование интегралов (3.17) выполняется путем выбора подходящего контура интегрирования в комплексной плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ . Интегралы (3.17) имеют точно такие же, как в [9], два полюса  $\zeta = \pm k$ , которые являются корнями уравнения Релея

$$F(\zeta) = 0 \quad (3.19)$$

где  $k > k$ , и точно такие же, как в [9], четыре точки ветвления  $\zeta = \pm h$ ,  $\zeta = \pm k$  из-за наличия радикалов  $(\zeta^2 - h^2)^{1/2}$  и  $(\zeta^2 - k^2)^{1/2}$  в выражениях (3.18), (3.10) и, кроме того, два полюса  $\zeta = \pm p$  множителя  $X_3^*$ . Преобразование интегралов (3.17) здесь опущено, так как оно аналогично известным преобразованиям [9].

Область контакта ПЭ с упругим телом  $|x_1| \leq l$  и область вне контакта  $|x_1| > l$  следует рассматривать отдельно.

В результате преобразований интегралы (3.17) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= \frac{i}{2\mu} H_1^{(n)} e^{-i\kappa x_1} + \frac{i}{2\mu} P_1^{(n)} e^{-ipx_1} + iI_{k1}^{(n)} + iI_{h2}^{(n)} \\ u_3^{(n)} &= -\frac{i}{2\mu} K_1^{(n)} e^{-i\kappa x_1} - \frac{i}{2\mu} Q_1^{(n)} e^{-ipx_1} - 2I_{k3}^{(n)} - \frac{1}{2} I_{h4}^{(n)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_{gm}^{(n)} &= \frac{1}{\pi\mu} e^{-igx_1} \int_0^{\infty} R_m^{(n)} e^{-\eta x_1} d\eta, \quad g = k, h, \quad m = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{H_1^{(n)}}{T_1(\alpha_\kappa, \beta_\kappa)} &= \frac{K_1^{(n)}}{T_2(\alpha_\kappa, \beta_\kappa)} = \frac{Z_3(-\kappa)}{F'(\kappa)}, \quad \frac{P_1^{(n)}}{T_1(\alpha_p, \beta_p)} = \frac{Q_1^{(n)}}{T_2(\alpha_p, \beta_p)} = -\frac{1}{F(p)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} R_1^{(n)} &= \gamma_1(\alpha, \beta) \frac{\zeta\alpha\beta}{2F_2(\zeta)} Z_3(\zeta) \Big|_{\zeta=-k+i\eta}, \quad R_2^{(n)} = \gamma_2(\alpha, \beta) \frac{\zeta\Phi(\zeta)}{4F_2(\zeta)} Z_3(\zeta) \Big|_{\zeta=-h+i\eta} \\ R_3^{(n)} &= -\gamma_2(\beta, \alpha) \frac{\zeta\alpha\beta}{2F_2(\zeta)} Z_3(\zeta) \Big|_{\zeta=-k+i\eta}, \quad R_4^{(n)} = \gamma_1(\beta, \alpha) \frac{\alpha\Phi(\zeta)}{4F_2(\zeta)} Z_3(\zeta) \Big|_{\zeta=-h+i\eta} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_1(\alpha_g, \beta_g) &= g[\Phi(g)e^{\alpha_g x_3} - 2\alpha_g \beta_g e^{\beta_g x_3}], \quad T_2(\alpha_g, \beta_g) = \alpha_g[\Phi(g)e^{\alpha_g x_3} - 2g^2 e^{\beta_g x_3}] \\ \gamma_1(\alpha, \beta) &= 4\zeta^2 \Phi(\zeta) e^{\alpha x_3} - F(\zeta) e^{-\beta x_3} - F_1(\zeta) e^{\beta x_3} \\ \gamma_2(\alpha, \beta) &= F_1(\zeta) e^{\alpha x_3} - F(\zeta) e^{-\alpha x_3} - 4\Phi(\zeta) \alpha \beta e^{\beta x_3} \\ \Phi(\zeta) &= 2\zeta^2 - k^2, \quad \alpha_g = (g^2 - h^2)^{1/2}, \quad \beta_g = (g^2 - k^2)^{1/2}, \quad g = \kappa, p \\ F(\zeta) &= \Phi^2(\zeta) - 4\zeta^2 \alpha \beta, \quad F_1(\zeta) = \Phi^2(\zeta) + 4\zeta^2 \alpha \beta, \quad F_2(\zeta) = F(\zeta) F_1(\zeta) \\ F'(\zeta) &= 8\zeta \Phi(\zeta) - 8\zeta \alpha \beta - 4\zeta^3 \left( \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

В формулах (3.20), (3.21) следует положить

$$Z_3(\zeta) = \Omega^-(\xi) \quad \text{при} \quad |x_1| \leq l, \quad x_3 \leq 0 \quad (3.23)$$

$$P_1^{(n)} = 0, \quad Q_1^{(n)} = 0, \quad Z_3(\zeta) = \Omega^-(\xi) + \Omega^-(-\xi) \quad \text{при} \quad x_1 > l, \quad x_3 \leq 0 \quad (3.24)$$

*Вторая вспомогательная задача для упругого полупространства.* На поверхности упругого тела  $x_3 = 0$  заданы следующие напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}|_{x_3=0} &= 0, \quad \sigma_{13}|_{x_3=0} = X_{13}, \quad X_{13} = \sin px_1, \quad |x_1| \leq l \\ \sigma_{33}|_{x_3=0} &= 0, \quad \sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad |x_1| > l \end{aligned} \quad (3.25)$$

Точно так же, как в предыдущем случае, использование преобразования Фурье приводит к формулам

$$\sigma_{33}^*|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{13}^*|_{x_3=0} = X_{13}^*, \quad X_{13}^* = \frac{1}{4\pi} (\Omega^+(\xi) - \Omega^+(-\xi)) \quad (3.26)$$

Функция  $\Omega^+(\xi)$  определена формулой (3.15).

Из условий на плоскости  $x_3 = 0$  получим

$$(2\xi^2 - k^2)A - 2i\xi\beta B = 0, \quad 2i\xi\alpha A + (2\xi^2 - k^2)B = \frac{X_{13}^*}{\mu} \quad (3.27)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются как решение системы (3.27), после чего перемещения находятся в результате применения обратного преобразования Фурье к выражениям (3.11)

$$u_1 = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\xi^2 e^{\alpha x_3} + (2\xi^2 - k^2) e^{\beta x_3}) \frac{\beta X_{13}^*}{F(\xi)} e^{i\xi x_1} d\xi$$

$$u_3 = \frac{i}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\alpha\beta e^{\alpha x_3} - (2\xi^2 - k^2) e^{\beta x_3}) \frac{\xi X_{13}^*}{F(\xi)} e^{i\xi x_1} d\xi \quad (3.28)$$

Интегралы (3.28) могут быть преобразованы к удобному для вычислений виду

$$u_1^{(n)} = -\frac{i}{2\mu} H_2^{(n)} e^{-i\kappa x_1} - \frac{i}{2\mu} P_2^{(n)} e^{-ipx_1} - \frac{i}{2} J_{k1}^{(n)} - 2i J_{h2}^{(n)}$$

$$u_3^{(n)} = \frac{1}{2\mu} K_2^{(n)} e^{-i\kappa x_1} + \frac{1}{2\mu} Q_2^{(n)} e^{-ipx_1} + J_{k3}^{(n)} + J_{h4}^{(n)} \quad (3.29)$$

Здесь

$$J_{gm}^{(n)} = \frac{1}{\pi\mu} e^{-igx_1} \int_0^{\infty} S_m^{(n)} e^{-\eta x_1} d\eta, \quad g = k, h, \quad m = 1, 2, 3, 4$$

$$\frac{H_2^{(n)}}{T_2(\beta_\kappa, \alpha_\kappa)} = \frac{K_2^{(n)}}{T_1(\beta_\kappa, \alpha_\kappa)} = \frac{Z_1(-\kappa)}{F(\kappa)}, \quad \frac{P_2^{(n)}}{T_2(\beta_p, \alpha_p)} = \frac{Q_2^{(n)}}{T_1(\beta_p, \alpha_p)} = \frac{1}{F(p)} \quad (3.30)$$

$$S_1^{(n)} = \gamma_1(\alpha, \beta) \frac{\beta \Phi(\zeta)}{2F_2(\zeta)} Z_1(\zeta) \Big|_{\zeta = -k + i\eta}, \quad S_2^{(n)} = \gamma_2(\alpha, \beta) \frac{\zeta^2 \beta}{4F_2(\zeta)} Z_1(\zeta) \Big|_{\zeta = -h + i\eta}$$

$$S_3^{(n)} = \gamma_2(\beta, \alpha) \frac{\zeta \Phi(\zeta)}{4F_2(\zeta)} Z_1(\zeta) \Big|_{\zeta = -k + i\eta}, \quad S_4^{(n)} = \gamma_1(\beta, \alpha) \frac{\zeta \alpha \beta}{2F_2(\zeta)} Z_1(\zeta) \Big|_{\zeta = -h + i\eta}$$

Использованы обозначения (3.22).

В формулах (3.29), (3.30) следует положить

$$Z_1(\zeta) = \Omega^+(\xi) \text{ при } |x_1| \leq l, \quad x_3 \leq 0 \quad (3.31)$$

$$P_2^{(n)} = 0, \quad Q_2^{(n)} = 0, \quad Z_1(\zeta) = \Omega^+(\xi) - \Omega^+(-\xi) \text{ при } x_1 > l, \quad x_3 \leq 0 \quad (3.32)$$

Итак, получены решения, описывающие распространение волн в положительном направлении оси  $x_1$ . Формулы для волн, распространяющихся в противоположном направлении, записываются по аналогии.

**4. Условия контакта пьезоэлектрического элемента и упругого полупространства.** Предполагается, что в области контакта ПЭ и упругого тела  $|x_1| \leq l$ ,  $x_3 = 0$ , выполняются условия идеального контакта; они записываются в виде

$$u_1^a = u_1^s, \quad u_3^a = u_3^s, \quad \sigma_{13}^a = \sigma_{13}^s, \quad \sigma_{33}^a = \sigma_{33}^s \quad (4.1)$$

Верхние индексы  $a$  или  $s$  показывают, что величина принадлежит ПЭ или упругому полупространству соответственно.

Сначала рассматривается решение задачи для упругого полупространства в области контакта.

Из любой точки области контакта  $|x_1| \leq l$ ,  $x_3 = 0$ , волны распространяются в противоположных направлениях. Полученные решения вспомогательных задач описывают волны, распространяющиеся в положительном направлении  $x_1$ . Чтобы выполнить условия контакта, должны быть приняты во внимание перемещения и напряжения волн, распространяющихся в отрицательном направлении. С этой целью формулы для перемещений в области контакта для каждого значения  $n = 1, 2, \dots, N$  записываются с учетом четности функций  $u_3^{(n)}(x_1)$  и нечетности функций  $u_1^{(n)}(x_1)$

$$u_1^{(n)}(x_1) = u_{1+}^{(n)}(+x_1) - u_{1-}^{(n)}(-x_1), \quad u_3^{(n)}(x_1) = u_{3+}^{(n)}(+x_1) + u_{3-}^{(n)}(-x_1) \quad (4.2)$$

Нижние индексы плюс или минус означают принадлежность перемещения волне, распространяющейся в положительном или отрицательном направлении оси  $x_1$  соответственно.

Предполагается, что расчет вспомогательных задач (разд. 3) выполнен. Это значит, что перемещения упругого тела  $u_{1+}^{(n)}$  и  $u_{3+}^{(n)}$  вычислены на отрезке  $|x_1| \leq l$  для любого  $n$  от 1 до  $N$ . Формулы для волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси  $x_1$ , выписываются по аналогии с формулами (3.20)–(3.24), (3.29)–(3.32).

Комбинация перемещений  $u_{1+}^{(n)}$ ,  $u_{3+}^{(n)}$  и  $u_{1-}^{(n)}$ ,  $u_{3-}^{(n)}$ , согласно формулам (4.2), дает полные перемещения в области контакта. Затем вычисленные в интервале  $|x_1| \leq l$  полные перемещения продолжены и разложены в ряды Фурье таким же образом, как это было сделано для  $E_3$  (формулы (2.11), (2.12)). Ряды Фурье для полных перемещений представлены в следующем виде (суммирование по  $n$  ведется от  $n = 1$  до  $N$ , по  $j$  – от  $j = 1$  до  $N$ ):

для первой вспомогательной задачи

$$u_1^{(n)} = \sum_j p_{jn} \sin a_j x_1, \quad u_3^{(n)} = \sum_j q_{jn} \cos a_j x_1 \quad (4.3)$$

для второй вспомогательной задачи

$$u_1^{(n)} = \sum_j y_{jn} \sin a_j x_1, \quad u_3^{(n)} = \sum_j z_{jn} \cos a_j x_1 \quad (4.4)$$

Полное решение задачи для упругого полупространства равно сумме решений вспомогательных задач, умноженных на неизвестные постоянные  $A_n$  и  $B_n$

$$u_1^s = \sum_n \sum_j (A_n p_{jn} + B_n y_{jn}) \sin a_j x_1, \quad u_3^s = \sum_n \sum_j (A_n q_{jn} + B_n z_{jn}) \cos a_j x_1 \quad (4.5)$$

$$\sigma_{33}^s = \sum_n A_n \cos a_n x_1, \quad \sigma_{13}^s = \sum_n B_n \sin a_n x_1$$

Постоянные  $A_n$  и  $B_n$  находятся из условий контакта ПЭ и упругого полупространства.

Затем следует преобразовать формулы для напряжений ПЭ в области контакта.

В области контакта ( $|x_j| \leq l$ ) перемещения упругого тела равны перемещениям ПЭ. Согласно второй гипотезе (разд. 2), перемещения ПЭ не меняются по толщине, поэтому формулы для перемещений упругого тела в области контакта (4.5) в дальнейшем будут использоваться для определения напряжений ПЭ.

Напряжение  $\sigma_{11}^a$  может быть выражено через перемещения путем подстановки выражений (4.5) в соотношения (2.4) и затем в (2.2) при учете формул (2.12). Получим

$$\sigma_{11}^a = \frac{1}{s_{11}^E(1 - \nu_p^2)} \sum_j \left[ a_j \sum_n (A_n p_{jn} + B_n y_{jn}) - d_{31}(1 + \nu_p) \phi_j \right] \cos a_j x_j \quad (4.6)$$

Формулы для напряжений  $\sigma_{13}^a$  (2.9) и  $\sigma_{33}^a$  (2.10) могут быть записаны через перемещения с помощью уравнений (4.6)

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^a &= \sum_j \left[ \sum_n \chi_j (A_n p_{jn} + B_n y_{jn}) + \phi_j \phi_j \right] \sin a_j x_j \\ \sigma_{33}^a &= \sum_n \left[ \sum_n \left( \frac{t}{2} \chi_j a_j (A_n p_{jn} + B_n y_{jn}) + t \rho \omega^2 (A_n q_{jn} + B_n z_{jn}) \right) + \theta_j \phi_j \right] \cos a_j x_j \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\chi_j = t \left( \rho_p \omega^2 - \frac{a_j^2}{s_{11}^E(1 - \nu_p^2)} \right), \quad \phi_j = \frac{t d_{31} a_j}{s_{11}^E(1 - \nu_p)} \phi_j, \quad \theta_j = \frac{t^2 d_{31} a_j^2}{2 s_{11}^E(1 - \nu_p)} \phi_j$$

Уравнения (4.7) описывают напряжения  $\sigma_{13}^a$  и  $\sigma_{33}^a$  ПЭ в области контакта с упругим полупространством. Уравнения (4.5) определяют те же напряжения упругого полупространства. Согласно последним двум условиям контакта (4.1), они должны быть равны.

Система уравнений относительно постоянных  $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N$  получается в результате подстановки выражений (4.7) и (4.5) в последние два условия (4.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях. Она содержит  $2N$  уравнений и  $2N$  неизвестных постоянных  $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N$ . В результате преобразований эта система приводится к более удобной для вычислений форме

$$\sum_n (g_{jn} A_n + b_{jn} B_n) = \phi_j, \quad \sum_n (c_{jn} A_n + r_{jn} B_n) = \theta_j \quad (4.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_{jn} &= \chi_j p_{jn}, \quad b_{jn} = \chi_j y_{jn} + \delta_{jn}, \quad \delta_{jn} = \begin{cases} 0, & j \neq n \\ 1, & j = n \end{cases} \\ c_{jn} &= -\frac{t a_j}{2} \chi_j p_{jn} - t \rho \omega^2 q_{jn} + \delta_{jn}, \quad r_{jn} = -\frac{t a_j}{2} \chi_j y_{jn} - t \rho \omega^2 z_{jn} \end{aligned} \quad (4.9)$$

После вычисления постоянных  $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N$  все искомые величины могут быть легко найдены по предыдущим формулам: перемещения и напряжения в обла-

сти  $|x_1| \leq l$ ,  $x_3 = 0$  вычисляются по формулам (4.5), при  $x_3 < 0$  они вычисляются как сумма полученных решений первой и второй вспомогательных задач, умноженных на постоянные  $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N$ .

Следует отметить, что полученное решение для ПЭ и упругого полупространства справедливо всюду, за исключением малой окрестности точек  $x_1 = \pm l$ ,  $x_3 = 0$ , где решение имеет особенности. Эти особые напряженно-деформированные состояния локализованы в небольшой окрестности особых точек и затухают очень быстро при удалении от них. Способы, позволяющие найти эти особые решения, известны (см., например, [15, 16]).

**5. Численный пример.** В качестве примера рассматривается упругое полупространство из стали, колебания которого возбуждается ПЭ из пьезокерамики PZT-5 с толщиной  $t = 0.001$  м и шириной  $2l = 0.02$  м.

В области контакта электрическая нагрузка  $E_3$  определяется формулой (2.7). Как отмечено выше, величина  $E_3$  может быть продолжена различными способами. Здесь она взята в виде периодической функции с периодом  $2L = 8l$ :

$$E_3 = \frac{2V}{t} \begin{cases} -1, & 0 \leq x_1 \leq l \\ -((x_1/l - 1)^2 - 1), & l < x_1 \leq 2l \\ ((x_1/l - 3)^2 - 1), & 2l < x_1 \leq 3l \\ 1, & 3l < x_1 \leq 4l \end{cases} \quad (5.1)$$

Ряд Фурье для функции (5.1) имеет вид

$$E_3 = -\frac{2V}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2n-1} \cos a_{2n-1} x_1, \quad \Phi_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1} 128}{(2n-1)^3 \pi^3} \left( 1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{4} \right), \quad a_{2n-1} = \frac{(2n-1)\pi}{L}$$

Перемещения  $u_{1+}^{(n)}$  и  $u_{3+}^{(n)}$  волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $x_1$ , вычисляются по формулам, дающим решения первой и второй вспомогательных задач. Полные перемещения в области контакта  $u_1^{(n)}$  и  $u_3^{(n)}$  находятся по формулам (4.2) как линейная комбинация перемещений  $u_{1+}^{(n)}$ ,  $u_{3+}^{(n)}$ ,  $u_{1-}^{(n)}$  и  $u_{3-}^{(n)}$  волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси  $x_1$ . Полные перемещения могут быть продолжены следующим образом:

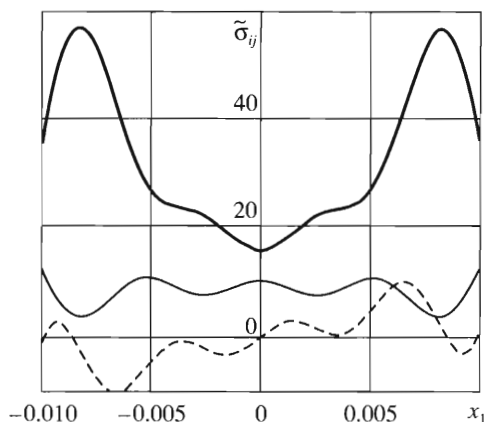
$$u_1^{(n)} = \begin{cases} u_1^{(n)}(x_1), & 0 \leq x_1 \leq l \\ u_1^{(n)}(l), & l \leq x_1 \leq L-1 \\ u_1^{(n)}(L-x_1), & L-1 \leq x_1 \leq L \end{cases}, \quad u_3^{(n)} = \begin{cases} u_3^{(n)}(x_1), & 0 \leq x_1 \leq l \\ (2-x_1/l)u_3^{(n)}(l), & l \leq x_1 \leq L-1 \\ u_3^{(n)}(L-x_1), & L-1 \leq x_1 \leq L \end{cases} \quad (5.2)$$

Следует отметить, что способ продолжения функций (5.2) должен быть выбран так, чтобы обеспечить быструю сходимость решения в виде рядов Фурье.

После этого выполняются следующие шаги: вычисляются коэффициенты  $p_{jn}$ ,  $q_{jn}$ ,  $y_{jn}$ ,  $z_{jn}$  рядов Фурье (4.3), (4.4); они подставляются в систему (4.8), из которой затем находятся неизвестные постоянные  $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N$ .

В рассматриваемом частном случае постоянные  $A_n, B_n$  равны:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.917 \cdot 10^{12}, & A_3 &= -0.691 \cdot 10^{12}, & A_5 &= 0.427 \cdot 10^{12}, & A_7 &= -0.217 \cdot 10^{11} \\ B_1 &= 0.920 \cdot 10^{13}, & B_3 &= -0.578 \cdot 10^{13}, & B_5 &= 0.226 \cdot 10^{13}, & B_7 &= -0.929 \cdot 10^{11} \end{aligned} \quad (5.3)$$



Фиг. 2

Видно, что полученное решение сходится и коэффициенты  $A_n$  значительно меньше, чем  $B_n$ . Это означает, что главную роль в возбуждении акустических волн играет тангенциальная нагрузка в области контакта, нормальная нагрузка такой же величины вызывает на порядок меньшие перемещения и напряжения.

Результаты расчета представлены в виде графиков (фиг. 2–6) для величин с индексом “звездочка”, которые определяются формулами

$$\tilde{\sigma}_{1i} = -\frac{\sigma_{i3} s_{11}^E}{V d_{31}}, \quad \tilde{\sigma}_{11} = -\frac{\sigma_{11} s_{11}^E}{V d_{31}}, \quad \tilde{u}_i = -\frac{u_i}{V d_{31}} \quad (5.4)$$

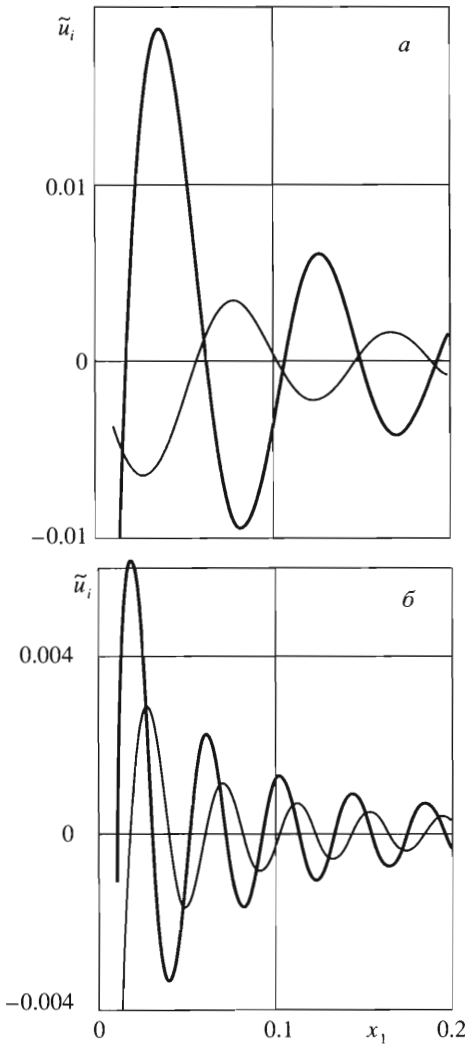
На фиг. 2 представлено распределение амплитудных значений напряжений  $\tilde{\sigma}_{13}$  (штриховая линия),  $\tilde{\sigma}_{33}$  (тонкая линия),  $\tilde{\sigma}_{11}$  (жирная линия) в области контакта  $|x_1| \leq l$ . В разд. 2 принята гипотеза о том, что напряжения  $\sigma_{11}$  значительно больше напряжений  $\sigma_{33}$ . Гипотеза использована только в уравнениях состояния. Результаты вычисления напряжений из уравнений равновесия подтверждают эту гипотезу.

На фиг. 3 показано, как затухают перемещения продольных (а) и сдвиговых (б) объемных волн при удалении от источника колебаний по поверхности тела вдоль оси  $x_1$ , жирными линиями изображены перемещения  $\tilde{u}_3$ , тонкими –  $\tilde{u}_1$ .

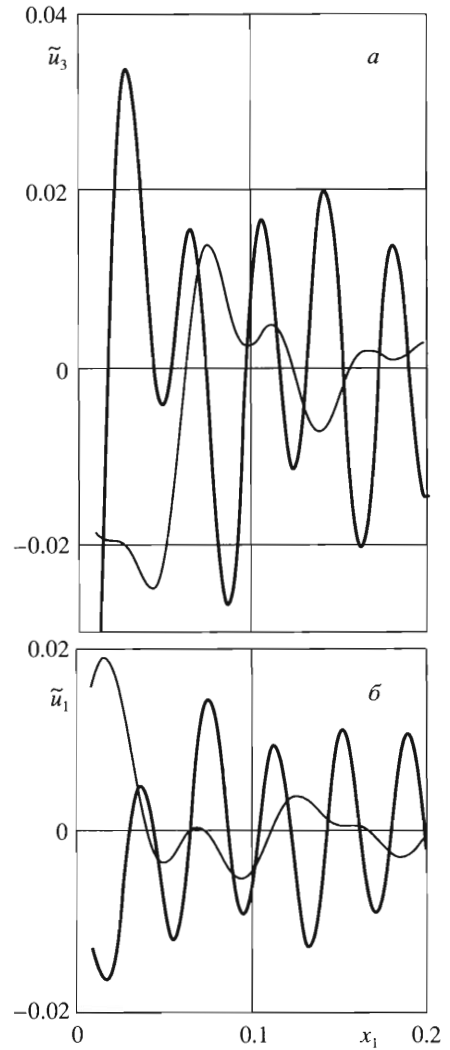
Графики на фиг. 4 показывают зависимость амплитудных значений перемещений  $\tilde{u}_3$  (а) и  $\tilde{u}_1$  (б), являющихся суммой перемещений поверхностных и объемных волн, от координаты  $x_1$  вне ПЭ. Жирной линией показаны перемещения на поверхности упругого тела ( $x_3 = 0$ ), тонкой – перемещения на расстоянии  $x_3 = 0.06$  м от поверхности тела. Из фиг. 4 видно, что на расстоянии более 0.1 м от ПЭ по поверхности упругого тела волны становятся почти периодическими функциями, т.е. затухают объемные волны и остаются поверхностные.

Фиг. 5 показывает затухание максимальных значений перемещений поверхностных волн  $\tilde{u}_3$  (жирная линия) и  $\tilde{u}_1$  (тонкая линия) в глубь от поверхности тела.

На фиг. 6 максимальные значения перемещения  $\tilde{u}_3$  поверхностных волн представлены как функция частоты колебаний ПЭ. Видно, что при одной и той же интенсивности электрической нагрузки перемещения существенно зависят от частоты колебаний. В исследуемом интервале частот имеется несколько максимумов. Один



Фиг. 3

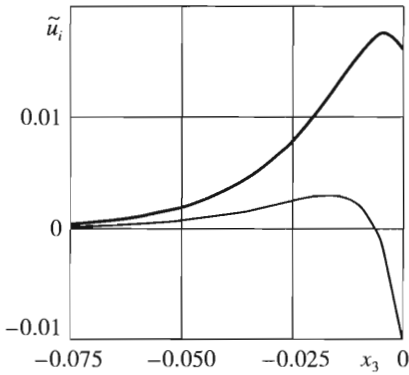


Фиг. 4

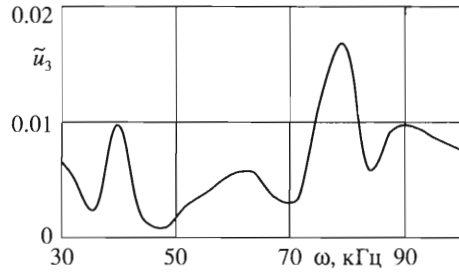
из них достигается при круговой частоте колебаний, равной 78 кГц. Графики 2–5 построены именно для этой частоты.

**6. Выводы.** Предложен способ построения аналитического решения контактной динамической задачи для ПЭ и упругого полупространства. Полученное аналитическое решение позволяет найти все искомые величины, изучить электроупругое состояние ПЭ и распространение акустических волн в упругом полупространстве.

Предложенный способ решения продемонстрирован на численном примере, в результате расчета найдены перемещения и напряжения ПЭ и упругого полупространства как на поверхности тела, так и во внутренних точках тела; проанализирована зависимость максимальных амплитудных значений перемещений поверхностных волн от частоты колебаний ПЭ. Показано, что эти перемещения достигают максимума при определенной частоте; оценено расстояние от источника колебаний, на



Фиг. 5



Фиг. 6

котором затухают объемные волны и остаются только поверхностные волны; исследовано затухание волн при удалении от источника колебаний в глубь тела.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Lord Rayleigh*. Scientific Papers. Cambridge: Univ. Press, V. 1–6. 1899–1920.
2. *Lamb H.* Dynamic Theory of Sound. L. E. Arnold, 1931. 307 p.
3. *Love A.E.H.* Some Problems of Geodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1911. 180 p.
4. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1944. 643 p. = *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 676 с.
5. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. *Dieulesant E., Royer D.* Ondes Elastique dans les Solides. Paris: Masson, 1974. 407 p. = *Дьеуэсан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах, пер. с франц. М.: Наука, 1982. 424 с.
7. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
8. *Wang Q., Quek S.Y., Varadan V.K.* Love waves in piezoelectric coupled solid media // Smart Mater. Struct. 2001. V. 10. P. 380–388.
9. *Bath M.* Mathematical Aspects of Seismology. Amsterdam: Elsevier, 1968. 415 p.
10. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физ. акустика. / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч. А. С. 204–326.
11. *Lee C.K.* Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. P. I. Governing equations and reciprocal relationships // J. Acoust. Soc. America, 1990. V. 87. № 3. P. 1144–1158.
12. *Tzou H.S.* Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). Academic Publisher, Dordrecht etc.: Kluwer, 1993. 480 p.
13. *Rogacheva N.N.* The Theory of Piezoelectric Shells and Plates. Boca Raton etc.: CRC Press, 1994. 260 p.
14. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
15. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестностях ребра // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178–186.
16. *Williams M.L.* The complex-variable approach to stress singularity // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1956. V. 23, №3. P. 477–478.