

УДК 539.3

© 2005 г. В. Н. Паймушин, В. И. Шалашилин

**О СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ
В КВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ
И ПРОБЛЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ УТОЧНЕННЫХ ВАРИАНТОВ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
СЛОИСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

Анализируются два варианта приближенных соотношений теории деформаций сплошных сред, известных как полный (см., например [1]) и неполный (см., например [2, 3]) варианты квадратичного приближения нелинейной теории. Показано, что соотношения полного варианта, определяющие деформации удлинений, и соотношения неполного варианта, определяющие сдвиговые деформации, являются некорректными, так как при решении конкретных задач приводят к появлению ложных точек бифуркаций. Для малых деформаций удлинений и средних деформаций сдвигов строится непротиворечивый вариант кинематических соотношений в квадратичном приближении, представляющий собой комбинацию соотношений полного и неполного вариантов. Рассматриваются простейшие примеры его применения, связанные со сведением двумерной нелинейной задачи деформирования полосы в виде стержня к одномерным уравнениям и последующим их использованием для выявления возможных форм потери устойчивости (ФПУ) при характерных видах их нагружения. Получены принципиально новые результаты, связанные с исследованием ФПУ стержня при его равномерном поперечном сжатии и чистом сдвиге. В первом случае существенным оказывается поведение нагрузки: если она остается нормальной к деформированной оси стержня, то бифуркация возможна только по сдвиговой форме, если же сохраняет свое направление, то кроме бифуркации по сдвиговой форме возможна изгибная ФПУ, совпадающая по форме с эйлеровой, при которой сдвиги отсутствуют. Во втором случае, т.е. при действии нагрузки, вызывающей чистый сдвиг стержня, для выявления ее бифуркационных значений сдвиговые деформации необходимо описывать нелинейными кинематическими соотношениями в полном квадратичном варианте, в то время как при отсутствии докритических касательных напряжений допустимо использование упрощенных соотношений. Рассматривается также пример исследования ФПУ кругового кольца под действием равномерного внешнего давления, имеющих нулевую изменчивость в окружном направлении.

1. Соотношения теории деформаций в квадратичном приближении. Если пространство тела в начальном (недеформированном) состоянии отнести к прямоугольным декартовым координатам x, y, z , а через u, v, w обозначить компоненты перемещений, то при произвольных перемещениях для деформаций удлинений E_x, E_y, E_z и сдвиговых деформаций $\sin \gamma_{xy}, \sin \gamma_{xz}, \sin \gamma_{yz}$ имеют место формулы

$$E_x = (1 + 2\varepsilon_{xx})^{1/2} - 1, \dots; \quad \sin \gamma_{xy} = (1 + 2\varepsilon_{xx})^{-1/2} (1 + 2\varepsilon_{yy})^{-1/2} \varepsilon_{xy}, \dots \quad (1.1)$$

которыми с использованием шести компонент деформаций

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2), \dots; \quad \varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}, \dots \quad (1.2)$$

описывается произвольное деформированное состояние тела. Предельно ясный вывод формул (1.1), (1.2) и их всесторонний анализ даны Новожиловым [1]; эти формулы в настоящее время можно видеть практически в любой научной и учебной литературе по нелинейной теории упругости.

Если деформации удлинений малы, т.е. $E_x \approx \varepsilon \ll 1$, то из первой группы соотношений (1.1) с неподдающейся сомнению строгостью при соблюдении степени точности $2 + E_x \approx 2$ следуют соотношения

$$E_x \approx \varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2), \dots \quad (1.3)$$

а с точностью $(1 + 2E_x)^{-1/2} \approx 1$ из второй группы соотношений (1.1) получаем

$$\sin \gamma_{xy} \approx \varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}, \dots \quad (1.4)$$

или при малых углах сдвигов γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz}

$$\gamma_{xy} \approx \varepsilon_{xy} + u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}, \dots \quad (1.5)$$

Эти соотношения были выведены [1] наряду с формулами (1.3) и широко используются как кинематические соотношения в квадратичном приближении.

Доннеллом [2] был дан вывод и другого, неполного квадратичного варианта кинематических соотношений, когда E_x , ..., $\sin \gamma_{xy}$, ... вычисляются с точностью до квадратов и попарных произведений производных от перемещений по формулам

$$E_x = u_{,x} + \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2), \dots \quad (1.6)$$

$$\sin \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - u_{,x}v_{,x} - u_{,y}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}, \dots \quad (1.7)$$

Ф.Н. Шклярчуком [3] был рассмотрен также более простой вариант соотношений (1.7)

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}, \dots \quad (1.8)$$

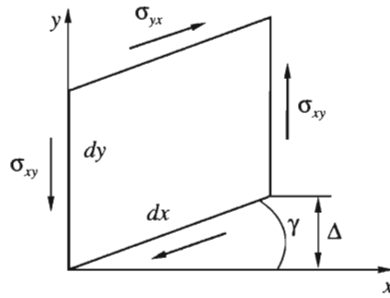
Необходимость оценки качества приведенных выше трех вариантов кинематических соотношений в квадратичном приближении возникла в связи с появлением ложных точек бифуркации при решении конкретных задач, которые были сформулированы [4, 5], исходя из соотношений вида (1.3). Одна из таких оценок может быть получена на основе рассмотрения одноосного растяжения – сжатия и чистого сдвига. Краткий анализ такого рода был дан ранее [6].

2. Одноосное растяжение – сжатие. Было показано [4], что при одноосном растяжении – сжатии стержня силой P , приложенной на его концах, формулы (1.6) предпочтительнее формул (1.3); более того, в этом случае формулы (1.6) применимы при любых упругих деформациях. Это можно показать следующим образом.

Вариация работы сил, приложенных к элементарному параллелепипеду, который до деформации имел размеры dx , dy , dz и сдеформировался при нагружении вдоль оси x , по В.В. Новожилову будет равна

$$\delta dA = \sigma_{xx}^* \delta \varepsilon_{xx} dx dy dz; \quad \sigma_{xx}^* = \frac{S_x^*}{S_x} \frac{\sigma_{xx}}{(1 + 2\varepsilon_{xx})^{1/2}} \quad (2.1)$$

$$S_x^* = [(1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz}) - \varepsilon_{yz}^2]^{1/2} dy dz, \quad S_x = dy dz$$



Фиг. 1

Тогда

$$\delta dA = (\sigma_{xx} S_x^*) \delta[(1 + 2\varepsilon_{xx})^{1/2} - 1] dx = dP_x \delta(E_x dx) \tag{2.2}$$

Здесь dP_x – нормальная сила, приложенная к грани $dydz$ элемента.

Последнее выражение можно было написать сразу как принцип возможных перемещений для деформированного элемента длиной $(1 + E_x)dx = dx + u'dx$ ($u' = du/dx$); тогда

$$E_x = u' \tag{2.3}$$

Выражение (1.6) как раз приводит к формуле (2.3), которая в рассматриваемом случае в силу равенств $v_x = w_x = 0$ следует и при подстановке первого выражения (1.2) в первое равенство (1.1).

В то же время приближение (1.3) дает

$$E_x \approx \varepsilon_{xx} = u' + u'^2/2 \tag{2.4}$$

что в задаче о сжатии стержня силой P приводит к ложному бифуркационному значению $P = EF$ (E – модуль упругости при растяжении, F – площадь поперечного сечения) – “абсурдной” потере устойчивости стержня [4].

3. Чистый сдвиг. Для чистого сдвига в плоскости xu вариация работы по В.В. Новожилову будет равна

$$\delta dA = \sigma_{xy}^* \delta \varepsilon_{xy} dx dy dz; \quad \sigma_{xy}^* = \frac{S_x^* \sigma_{xy}}{S_x (1 + E_y)}, \quad 1 + E_y = (1 + 2\varepsilon_{yy})^{1/2} \tag{3.1}$$

На фиг. 1 показано одно из возможных положений элемента относительно координатных осей; другие положения отличаются лишь поворотом как жесткого тела. Для изображенного варианта $u = u(x)$, $v = v(x)$. При этом перемещения должны быть такими, чтобы $E_x = E_y = 0$; их легко найти:

$$v = x \sin \gamma, \quad u = x(\cos \gamma - 1) \tag{3.2}$$

Можно убедиться, что тогда $E_x = E_y = 0$, $S_x^* = S_x$. Кроме того, для чистого сдвига $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy}^* = \sigma_{xy}$. В результате имеем

$$\delta dA = \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} dx dy dz \tag{3.3}$$

Если записать δdA по принципу возможных перемещений, то для чистого сдвига в силу $\sigma_{xx} = 0$ имеем $\tau_{xy} = \sigma_{xy}$ и

$$\delta dA = \sigma_{xy} \delta(dx \sin \gamma) dy dz \quad (3.4)$$

Сравнивая выражения (3.3), (3.4), можно увидеть, что они совпадают, если для ϵ_{xy} взять формулу (1.4); в этом случае $\epsilon_{xy} = \sin \gamma$ при любых γ .

Если же принять соотношения (1.7), то

$$\sin \gamma_{xy} = \sin \gamma - (\cos \gamma - 1) \sin \gamma \approx \sin \gamma + \sin^3 \gamma / 2 \quad (3.5)$$

В этом случае возможна такая же ситуация, что и при сжатии, когда использование приближения (1.3) приводит к появлению ложной точки бифуркации в решении [4].

Таким образом, лучшую аппроксимацию для элементарных состояний дает смешанный вариант кинематических соотношений в квадратичном приближении, когда деформации удлинений вычисляются по формулам (1.6) (по Доннеллу), а сдвиговые деформации – по формулам (1.4) (по Новожилову).

И наконец, следует обратить внимание на то, что, как видно из фиг. 1, энергетически согласованным обобщенным перемещением для τ_{xy} будет $\sin \gamma = \sin \gamma_{xy}$, а не $\gamma = \gamma_{xy}$, т.е. мерой сдвиговой деформации является $\sin \gamma$, а не γ . Правда, данное замечание относится лишь к форме представления закона Гука при сдвиге и к задаче обработки соответствующих экспериментальных данных при значительных сдвиговых деформациях. Таким образом, для линейно-упругого материала при значительных деформациях сдвига закон Гука должен быть представлен в виде (G – модуль сдвига) $\tau = G \sin \gamma$, а не в виде $\tau = G\gamma$, как это везде принято.

С учетом этого замечания соотношения (1.8) следует писать в виде

$$\sin \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} + \dots \quad (3.6)$$

Тогда непротиворечивым будет также вариант сочетания соотношений (1.6) с (3.6).

При малых сдвигах $\sin \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}$, и тогда непротиворечивыми являются зависимости (1.6) в сочетании с (1.8).

4. Сведение двумерных кинематических соотношений к одномерным для прямоугольной полосы (стержня) на основе уточненной модели Тимошенко. С целью оценки качества выведенных кинематических соотношений целесообразно рассмотреть простейшие примеры их применения, связанные со сведением двумерной нелинейной задачи деформирования полосы к одномерным уравнениям и последующим их использованием для выявления возможных форм потери устойчивости (ФПУ) при характерных видах нагружения.

Предположим, что на краях прямоугольной полосы, имеющей размеры a и $2h$, приложены постоянные по величине погонные усилия p_x , p_y и p_{xy} , показанные на фиг. 2. Примем для перемещений U , V аппроксимации

$$U = u(x) + y\gamma(x), \quad V = v(x) + y\varphi(x) \quad (4.1)$$

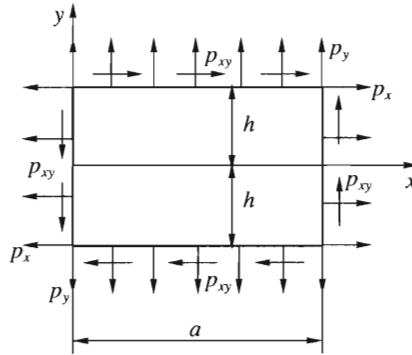
хорошо известные в теории однослойных и многослойных оболочек (уточненная модель Тимошенко при учете поперечного обжатия). Здесь $u(x)$ и $v(x)$ – перемещения точек оси x полосы.

В рассматриваемой двумерной задаче для деформации удлинений имеем

$$E_x = e_{11} + e_{12}^2/2, \quad E_y = e_{22} + e_{21}^2/2; \quad e_{11} = u_{,x}, \quad e_{12} = v_{,x}, \quad e_{13} = w_{,x}, \dots \quad (4.2)$$

а для сдвиговой деформации справедлива формула

$$\sin \gamma_{12} = e_{12}(1 + e_{22}) + e_{21}(1 + e_{11}) \quad (4.3)$$



Фиг. 2

при использовании полных кинематических соотношений (1.4) и формула

$$\gamma_{12} = e_{12} + e_{21} \tag{4.4}$$

при использовании неполных соотношений (1.6).

В рамках представлений (4.1) для входящих в формулы (4.2)–(4.4) величин e_{ij} имеем

$$e_{11} = u' + y\gamma', \quad e_{22} = \varphi, \quad e_{12} = v' + y\varphi', \quad e_{21} = \gamma \tag{4.5}$$

При их использовании для полосы с параметром тонкостенности $2h/a = \epsilon \ll 1$ в соответствии с формулами (4.2) приходим к редуцированным кинематическим соотношениям

$$E_x = E_x^0 + y\chi + y^2\varphi'^2/2 \approx E_x^0 + y\chi, \quad E_y = \varphi + \gamma^2/2 \tag{4.6}$$

где

$$E_x^0 = u' + v'^2/2, \quad \chi = \gamma' + v'\varphi' \tag{4.7}$$

Считая, что в силу соотношения $2h/a = \epsilon \ll 1$ справедливо приближение $\gamma_{12} = \gamma_{12}(x)$, для определения деформации сдвига примем редуцированную формулу

$$\sin \gamma_{12} \approx (1 + \varphi)v' + (1 + u')\gamma \tag{4.8}$$

получающуюся при подстановке выражений (4.5) в соотношение (4.3) в полном квадратичном приближении, и формулу в линейном приближении

$$\gamma_{12} = v' + \gamma \tag{4.9}$$

получающуюся при использовании соотношения (4.4) в неполном квадратичном приближении.

5. Одномерные уточненные уравнения равновесия полосы и ее формы потери устойчивости при разных видах нагружения. В соответствии с приближениями (4.6) и аппроксимацией $\gamma_{12} = \gamma_{12}(x)$ введем в рассмотрение погонные усилия и моменты

$$N_x = \int_{-h}^h \sigma_x dy, \quad M = \int_{-h}^h \sigma_x y dy, \quad N_y = \int_{-h}^h \sigma_y dy, \quad N_{xy} = \int_{-h}^h \tau_{xy} dy \tag{5.1}$$

приведенные к осевой линии x , и вариацию потенциальной энергии деформации полосы представим в виде

$$\delta U = \int_0^a [N_x \delta E_x^0 + M \delta \chi + N_y \delta E_y + N_{xy} \delta (\sin \gamma_{12})] dx \quad (5.2)$$

а при использовании аппроксимаций (4.1) для вариации работы внешних сил, приложенных на краях полосы (фиг. 2), приходим к выражению

$$\delta A = (2hp_x \delta u + 2hp_{xy} \delta v) \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a (2hp_y \delta \varphi + 2hp_{xy} \delta \gamma) dx \quad (5.3)$$

Уравнения равновесия и статические граничные условия на краях полосы $x = 0$ и $x = a$ при использовании выражений (5.2), (5.3) могут быть получены исходя из вариационного уравнения

$$\delta U - \delta A = 0 \quad (5.4)$$

В дальнейшем их целесообразно представить при разных степенях приближения.

Уравнения и бифуркации их решений, соответствующие использованию приближения (4.9) и модели Тимошенко без учета поперечного обжатия. Данная модель деформирования – простейшая из известных уточненных моделей, в соответствии с которой необходимо положить

$$\sigma_y = N_y \equiv 0 \quad (5.5)$$

В дополнение к соотношениям (5.5) также положим

$$\varphi \equiv 0 \quad (5.6)$$

что в рамках принятого предположения (5.5) не принципиально.

В силу предположения (5.5) устанавливаются физические соотношения

$$N_x = B_1 E_x^0 = B_1 (u' + v'^2/2), \quad B_1 = 2hE_1 \quad (5.7)$$

$$M = D_1 \chi = D_1 \gamma', \quad D_1 = 2h^3 E_1 / 3 \quad (5.8)$$

$$N_{xy} = B_{12} \gamma_{12} = B_{12} (v' + \gamma), \quad B_{12} = 2hG_{12} \quad (5.9)$$

где E_1 – модуль упругости в направлении x , G_{12} – модуль сдвига в плоскости xu .

В рамках принятых упрощений, исходя из соотношений (4.7), (4.9), (5.2)–(5.4), можно получить уравнения равновесия

$$N_x' = 0, \quad Q_y' = (N_{xy} + N_x v')' = 0, \quad M' - N_{xy} + 2hp_{xy} = 0 \quad (5.10)$$

и граничные условия на краях $x = 0$ и $x = a$

$$N_x = 2hp_x \text{ при } \delta u \neq 0, \quad N_{xy} + N_x v' = 2hp_{xy} \text{ при } \delta v \neq 0, \quad M = 0 \text{ при } \delta \gamma \neq 0 \quad (5.11)$$

Так как составленные уравнения нелинейны только относительно одной неизвестной функции v (прогиба), на их основе целесообразно рассмотреть лишь случай чистого осевого сжатия полосы погонной силой $p_x = -p$.

При таком случае нагружения граничные условия N_x запишутся в виде

$$N_x = -2hp \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a$$

в силу чего интегралом первого уравнения (5.8) будет функция

$$N_x = B_1(u' + v^2/2) = -2hp \quad (5.12)$$

Для второго уравнения (5.10) граничные условия формулируются в виде

$$v = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a \quad (5.13)$$

если оба торцевых сечения неподвижны в направлении u или в виде

$$v = 0 \text{ при } x = 0, \quad N_{xy} - 2hpv' = 0 \text{ при } x = a \quad (5.14)$$

если правое торцевое сечение свободно смещается в направлении u .

При использовании соотношения (5.9) второе уравнение (5.10) запишется в виде

$$N_{xy} = B_{12}(v' + \gamma) = 2hpv' + C_1 \quad (5.15)$$

где C_1 – постоянная интегрирования. Отсюда находим

$$\gamma = (C_1 + 2hpv')/B_{12} - v' \quad (5.16)$$

а при подстановке выражения (5.15) в последнее уравнение (5.10) и использовании соотношения (5.8) приходим к уравнению

$$D_1\gamma'' - 2hpv' = C_1$$

и его первому интегралу, внося в который выражение (5.16), получим разрешающее уравнение задачи (C_2 – постоянная интегрирования)

$$D_1\left(1 - \frac{2hp}{B_{12}}\right)v'' + 2hpv = -C_1x - C_2 \quad (5.17)$$

Граничные условия формулируются в виде (5.3) или (5.4).

Общее решение уравнения (5.17) кроме C_1 и C_2 содержит еще две постоянные интегрирования. Для их определения служат граничные условия

$$\gamma'(x=0) = 0, \quad \gamma'(x=a) = 0$$

имеющие место при шарнирном опирании торцевых сечений.

Сформулированные задачи и описывающие их уравнения, составленные в рамках указанной выше степени точности, полностью эквивалентны задачам и их решениям, подробно проанализированным В.В. Васильевым [7]. Не останавливаясь на их исследовании, отметим, что они имеют два бифуркационных значения нагрузки $2hp$. Одно из них определяется по формуле ($2hp_E$ – известная критическая нагрузка по Эйлеру)

$$2hp_*^u = \frac{2hp_E}{1 + 2hp_E/B_{12}}$$

Оно отвечает потере устойчивости стержня по изгибной форме и найдено с учетом поперечного сдвига. (Как указывает Тимошенко ([8], с. 147), впервые влияние перегибающей силы на критическую силу учел Энгессер в 1891 г.) А второй точке бифуркации отвечает критическая нагрузка

$$p_*^c = G_{12}$$

при достижении которой происходит реализация чисто сдвиговой ФПУ.

Отметим, что обсуждение вопросов, связанных с этой ФПУ стержней при их осевом сжатии, имеется в книге [7], а также и в других работах ([9] и др.). Тем не менее принципиально важно подчеркнуть, что для выявления чисто сдвиговой ФПУ в условиях чистого одностороннего сжатия полосы (стержня) достаточно ограничиться использованием простейшей кинематической модели Тимошенко, основанной на 1) учете деформации сдвига в плоскости xu в рамках соответствующего кинематического соотношения лишь в линейном приближении; 2) пренебрежении нормальным напряжением и деформацией в направлении, ортогональном направлению сжатия.

Заметим, что при других видах нагружения, когда $N_x \equiv 0$, задачи, формулируемые исходя из соотношений (5.7)–(5.11), линейны, и их решения не имеют точек бифуркаций.

Уравнения и бифуркации их решений, соответствующие использованию приближения (4.9) при учете напряжения σ_y и деформации E_y . С целью упрощения выкладок и проведения лишь качественного анализа рассматриваемых ниже задач без потери их содержательности соотношения закона Гука примем в виде

$$\sigma_x = E_1 E_x, \quad \sigma_y = E_2 E_y, \quad \tau_{xy} = G_{12} \gamma_{12} \quad (5.18)$$

которые соответствуют гипотетическому материалу с нулевыми значениями коэффициентов Пуассона. Тогда в соответствии с формулами (5.18), (5.1), (4.9), (4.6), (4.7) приходим к соотношениям упругости

$$\begin{aligned} N_x &= B_1 E_x^0 = B_1(u' + v^2/2), \quad N_y = B_2(\varphi + \gamma^2/2), \quad B_2 = 2hE_2 \\ N_{xy} &= B_{12}(v' + \gamma), \quad M = D_1 \chi = D_1(\gamma' + v\varphi') \end{aligned} \quad (5.19)$$

В рассматриваемом случае при использовании приближения (4.9) и установленных соотношений для E_y (4.6) и (4.7), исходя из соотношений (5.2), (5.4), получаем уравнения равновесия

$$\begin{aligned} N_x' &= B_1(u' + v^2/2)' = 0, \quad Q_y' = (N_x v' + N_{xy} + M\varphi)' = 0 \\ M' - N_y \gamma - N_{xy} + 2hp_{xy} &= 0, \quad (Mv)' - N_y + 2hp_y = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

и граничные условия при $x = 0$ и $x = a$

$$\begin{aligned} N_x &= 2hp_x \text{ при } \delta u \neq 0, \quad N_x v' + N_{xy} + M\varphi' = 2hp_{xy} \text{ при } \delta v \neq 0 \\ M &= 0 \text{ при } \delta \gamma \neq 0, \quad Mv' = 0 \text{ при } \delta \varphi \neq 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

На основе составленных уравнений рассмотрим два вида нагружения полосы.

Пусть полоса находится в условиях чистого сдвига под действием погонных сил $p_{xy} = \tau$, показанных на фиг. 2.

Для проведения качественного анализа введем стандартное предположение о том, что рассматриваемая полоса до потери устойчивости напряжена, но не деформирована. В рамках такого предположения в начальном невозмущенном состоянии для введенных в рассмотрение внутренних усилий и моментов будем иметь

$$N_x^0 = 0, \quad N_y^0 = 0, \quad N_{xy}^0 = 2h\tau, \quad M^0 = 0 \quad (5.22)$$

Проведя линеаризацию уравнений (5.20) в окрестности решения (5.22) и оставляя для приращений перемещений те же принятые выше обозначения, получим линеаризованные уравнения возмущенного состояния

$$\begin{aligned} N_x' &= B_1 u'' = 0, \quad B_2 \varphi = 0, \quad N_{xy}' = B_{12}(v' + \gamma)' = 0 \\ M' - N_{xy} &= D_1 \gamma'' - B_{12}(v' + \gamma) = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

для которых линеаризованные в окрестности решения (5.22) граничные условия однородные:

$$u' = 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \quad N_{xy} = B_{12}(v' + \gamma) = 0 \text{ при } \delta v \neq 0, \quad \gamma' = 0 \text{ при } \delta \gamma \neq 0 \quad (5.24)$$

Уравнения (5.23) при граничных условиях (5.24) имеют только тривиальное решение. Следовательно, в рамках принятой степени точности описания сдвиговой деформации линейным соотношением (4.9) решения уравнений (5.20) при чистом сдвиге не позволяют выявить чисто сдвиговую ФПУ.

Пусть полоса находится в условиях одностороннего сжатия силой $p_y = -q$ в поперечном направлении.

В рассматриваемом случае для начального невозмущенного состояния вместо (5.22) будем иметь решение

$$N_x^0 = 0, \quad N_y^0 = -2hq, \quad N_{xy}^0 = 0, \quad M^0 = 0 \quad (5.25)$$

а линеаризованные в его окрестности уравнения возмущенного состояния примут вид

$$N_x' = 0, \quad B_2\varphi = 0, \quad N_{xy}' = 0, \quad M' - N_{xy}' + 2hq\gamma' = 0 \quad (5.26)$$

Как и в предыдущем случае, первое и второе уравнения (5.26) имеют только тривиальное решение.

С помощью третьего равенства (5.26) исключим N_{xy}' из последнего уравнения (5.26). Получим

$$M'' + 2hq\gamma' = 0$$

Отсюда при учете закона Гука (5.8) следует уравнение

$$M'' + k^2 M = 0, \quad k^2 = 2hq/D_1 \quad (5.27)$$

общее решение которого имеет вид

$$M = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (5.28)$$

При однородных граничных условиях

$$M(x=0) = 0, \quad M(x=a) = 0 \quad (5.29)$$

приходим к системе уравнений

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin kx = 0$$

имеющей два решения.

1°. $C_1 = C_2 = 0$, чему соответствует $M \equiv 0$ и, как видно из последнего уравнения (5.26),

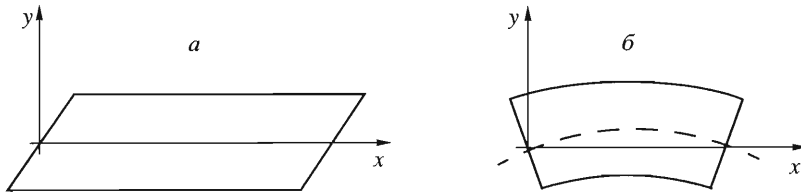
$$N_{xy} - 2hq\gamma = 0 \quad (5.30)$$

Отсюда при учете закона Гука (5.9) имеем

$$B_{12}v' + (B_{12} - 2hq)\gamma = 0 \quad (5.31)$$

Это уравнение при

$$q_*^{(1)} = \frac{B_{12}}{2h} = G_{12} \quad (5.32)$$



Фиг. 3

допускает решение $v' = 0$, $\gamma \neq 0$, которое соответствует появлению смежных сдвиговых форм равновесия с сохранением прямолинейности оси x . Соответствующая ФПУ показана на фиг. 3, а.

2°. $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$, $\sin ka = 0$, т.е. $ka = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$). Отсюда при $n = 1$ получаем критическую нагрузку

$$q_*^{(2)} = \frac{\pi^2 D_1}{2ha^2} \quad (5.33)$$

Ей соответствует

$$M = C_1 \sin \frac{\pi x}{a}, \quad C_1 \neq 0 \quad (5.34)$$

и, в силу закона Гука (5.8),

$$\gamma = \frac{C_1}{D_1} \cos \frac{\pi x}{a} + C_3 \quad (5.35)$$

Чтобы исключить поворот полосы как жесткого тела, достаточно закрепить от поворота его среднее сечение, т.е. положить $\gamma(x = a/2) = 0$. Отсюда следует, что $C_3 = 0$. Соответствующую форму прогиба v получим из третьего уравнения (5.26) с учетом закона Гука (5.9), что приводит к уравнению

$$(v' + \gamma)' = 0$$

В итоге, учитывая выражение (5.35), получим

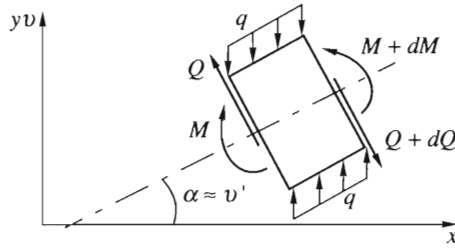
$$v = -\frac{C_1 a}{D_1 \pi} \sin \frac{\pi x}{a} + C_3 + C_4 x \quad (5.36)$$

Если концы оси полосы закреплены от вертикальных перемещений, т.е. $v(x=0) = v(x=a) = 0$, то $C_3 = C_4 = 0$, и тогда сдвиг $\gamma_{12} = v' + \gamma \equiv 0$. Таким образом, при этой ФПУ сечение остается перпендикулярным к деформированной оси, и полоса ведет себя как балка Бернулли – Эйлера. Соответствующая ФПУ показана на фиг. 3, б.

Следует отметить, что аналогичный результат можно получить, если рассматривать полосу как балку Бернулли – Эйлера, сжатую в поперечном направлении нагрузками q , которые не меняют своего направления при изгибных возмущениях. Элемент dx такой балки в возмущенном состоянии показан на фиг. 4. Уравнения равновесия элемента и соотношение закона Гука принимают вид

$$Q' = 0, \quad M' - Q + 2hq\alpha = 0, \quad M = D_1 \chi = D_1 \alpha' = D_1 v'' \quad (5.37)$$

Из них сразу следует уравнение (5.27), из которого при тех же граничных условиях (5.29) вытекает та же критическая нагрузка (5.33).



Фиг. 4

Очевидно, что если нагрузка q остается нормальной к деформированной оси полосы, т.е. ведет себя как нормальное давление, то последнее слагаемое во втором уравнении (5.37) исчезает, и такая потеря устойчивости становится невозможной. Точно так же исчезнут последние слагаемые в последнем уравнении (5.26) и уравнении (5.27) для полосы. Общее решение полученного уравнения $M'' = 0$ будет $M = C_1 + C_2x$, и при отсутствии моментов на концах полосы получим, что $C_1 = C_2 = 0$ и $M \equiv 0$. В этом случае становится возможной только сдвиговая ФПУ, определяемая соотношениями (5.30)–(5.32).

Уравнения и бифуркации их решений, соответствующие использованию полных непротиворечивых кинематических соотношений в квадратичном приближении. В соотношениях закона Гука (5.18) заменим соотношение для τ_{xy} следующим:

$$\tau_{xy} = G_{12} \sin \gamma_{12} \tag{5.38}$$

что приводит к соотношениям упругости, отличающимся от (5.19) заменой предпоследнего равенства на

$$N_{xy} = B_{12} [(1 + \varphi)v' + (1 + u')\gamma] \tag{5.39}$$

В рассматриваемом случае при использовании вместо выражения (4.9) соотношения (4.8) получаем уравнения равновесия вида

$$\begin{aligned} (N_x + N_{xy}\gamma)' &= 0, & [N_x v' + N_{xy}(1 + \varphi) + M\varphi']' &= 0 \\ M' - N_y \gamma - N_{xy}(1 + u') + 2hp_{xy} &= 0, & (Mv')' - N_y - N_{xy}v' + 2hp_y &= 0 \end{aligned} \tag{5.40}$$

для которых граничные условия при $x = 0$ и $x = a$ принимают вид

$$\begin{aligned} N_x + N_{xy}\gamma &= 2hp_x \text{ при } \delta u \neq 0 \\ N_x v' + N_{xy}(1 + \varphi) + M\varphi' &= 2p_{xy} \text{ при } \delta v \neq 0 \\ M' &= 0 \text{ при } \delta \gamma \neq 0, \quad Mv' = 0 \text{ при } \delta \varphi \neq 0 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Если начальное напряженно-деформированное состояние полосы определено решением

$$N_x^0 = -2hp, \quad N_y^0 = -2hq, \quad N_{xy}^0 = 2h\tau, \quad M^0 = 0 \tag{5.42}$$

то уравнения (5.40) и граничные условия (5.41), линеаризованные в окрестности этого решения, запишутся в виде

$$\begin{aligned} (N_x + 2h\tau\gamma)' &= 0, & N_y + 2h\tau v' &= 0 & (N_{xy} - 2hpv' + 2h\tau\varphi)' &= 0 \\ M' - N_{xy} + 2hq\gamma - 2h\tau u' &= 0 \end{aligned} \tag{5.43}$$

при $x = 0$ и $x = a$

$$\begin{aligned} N_x + 2ht\gamma = 0 \text{ или } \delta u = 0; \quad N_{xy} - 2h\rho v' + 2ht\phi = 0 \text{ или } \delta v = 0 \\ M' = 0 \text{ при } \delta\gamma = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

где, как и ранее,

$$N_x = B_1 u', \quad N_y = B_2 \phi, \quad N_{xy} = B_{12}(v' + \gamma), \quad M = D_1 \gamma' \quad (5.45)$$

Сначала рассмотрим полосу в условиях чистого сдвига под действием погонных сил $p_{xy} = \tau$, приложенных на торцах (фиг. 2). В этом случае $p = q = 0$, а для первого уравнения (5.43) граничные условия примем в виде $N_x + 2ht\gamma = 0$ при $x = 0$ и $x = a$. В силу этого уравнения (5.43) при использовании соотношений (5.45) представимы в виде

$$\begin{aligned} B_1 u' + 2ht\gamma = 0, \quad B_2 \phi + 2htv' = 0, \quad B_{12}(v' + \gamma) + 2ht\phi = C_1 \\ D_1 \gamma'' - B_{12}(v' + \gamma) - 2htu' = 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Из первых двух уравнений (5.46) находим

$$u' = -\frac{S}{B_1} \gamma, \quad \phi = -\frac{S}{B_2} v'; \quad S = 2ht \quad (5.47)$$

Следовательно, последние два уравнения (5.46) примут вид

$$\gamma = \frac{C_1}{B_{12}} - \chi v', \quad D_1 \gamma'' - \frac{S^2}{B_2} v' + \frac{S_2}{B_1} \gamma = C_1; \quad \chi = 1 - \frac{S^2}{B_2 B_{12}} \quad (5.48)$$

При использовании первого уравнения (5.48) запишем первый интеграл второго уравнения в виде

$$v'' + k^2 v = b C_1 x + C_2 \quad (5.49)$$

Здесь

$$k^2 = \frac{1 - \chi}{D_1} \left(\frac{B_{12}}{\chi} + \frac{B_2 B_{12}}{B_1} \right), \quad b = -\frac{1}{D_1} \quad (5.50)$$

Подставив общее решение уравнения (5.49) в выражение для γ , получим после дифференцирования по x

$$\gamma' = \chi k^2 (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) \quad (5.51)$$

Подчиним найденное решение (5.51) последнему условию (5.44) при $x = 0$. Тогда получим равенство

$$\chi k^2 C_4 = 0 \quad (5.52)$$

которое может быть выполнено в трех случаях:

- 1) $C_4 = 0$;
- 2) $\chi = 0$, откуда следует положительное бифуркационное значение

$$S_*^{(1)} = \sqrt{B_2 B_{12}} \text{ или } \tau_*^{(1)} = \sqrt{E_2 G_{12}} \quad (5.53)$$

а также

$$\gamma = C_1 / B_{12} = \text{const}, \quad \gamma' \equiv 0 \quad (5.54)$$

т.е. все сечения $x = \text{const}$ при переходе в возмущенное состояние поворачиваются на постоянный по длине полосы угол, что характерно для сдвиговой ФПУ; при этом

$k = \infty$, и перемещение v становится неопределенным, в отличие от случаев, соответствующих действию сил p и q ;

3) $k^2 = 0$, что при использовании первой формулы (5.50) приводит к другому положительному бифуркационному значению

$$S_*^{(2)} = \sqrt{(B_1 + B_2)B_{12}}, \text{ или } \tau_*^{(2)} = \sqrt{(E_1 + E_2)G_{12}} \quad (5.55)$$

Видно, что $\tau_*^{(2)} > \tau_*^{(1)}$.

Подчиним теперь решение (5.51) условию $M' = 0$ при $x = a$ для случая $C_4 = 0$. Тогда

$$\chi k^2 \sin ka C_3 = 0 \quad (5.56)$$

Отсюда следует, что $C_3 \neq 0$, лишь когда в отличие от случаев $\chi = 0$ и $k^2 = 0$ выполняется условие

$$k^2 = n^2 \pi^2 / a^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Используя первую формулу (5.50), приходим к квадратному уравнению относительно S^2 , откуда находим

$$S_*^{(3,4)} = (U \pm \sqrt{U^2 - V})^{1/2}; \quad U = \frac{1}{2}[(B_1 + B_2)B_{12} + B_1 T_E], \quad V = B_1 B_2 B_{12} T_E \quad (5.57)$$

$$T_E = \frac{\pi^2}{a^2} D_1 = \frac{\pi^2 h^2 B_1}{a^2} n^2$$

Отсюда следует

$$S_*^{(3)} \equiv 0, \quad S_*^{(4)} = S_*^{(2)} \text{ при } n = 0; \quad S_*^{(3)} = 0, \quad S_*^{(4)} = S_*^{(1)} \text{ при } B_1 \equiv 0$$

Анализ корней (5.57) показал, что при $n \neq 0$ минимальным является $S_*^{(4)}$ при $n = 1$.

С целью сопоставления значений $S_*^{(1)}$ и $S_*^{(4)}$, определяемых по формулам (5.53) и (5.57) (при выборе знака минус), составим отношение

$$r^2 = (S_*^{(4)} / S_*^{(1)})^2 = \zeta - \sqrt{\zeta^2 - \eta}$$

где

$$\zeta = \frac{1}{2}(1 + k_1 + \eta), \quad \eta = \frac{\pi^2}{3} k_1 k_{12} \varepsilon^2, \quad k_1 = \frac{B_1}{B_2}, \quad k_{12} = \frac{B_1}{B_{12}}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}$$

В таблице приведены значения r при разных значениях k_1, k_{12} и ε ; при значениях $\varepsilon = 0.5$, вообще говоря, не соответствующих случаю $\varepsilon \ll 1$, значения r заключены между 0.938 и 0.999. Видно, что всегда $S_*^{(4)} < S_*^{(1)}$. При малых значениях жесткости на поперечный сдвиг ($B_{12}/B_1 \ll 1$) для полосы средней толщины ($\varepsilon = 0.1$) значения $S_*^{(1)}$ приближаются к значениям $S_*^{(4)}$ при увеличении параметра $k_1 = B_1/B_2$.

Таким образом, при чистом сдвиге наименьшему бифуркационному значению τ_* соответствует решение (5.51), в котором необходимо принять $C_4 = 0$. В этом случае для v будем иметь функцию

$$v = C_3 \sin kx + \frac{1}{k^2} (b C_1 x + C_2) \quad (5.58)$$

k_1	$k_{12} = 10$			10^2			10^3		
	ε								
	0.5	0.1	0.01	0.5	0.1	0.01	0.5	0.1	0.01
1	0.938	0.388	0.040	0.993	0.848	0.127	0.999	0.984	0.388
10	0.943	0.483	0.054	0.994	0.873	0.171	0.999	0.985	0.484

а для γ и γ' – функции

$$\gamma = \left(\frac{1}{B_{12}} - \frac{b}{k^2} \chi \right) C_1 - C_3 \chi k \cos kx; \quad \gamma' = \chi k^2 C_3 \sin kx \quad (5.59)$$

которыми после определения двух постоянных интегрирования из трех описывается соответствующая форма потери устойчивости.

Отметим, что для прямоугольной ортотропной плиты, подверженной чистому сдвигу, решение задачи о сдвиговой ФПУ было дано ранее в [5] исходя из линеаризованных уравнений плоской задачи теории упругости, в основу которых положено использование полного кинематического соотношения (4.3). Полученное в ней бифуркационное значение τ_* для изотропной плиты равно

$$\tau_* = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

которое при $\nu = 0.3$ в 1.6 раза ниже значения $\tau_*^{(1)}$, определяемого по формуле (5.54).

Нетрудно убедиться, что при действии на полосу силы p , когда $q = \tau = 0$, следующая из задачи (5.43)–(5.45) задача полностью совпадает с рассмотренной выше на базе максимально упрощенных уравнений, а при действии силы q , когда $p = \tau = 0$, задача, следующая из задачи (5.43)–(5.45), совпадает с исследованной выше на базе частично упрощенных уравнений.

6. Анализ кинематических соотношений в ортогональных криволинейных координатах. Отнесем континуум недеформированного тела к ортогональной системе криволинейных координат x^α ($\alpha = 1, 2, 3$), в которой определены параметры Ламе H_α и единичные векторы \mathbf{I}_α . Если вектор перемещений \mathbf{U} произвольной точки $M(x^\alpha)$ представить разложением $\mathbf{U} = U_\alpha \mathbf{I}_\alpha$, то в деформированном состоянии для единичных векторов \mathbf{I}_α^* , а также деформаций удлинений E_α и сдвигов $\gamma_{\alpha\beta}$ ($\beta = 1, 2, 3$) без введения каких-либо ограничений их величин имеют место аналоги приведенных в разд. 1 формул (суммирование в соответствии с общепринятыми правилами производится по немым индексам)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\alpha^* &= (\delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}) \mathbf{I}_\beta / h_\alpha^*, \quad E_\alpha = h_\alpha^* - 1 \\ \sin \gamma_{\alpha\beta} &= 2\varepsilon_{\alpha\beta} / (h_\alpha^* h_\beta^*) \quad (\alpha \neq \beta); \quad h_\alpha^* = (1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha})^{1/2} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta} &= e_{\alpha\beta} + e_{\beta\alpha} + e_{\alpha\delta} e_{\beta\delta} = \delta_{\beta\pi} e_{\alpha\pi} + \delta_{\alpha\pi} e_{\beta\pi} + e_{\alpha\pi} e_{\beta\pi} = \\ &= \left(\delta_{\alpha\pi} + \frac{e_{\alpha\pi}}{2} \right) e_{\beta\pi} + \left(\delta_{\beta\pi} + \frac{e_{\beta\pi}}{2} \right) e_{\alpha\pi} \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$e_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} u_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x^3} u_3 \tag{6.3}$$

$$e_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x^2} u_1, \quad e_{13} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial x^1} - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x^3} u_1, \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ 1, 2, 3 \\ \longleftarrow \end{matrix}$$

Общеприняты упрощенные для случая малых деформаций удлинений аналоги формул (1.3)

$$E_\alpha \approx \varepsilon_{\alpha\alpha} \tag{6.4}$$

следующие из первого равенства (6.1) с точностью $2 + E_\alpha \approx 2$, а из второго равенства (6.1) с точностью $(1 + 2\varepsilon_{\alpha\alpha})^{-1/2} \approx 1$ вытекают приближенные формулы

$$\gamma_{\alpha\beta} \approx 2\varepsilon_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta) \tag{6.5}$$

если принять $\sin \gamma_{\alpha\beta} \approx \gamma_{\alpha\beta}$.

Предположим, что в каждой точке деформированного тела оси x^α являются главными осями деформации. В такой системе координат

$$\gamma_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

причем лишь в случае $e_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Но при этом, как следует из равенства (6.2), справедливы выражения

$$2\varepsilon_{\alpha\alpha} = 2e_{\alpha\alpha} + e_{\alpha\alpha}^2$$

Подстановка этих выражений во второе равенство (6.1) приводит к точным формулам

$$E_\alpha = (1 + 2e_{\alpha\alpha} + e_{\alpha\alpha}^2)^{1/2} - 1 = e_{\alpha\alpha} \tag{6.6}$$

являющимися аналогами формул (2.3), в то время как в рамках приближенных формул (6.4) приходим к результату

$$E_\alpha \approx \varepsilon_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\alpha} + e_{\alpha\alpha}^2/2 \tag{6.7}$$

В дополнение к задачам, рассмотренным ранее [4, 5], ниже на простейшем примере покажем, к каким физически некорректным результатам и выводам может привести использование приближений (6.4) при решении конкретных задач.

7. Решения задачи о нейтральном равновесии кругового кольца под равномерным внешним давлением, имеющие нулевую изменяемость в окружном направлении. Рассмотрим решения задачи о нейтральном равновесии (формах потери устойчивости) кругового кольца при действии равномерного внешнего давления, которые имеют нулевую изменяемость параметров возмущенного напряженно-деформированного состояния (НДС) в окружном направлении. Формы потери устойчивости и колебаний трехслойных конструкций, которые имеют нулевую изменяемость в окружном направлении, были описаны и исследованы ранее [4, 10, 11].

Невозмущенное (докритическое) НДС. Пусть круговое кольцо из ортотропного материала, имеющее толщину $2h$, радиус срединной поверхности R , находится в плоском НДС под действием равномерного внешнего давления p . Если срединную поверхность кольца отнести к окружной (угловой) координате θ и радиальной координате z ($-h \leq z \leq h$), связанной с безразмерной координатой ρ зависимостью $\rho = 1 + z/R$, то его невозмущенное (осесимметричное) НДС будет описываться уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_{zz}^0}{d\rho} + \frac{\sigma_{zz}^0 - \sigma_{\theta\theta}^0}{\rho} = 0 \tag{7.1}$$

Здесь и в дальнейшем все параметры невозмущенного НДС отмечаются верхним нулевым индексом.

Если материал кольца линейно упругий, с упругими параметрами $\tilde{E}_2, \tilde{E}_3, G_{23}, \nu_2, \nu_3$, причем $\tilde{E}_2 \nu_2 = \tilde{E}_3 \nu_3$, то входящие в уравнение (7.1) окружные и радиальные нормальные напряжения с соответствующим радиальным перемещением u_z^0 связаны соотношениями обобщенного закона Гука

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{E_3^*}{R} \left(\frac{du_z^0}{d\rho} + \nu_3 \frac{u_z^0}{\rho} \right), \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = \frac{\tilde{E}_2}{R} \left(\frac{u_z^0}{\rho} + \nu_2 \frac{du_z^0}{d\rho} \right); \quad E_3^* = \frac{\tilde{E}_3}{(1 - \nu_2 \nu_3)}, \quad E_2^* = \frac{\tilde{E}_2}{(1 - \nu_2 \nu_3)} \quad (7.2)$$

Следует заметить, что в рассматриваемом случае оси θ и z – главные оси деформации и строго выполняются равенства

$$E_z^0 = E_{zz}^0, \quad E_\theta^0 = E_{\theta\theta}^0$$

в которых

$$E_{zz}^0 = du_z^0/dz = R^{-1} du_z^0/d\rho, \quad E_{\theta\theta}^0 = R^{-1} u_z^0/\rho$$

Поэтому соотношения упругости (7.2) и уравнение равновесия (7.1), в которых напряжения $\sigma_{zz}^0, \sigma_{\theta\theta}^0$ отнесены к соответствующим площадкам в недеформированном состоянии кольца, также являются точными.

После подстановки выражений (7.2) в уравнение равновесия (7.1) приходим к уравнению относительно u_z^0

$$\frac{d^2 u_z^0}{d\rho^2} + \frac{du_z^0}{\rho d\rho} - \delta^2 \frac{u_z^0}{\rho^2} = 0; \quad \delta^2 = \frac{\tilde{E}_2}{\tilde{E}_3}$$

решение которого при граничных условиях

$$\sigma_{zz}^0 = -p \text{ при } z = h, \quad \sigma_{zz}^0 = 0 \text{ при } z = -h$$

имеет вид

$$u_z^0 = A_+ \rho^\delta + A_- \rho^{-\delta}, \quad A_\pm = \frac{pR}{\Delta E_3^* (\delta \pm \nu_3)} \rho_1^{\mp \delta - 1} \quad (7.3)$$

$$\Delta = \rho_1^{\delta-1} \rho_2^{-\delta-1} - \rho_1^{-\delta-1} \rho_2^{\delta-1}, \quad \rho_1 = 1 - h_0, \quad \rho_2 = 1 + h_0, \quad h_0 = h/R$$

В соответствии с формулами (7.2), (7.3) для напряжений имеем выражения

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{p}{\rho_1 \rho \Delta} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\delta - \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\delta \right], \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = \frac{p \delta^2}{\rho_1 \rho \Delta} \left[\frac{1 + \nu_2 \delta}{\delta + \nu_3} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\delta + \frac{1 - \nu_2 \delta}{\delta - \nu_3} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\delta \right] \quad (7.4)$$

которые для кольца из изотропного материала в силу равенств

$$\nu_2 = \nu_3 = \nu, \quad \tilde{E}_2 = \tilde{E}_3 = E, \quad \delta = 1$$

принимают вид

$$\frac{\sigma_{zz}^0}{\rho^2 - \rho_1^2} = \frac{\sigma_{\theta\theta}^0}{\rho^2 + \rho_1^2} = -\frac{p \rho_2^2}{4 h_0 \rho^2} \quad (7.5)$$

В другом гипотетически возможном случае, когда $\delta \ll 1$ ($\tilde{E}_2 \ll \tilde{E}_3$), при $\delta \rightarrow 0$ из соотношений (7.4) получаем

$$\frac{\sigma_{zz}^0}{\ln(\rho/\rho_1)} = \sigma_{\theta\theta}^0 = -\frac{p\rho_2/\rho}{\ln(\rho_2/\rho_1)} \quad (7.6)$$

Для тонкого кольца, когда $h_0 \ll 1$, как из соотношений (7.5), так и (7.6) следуют одни и те же приближенные формулы

$$\frac{\sigma_{zz}^0}{(z_0 + h_0)} = \sigma_{\theta\theta}^0 = -\frac{p}{2h_0}; \quad z_0 = \frac{z}{R} \quad (7.7)$$

из которых видно, что $\sigma_{\theta\theta}^0 = \sigma_{zz}^0/h_0$ при $z_0 = h_0$.

Формы нейтрального равновесия кольца с нулевой изменяемостью параметров возмущенного НДС. Если деформации кольца в невозмущенном состоянии считать малыми, ввести стандартное предположение о том, что в этом состоянии оно является напряженным, но недеформированным, то для описания его нейтрального равновесия с параметрами возмущенного НДС, имеющими нулевую изменяемость в окружном направлении (т.е. $\partial/\partial\theta = 0$), исходя из работ В.В. Новожилова, А.Н. Гузя и др. (см., например [1]), можно составить следующую систему однородных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{\rho d\rho}(\rho\tilde{\sigma}_{z\theta}) + \frac{\tilde{\sigma}_{\theta z}}{\rho} = 0, \quad \frac{d}{\rho d\rho}(\rho\tilde{\sigma}_{zz}) - \frac{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}}{\rho} = 0 \quad (7.8)$$

в которых $\tilde{\sigma}_{zz}$, $\tilde{\sigma}_{z\theta}$, $\tilde{\sigma}_{\theta z}$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ – возмущенные компоненты напряжений в осях I_2, I_3 недеформированного состояния кольца, связанные с возмущенными компонентами напряжений σ_{zz} , $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ в деформированных осях I_2^*, I_3^* и напряжениями $\sigma_{\theta\theta}^0$, σ_{zz}^0 зависимостями

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 E_{zz}, \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^0 E_{\theta\theta} \quad (7.9)$$

$$\tilde{\sigma}_{z\theta} = \sigma_{z\theta} + \sigma_{zz}^0 (E_{z\theta}/2 - \omega), \quad \tilde{\sigma}_{\theta z} = \sigma_{\theta z} + \sigma_{\theta\theta}^0 (E_{z\theta}/2 + \omega) \quad (7.10)$$

причем

$$\sigma_{zz} = E_3^*(E_{zz} + \nu_3 E_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = E_2^*(E_{\theta\theta} + \nu_2 E_{zz}), \quad \sigma_{\theta z} = G_{23} E_{\theta z} \quad (7.11)$$

$$E_{z\theta} = \frac{du_\theta}{Rd\rho}, \quad E_{zz} = \frac{du_z}{Rd\rho}, \quad E_{\theta\theta} = \frac{u_\theta}{R\rho}, \quad E_{\theta z} = \frac{1}{R}\left(\frac{du_\theta}{d\rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\right), \quad \omega = -\frac{1}{2R}\left(\frac{du_\theta}{d\rho} + \frac{u_\theta}{\rho}\right) \quad (7.12)$$

В соответствии с соотношениями (7.9)–(7.12) уравнения (7.8) сводятся к двум несвязанным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(G_{23} + \sigma_{zz}^0)\frac{d^2 u_\theta}{d\rho^2} + \frac{G_{23} + \sigma_{\theta\theta}^0}{\rho}\left(\frac{du_\theta}{d\rho} - \frac{u_\theta}{\rho}\right) = 0 \quad (7.13)$$

$$(E_3^* + \sigma_{zz}^0)\frac{d^2 u_z}{d\rho^2} + \frac{E_3^* + \sigma_{\theta\theta}^0}{\rho}\frac{du_z}{d\rho} - \frac{E_2^* + \sigma_{\theta\theta}^0}{\rho^2}u_z = 0 \quad (7.14)$$

Уравнения (7.13) и (7.14) при $z = \pm h$ должны удовлетворять соответственно условиям

$$\tilde{\sigma}_{z\theta}(\rho = \rho_1) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{z\theta}(\rho = \rho_2) = 0 \quad (7.15)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}(\rho = \rho_1) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{zz}(\rho = \rho_2) = 0 \quad (7.16)$$

Исследование составленных уравнений при граничных условиях (7.15), (7.16) может быть проведено при разных степенях приближения. Однако принципиальные выводы могут быть сформулированы и при их исследовании для тонкого кольца в рамках использования простейшей модели оболочек

$$u_z \approx w, \quad u_\theta \approx v + \rho\psi \quad (7.17)$$

получившей название модели типа Тимошенко без учета поперечного обжатия. Здесь w и v – радиальные и окружные перемещения точек оси кольца.

Применение первого соотношения (7.17) к уравнению (7.14) приводит к равенству

$$w \int_{\rho_1}^{\rho_2} (E_2^* + \sigma_{\theta\theta}^0) d\rho = 0$$

которое при использовании для тонкого кольца второй формулы (7.7) дает $w(E_2^* - p) = 0$.

Отсюда следует бифуркационное значение внешнего давления $p_* = E_2^*$, аналогичное полученному ранее [4, 5] и связанное с принятием приближения $E_\theta \approx \epsilon_{\theta\theta}$ в исходной геометрически нелинейной задаче, формулируемой с использованием общих соотношений вида

$$E_\alpha \approx \epsilon_{\alpha\alpha}, \quad \gamma_{\alpha\beta} \approx 2\epsilon_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

Если вместо $u_z \approx w$ использовать более точные аппроксимации с удовлетворением условий (7.16), то из уравнения (7.14) можно установить несколько бифуркационных значений внешнего давления в силу использования приближений

$$E_\theta \approx \epsilon_{\theta\theta}, \quad E_z \approx \epsilon_{zz}$$

при построении исходных геометрически нелинейных уравнений.

Применяя второе соотношение (7.17) к уравнению (7.13) и вторую формулу (7.7), получим

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(G_{23} + \sigma_{\theta\theta}^0)}{\rho} v d\rho \approx 2 \left(G_{23} - \frac{p}{2h_0} \right) v h_0 = 0$$

Отсюда в силу того, что $v \neq 0$, получим бифуркационное значение внешнего давления

$$p_* = 2h_0 G_{23} \quad (7.18)$$

которое в свете результатов, полученных ранее [4, 10], является критическим значением внешнего давления, при достижении которого кольцо теряет устойчивость по чисто сдвиговой форме. Такая форма потери устойчивости кольца физически реализуется при достижении $\sigma_{\theta\theta}^0$ значения G_{23} , если при меньших значениях p раньше не реализуется чисто изгибная форма потери устойчивости.

8. Непротиворечивые кинематические соотношения в квадратичном приближении для случая малых деформаций удлинений и средних сдвиговых деформаций. В свете изложенных результатов для случая малых деформаций удлинений ($E_\alpha \approx \epsilon$) в ортогональных криволинейных координатах более корректными по сравнению с соотношениями, используемыми в литературе, являются соотношения

$$E_1 \approx e_{11} + (e_{12}^2 + e_{13}^2)/2, \dots \tag{8.1}$$

представляющие собой аналог соотношений (1.6) и, в отличие от (6.7), допускающие предельный переход к формулам (6.6). При этом для определения сдвиговых деформаций необходимо использовать соотношения

$$\sin \gamma_{12} \approx 2\epsilon_{12} = e_{12}(1 + e_{22}) + e_{21}(1 + e_{11}) + e_{13}e_{23}, \dots \tag{8.2}$$

являющиеся аналогами соотношений (1.4).

Необходимо отметить, что соотношения (8.1) следуют из (6.2), (6.4) лишь тогда, когда наряду с выполнением оценок $E_\alpha \approx \epsilon$ (т.е. когда допустимо использование приближений (6.4)) выполняются оценки

$$e_{\alpha\alpha} \approx \epsilon, \quad e_{\alpha\beta} \approx \sqrt{\epsilon} \quad (\alpha \neq \beta) \tag{8.3}$$

Другими словами, деформации удлинений могут быть малыми, лишь когда малы величины $e_{\alpha\alpha}$ и являются “средними” (т.е. порядка $\sqrt{\epsilon}$) величины $e_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$). При $h_\alpha^* \approx 1$ геометрический смысл последних легко устанавливается исходя из первого равенства (6.1), например, $e_{12} = \cos(I_1^*, I_2^*)$ и т.д. Так как через величины $e_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) определяются сдвиговые деформации, а они при выполнении оценок (8.3) в соответствии с (8.2) являются “средними”, то соотношения (8.2) в рамках использования приближений (5.1) допускают дальнейшие упрощения вида

$$\gamma_{12} \approx \sin \gamma_{12} \approx 2\epsilon_{12} \approx e_{12} + e_{21} + e_{13}e_{23}, \dots \tag{8.4}$$

В итоге, при малых деформациях удлинений и средних сдвиговых деформациях корректными и с необходимой степенью полноты обоснованными являются кинематические соотношения в квадратичном приближении (8.1) и (8.4). Формулируемые при их использовании геометрически нелинейные уравнения теории упругости позволяют выявить лишь физически реализующиеся формы потери устойчивости, что, в частности, было продемонстрировано [4].

Для рассматриваемого случая деформированного состояния выражения (6.1) принимают вид

$$I_1^* = I_1 + e_{12}I_2 + e_{13}I_3, \quad \overleftarrow{1, 2, 3}$$

При их использовании между компонентами напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$, исходя из представлений

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} I_\beta^* = \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} I_\beta$$

можно установить зависимости

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \sigma_{11} + \sigma_{12}e_{21} + \sigma_{13}e_{31}, & \tilde{\sigma}_{12} &= \sigma_{11}e_{12} + \sigma_{12} + \sigma_{13}e_{32} \\ \tilde{\sigma}_{13} &= \sigma_{11}e_{13} + \sigma_{12}e_{23} + \sigma_{13}, & \overleftarrow{1, 2, 3} \end{aligned} \tag{8.5}$$

являющиеся корректными и не приводящими к “абсурдным” силовым граничным условиям. В этом можно убедиться и при рассмотрении задачи, изученной в разд. 7, с изложенных позиций. Действительно, при использовании для формулировки исходных геометрически нелинейных уравнений кинематических соотношений (8.1), (8.4) и зависимостей (8.5) в уравнения нейтрального равновесия (7.8) вместо (7.9) следует внести формулы

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz}, \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} \quad (8.6)$$

в которых σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ по-прежнему определяются по формулам (7.11). В результате “странные” граничные условия (7.16) становятся понятными:

$$\sigma_{zz}(\rho = \rho_1) = 0, \quad \sigma_{zz}(\rho = \rho_2) = 0 \quad (8.7)$$

а вместо уравнения (7.14) приходим к уравнению

$$E_3^* \left(\frac{d^2 u_z}{d\rho^2} + \frac{du_z}{\rho d\rho} \right) - \frac{E_2^*}{\rho^2} u_z = 0$$

имеющему в силу граничных условий (8.7) только тривиальное решение $u_z \equiv 0$.

9. Выводы. 1. Если в элементах конструкций формируется одноосное напряжение продольного сжатия, то реализующаяся в них форма потери устойчивости является или чисто изгибной, или чисто сдвиговой. Для определения бифуркационных значений действующей нагрузки при этом для деформаций удлинения в направлении сжатия необходимо использовать кинематическое соотношение в виде (1.6). А для деформаций в направлениях, ортогональных сжатию, и для сдвигов допустимо использование линейных кинематических соотношений.

2. При равномерном поперечном сжатии существенным оказывается поведение нагрузки. Если она остается нормальной к деформированной оси, то бифуркация возможна только по сдвиговой форме. Если же нагрузка сохраняет свое направление, то кроме бифуркации по сдвиговой форме возможна изгибная ФПУ, совпадающая по форме с эйлеровой, при которой сдвиги отсутствуют.

3. Если в элементе конструкции формируется напряженное состояние, близкое к чистому сдвигу, то для выявления бифуркационных значений нагрузки сдвиговые деформации необходимо описывать нелинейными кинематическими соотношениями в полном квадратичном варианте вида (1.5).

4. Для тонкостенных элементов конструкций в виде стержней, пластин и оболочек, изготовленных из композитных материалов, приемлемые результаты по определению ФПУ и критических нагрузок можно ожидать от использования простейших уточненных моделей, известных в литературе и построенных с учетом поперечных сдвигов. В то же время в свете полученных результатов в первую очередь требуют дальнейшего изучения вопросы, связанные с уточнением нелинейной теории многослойных (в частности, трехслойных) элементов конструкций, структура которых формируется из чередующихся тонких и жестких слоев и маложестких слоев заполнителей. Для трехслойных оболочек с заполнителями, которые можно отнести к классу трансверсально-мягких [12], такие непротиворечивые варианты теории, содержательные в части возможности выявления сдвиговых ФПУ при формировании в заполнителе напряжения сжатия в поперечном направлении, были построены ранее [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00535а, 03-01-00071).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
2. Donnell L.H. Beams, Plates and Shells. McGraw-Hill, 1976. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
3. Шклярчук Ф.Н. К расчету деформированного состояния и устойчивости геометрически нелинейных упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1998. №1. С. 140–146.
4. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. Уточненные уравнения среднего изгиба трехслойных оболочек и сдвиговые формы потери устойчивости // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 2. С. 195–200.
5. Паймушин В.Н., Иванов В.А. Формы потери устойчивости однородных и трехслойных пластин при чистом сдвиге в тангенциальных направлениях // Механика композитных материалов. 2000. Т. 36. № 2. С. 215–228.
6. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 4. С. 492–495.
7. Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
8. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
9. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
10. Паймушин В.Н. Сдвиговая форма потери устойчивости трехслойного кругового кольца при равномерном внешнем давлении // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 1. С. 58–60.
11. Паймушин В.Н. Классические и неклассические задачи динамики трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37. № 3. С. 289–306.
12. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.

Казань
e-mail: dsm@dsm.kstu-kai.ru

Поступила в редакцию
15.VI.2004